

---

## **CAPITULO IV**

---

---

#### **CAPITULO IV.** Desarrollo de una fórmula más general del Valor Presente Neto y Tasa interna de Rendimiento.

Un punto de vista alternativo presenta al valor presente neto como la diferencia entre la riqueza inicial  $W_0$  y el valor presente de la riqueza terminal  $W_n$  atribuible a un proyecto. Este criterio de "riqueza incremental" es representado por la siguiente fórmula:

$$NPV^* = \frac{W_n}{(1+k)^n} - W_0 \quad (2)$$

Como primera impresión esos dos criterios de valor presente neto pueden parecer equivalentes. Claramente las fórmulas NPV y NPV\* producen el mismo valor numerico asumiendo certeza. Sin embargo, existen diferencias conceptuales importantes entre esos dos criterios de valor presente neto, cuando el futuro es incierto, los valores numericos proporcionados por la fórmulas convencionales NPV pueden no reflejar con exactitud el valor de la firma en proyectos de contribuciones incrementales. Como resultado, decisiones basadas en esas fórmulas puede no maximizar el valor de la firma.

Una importante diferencia entre NPV y NPV\* es su relación para diferentes criterios de tasa de retorno. La IRR de un proyecto es la tasa de descuento para la cual NPV es cero. La tasa de descuento para la cual NPV\* de un proyecto es cero, sin embargo, representa un total diferencial del criterio tasa de retorno. Este segundo criterio de tasa de retorno Total (ORR) está basado sobre una suposición explícita de "reinversión".

##### **4.1 Principios básicos:**

Una oportunidad de inversión o financiamiento es referida como un proyecto y caracterizada por una secuencia finita de  $n + 1$  flujos netos de efectivo  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Y donde  $a_t$  es el flujo neto de efectivo esperado al tiempo  $t$ , al final del periodo  $t$ .

Los flujos de efectivo inicial y terminal de los proyectos son  $a_0$  y  $a_n$  respectivamente. Un \* negativo representa fondos adicionales requeridos por el proyecto al tiempo  $t$ . Un  $a_t$  positivo representa fondos liberados por el proyecto al tiempo  $t$ . Todos los proyectos asumen que tienen al menos un flujo neto de efectivo negativo y uno positivo.

---

Asociado con cada proyecto está una tasa de descuento  $k$  la cuál representa para las firmas un costo de oportunidad periódico para el horizonte de  $n$ -periodos sobre el cuál el proyecto está siendo evaluado.

Esto asume que la firma puede pedir cantidades de dinero ilimitadas al tiempo cero siempre que se reembolsen  $(1+k)^n$  pesos al tiempo  $n$  por cada peso pedido. También asume que la firma pueda invertir cantidades ilimitadas de pesos al tiempo cero y recibir  $(1+k)^n$  pesos al tiempo  $n$  por cada peso invertido.

Los costos de oportunidad de las firmas para periodos cortos dentro del horizonte de evaluación de  $n$ -periodos no deben necesariamente ser igualadas a  $k$ . Un par de tasas,  $r_{0,t}$  y  $r_{t,n}$  son definidas para cada tiempo  $t$ . Esto asume que la firma pueda pedir o invertir sumas ilimitadas desde el tiempo 0 al tiempo  $t$  a una tasa promedio periódica de  $r_{0,t}$  y desde el tiempo  $t$  al tiempo  $n$  a una tasa promedio periódica de  $r_{t,n}$ . Notar que  $r_{0,0} = 0$ ,  $r_{0,n} = k$  y  $r_{n,n} = 0$ .

La tasa de descuento  $k$ , las  $r_{0,t}$  y  $r_{t,n}$  son referidas como tasas externas porque ellas representan oportunidades externas para los proyectos bajo consideración de la firma. Las suposiciones acerca de los costo de oportunidad asociados con los flujos internos de efectivo son frecuentemente referidos como suposiciones de "reinversión".

Los flujos internos de efectivo pueden ser invertidos o en su lugar consumidos cuando el recibirlos es de no-consecuencia para la desición de inversión.

**4.2 Proyectos de doble flujo de efectivo.** Un proyecto de doble flujo de efectivo tiene solo dos flujos netos de efectivo diferentes de cero durante el horizonte de evaluación de n- periodos. El flujo de efectivo inicial es  $a_0$  y el flujo de efectivo terminal es  $a_n$ . Un proyecto de doble flujo de efectivo es un proyecto de inversión si el flujo de efectivo inicial  $a_0$  es negativo y es un proyecto de financiamiento si  $a_0$  es positivo.

El valor absoluto del flujo de efectivo inicial,  $|a_0|$ , es una medida apropiada de la escala de un proyecto de doble flujo de efectivo. El valor presente neto es reducido a su forma más elemental cuando es definida de la siguiente manera para proyectos de doble flujo de efectivo:

$$\text{Valor Presente Neto} = \frac{a_n}{(1+k)^n} + a_0 \quad (3)$$

La ecuación 3 es consistente con ambos criterios de valor presente neto. El criterio de "riqueza incremental" ( ec. 2) es mostrado a partir de que  $-a_0$  y  $a_n$  representan respectivamente la riqueza inicial y riqueza terminal atribuible al proyecto de doble flujo de efectivo.

Una tasa de retorno única puede ser calculada para cualquier proyecto de doble flujo de efectivo de la siguiente manera:

$$\text{Tasa de retorno} = \left[ \frac{a_n}{-a_0} \right]^{1/n} - 1.0 \quad (4)$$

Esta tasa puede ser descrita como una tasa interna porque está calculada sin referencias de tasas externas. Esta también puede ser descrita como una tasa total porque está basada sobre el ratio de riqueza terminal a riqueza inicial.

Las reglas de decisión del valor presente neto y tasa de retorno son lógicamente consistentes y sin ambigüedades para todos los proyectos de doble flujo de efectivo.

### **4.3 Proyectos con flujos internos de efectivo.**

Cualquier proyecto que tiene al menos un flujo neto de efectivo diferente de cero ocurridos entre el tiempo 0 y el tiempo n es un proyecto con flujos internos de efectivo. La fórmula NPV (Ec. 1) y la fórmula NPV\* (Ec. 2) esencialmente representan diferentes aproximaciones para extender la fórmula de doble flujo de efectivo (Ec. 3) para adaptar los flujos internos de efectivo. Los proyectos con flujos internos de efectivo presentan varias complicaciones no encontradas en proyectos de doble flujo de efectivo:

- 1.- La riqueza inicial y terminal atribuibles para un proyecto de flujos internos de efectivo no pueden ser determinadas sin suposiciones explícitas en cuanto a los costos de oportunidad asociados con los flujos internos de efectivo.
- 2.- La designación de un proyecto de flujos internos de efectivo como un proyecto de financiamiento o inversión no está determinado solamente por el signo de la cantidad inicial.
- 3.- La escala de los flujos internos de efectivo de un proyecto no está determinado solamente por la cuantía del flujo neto de efectivo inicial.

Los proyectos pueden ser asignados en una de tres categorías: inversión pura, financiamiento puro y mixto. Un proyecto con flujos internos de efectivo mixto es aquel que no es un proyecto de inversión puro o de financiamiento puro sino una combinación de los dos. Es una alternativa entre financiamiento e inversión funcionando durante el horizonte de n-periodos.

El hecho de que un proyecto de flujos internos de efectivo sea capaz de ser un proyecto de inversión o financiamiento puede ser determinado por examinación de los signos de los valores presentes acumulativos de éstos flujos netos de efectivo. El valor presente acumulativo para el tiempo t es definido como:

$$P_t = \sum_{j=0}^t \frac{a_j}{(1 + r_{0j})^j} \quad (5)$$

Para tasas externas dadas, un proyecto con flujos internos de efectivo es capaz de ser un proyecto de inversión si al menos uno de éstos  $p_{ts}$  para  $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$  es negativo. Si todos éstos  $p_{ts}$  son negativos, el proyecto puede ser solo un proyecto de inversión. Para tasas externas dadas, un proyecto con flujos internos de efectivo es capaz de ser un proyecto de financiamiento si al menos uno de éstos  $p_{ts}$  para  $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$  es positivo. Si todos éstos  $p_{ts}$  son positivos, el proyecto puede solo ser un proyecto de financiamiento.

Un proyecto el cuál tiene al menos un  $p_t$  negativo y un  $p_t$  positivo para  $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$  es capaz de ser tanto un proyecto de financiamiento como proyecto de inversión para tasas externas dadas. La última caracterización de asignación de un proyecto depende de la consideración para la cuál está siendo evaluado. Cuando la consideración de un proyecto de inversión potencial, el proyecto es sujeto a las reglas de desición para la cuál los proyectos de inversión son evaluados. Cuando es considerado como una fuente de financiamiento potencial, el mismo proyecto es sujeto a las reglas aplicables a los proyectos de financiamiento.

Este enfoque preserva una separación de desiciones de inversión y financiamiento y permite una generalización de las reglas de desición del valor presente neto y tasa interna de retorno desde proyectos de doble flujo de efectivo a proyectos con flujos internos de efectivo.

#### **4.4 Fórmulas convencionales para el valor presente neto.**

Para satisfacer a los flujos internos de efectivo, el valor presente neto ha sido tradicionalmente definido como la suma de los valores presentes de los flujos de efectivo de un proyecto. Si es asumido que todas las  $r_{0,ts}$  son equivalentes a la tasa de descuento  $k$ , éste criterio de valor presente puede ser representado por la ec. 1. Esta fórmula particular NPV provee las bases para la definición de tasa interna de retorno.

La TIR de un proyecto es aquella tasa interna  $\phi$  para la cuál obtenemos la siguiente igualdad:

$$\sum_{t=0}^n \frac{a_t}{(1+\phi)^t} = 0 \quad (6)$$

La TIR de un proyecto de flujos internos de efectivo es generalmente determinada mediante un proceso de prueba y error. Algunos proyectos tienen múltiples TIR y algunos no tienen.

Donde al menos una  $r_{0,t}$  para  $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$  no es igualada a  $k$ , una fórmula más general es requerida para representar el criterio "suma de los valores presentes" del valor presente neto:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{a_t}{(1+r_{0,t})^t} \quad (7)$$

Retomando las reglas de decisión del valor presente neto y tasa de retorno para aceptación y jerarquía de proyectos de doble flujo de efectivo, éstas reglas son lógicamente consistentes y sin ambigüedades para algunos, pero no para todos los proyectos de flujos internos de efectivo cuando el valor presente neto es determinado usando la fórmula convencional NPV y el criterio TIR de tasa de retorno.

#### **4.5 Fórmula generalizada para el valor presente neto.**

La implementación de la fórmula NPV\* ( Ec. 2) requiere de la identificación de la riqueza inicial y riqueza terminal atribuible al proyecto, lo cuál requiere a su vez suposiciones externas explícitas en cuanto a financiamiento e inversión de los flujos internos de efectivo. Muchos escritores reconocen que la riqueza terminal de un proyecto está en función de los costos de oportunidad asociados con éstos flujos internos de efectivo. Algunos reconocen que la riqueza inicial de proyectos también puede depender de esos costos de oportunidad.

La identificación de la riqueza inicial y terminal de un proyecto se convierte en una manera de determinar a cuales flujos de efectivo ( $a_{t,s}$ ) deberían ser descontados al tiempo 0 a sus respectivos costos de oportunidad ( $r_{0,t's}$ ) por inclusión en la riqueza inicial y cuál podría ser mezclada para el tiempo n a sus respectivos costos de oportunidad ( $r_{t,n's}$ ) para inclusión en la riqueza terminal.

La riqueza inicial atribuible a un proyecto es - 1.0 veces el valor presente acumulativo de los flujos netos de efectivo los cuáles ocurren en o antes del punto de transición  $t^*$  del proyecto:

$$w_0 = - \sum_{t=0}^{t^*} \frac{a_t}{(1+r_{0,t})^t} = - p_{t^*} \quad (8)$$

El valor absoluto de la riqueza inicial  $|w_0|$  es una medida apropiada para la escala de un proyecto.

El punto de transición de un proyecto de inversión es aquel tiempo  $t^*$  para el cuál el  $p_{t^*}$  de un proyecto es el mínimo valor  $p_t$  donde  $t = 0, 1, 2, \dots, n$ . Debido a que un proyecto de inversión tiene al menos un  $p_t$  negativo por definición éste  $p_{t^*}$  debe ser negativo y  $w_0$  positivo. El punto de transición de un proyecto es punto al mínimo tiempo para el cuál el flujo de efectivo restante ( $a_{t^*+1}$  hasta  $a_n$ ) es autofondo. Cualquier flujo neto de efectivo negativo en el flujo neto de efectivo restante son por completo fondos por la previa ocurrencia de los flujos netos de efectivo positivos también en el flujo neto de efectivo restante.

La riqueza inicial  $w_0$  son los fondos requerido al mínimo tiempo en que son requeridos por el proyecto hasta el punto de transición y por lo tanto al horizonte de n-periodos completo.

El punto de transición de un proyecto de financiamiento es aquel tiempo  $t^*$  para el cuál  $p_{t^*}$  es el máximo valor  $p_t$  del proyecto donde  $t = 0, 1, 2, \dots, n$ . Debido a que un proyecto de financiamiento tiene al menos un  $p_t$  positivo por definición, éste  $p_{t^*}$  debe ser positivo y  $w_0$  negativo.



La riqueza terminal atribuible a un proyecto es la combinación de valores acumulativos de esos flujos netos de efectivo ocurridos después del punto de transición  $t^*$  de los proyectos:

$$W_n = \sum_{t=t^*+1}^n a_t (1 + r_{t,n})^{n-t} \quad (9)$$

Asumiendo certeza,  $w_n \geq 0$  para un proyecto de inversión y  $w_n \leq 0$  para un proyecto de financiamiento ( ver prueba en apéndice A).

La fórmula representando el criterio de "riqueza incremental" del valor presente neto fué representado en la ec. 2 por sustitución  $w_0$  y  $w_n$  de las ecuaciones 8 y 9, la fórmula presentada en la ec. 2 se transforma en:

$$NPV^* = \frac{\sum_{t=t^*+1}^n a_t (1 + r_{t,n})^{t-n}}{(1 + k)^n} + \sum_{t=0}^{t^*} \frac{a_t}{(1 + r_{0,t})^t} \quad (10)$$

Esta formulación NPV\* es aplicable a todos los proyectos tanto de financiamiento como de inversión. En el caso de un proyecto de doble flujo de efectivo,  $W_0 = -a_0$  y  $W_n = a_n$ . En el caso de un proyecto con flujos internos de efectivo,  $-W_0$  y  $W_n$  identifican respectivamente los flujos de efectivo inicial y terminal ( $a_0$  y  $a_n$ ) de un proyecto de doble flujo de efectivo el cuál es equivalente a un proyecto de flujos internos de efectivo para tasas externas dadas.

NPV\* es simplemente el valor presente neto al cuál es equivalente a un proyecto de doble flujo de efectivo.

### Tasa de Retorno Total (ORR).

La tasa de Retorno Total para proyectos es aquella tasa de descuento para la cuál NPV\* de un proyecto es cero. Por substitución de  $W_0$  y  $W_n$  por  $a_0$  y  $a_n$  respectivamente la fórmula de tasa de retorno para un proyecto de doble flujo de efectivo presentada en la Ec. 4 se transforma en:

$$ORR = \left[ \frac{W_n}{W_0} \right]^{1/n} - 1 \quad (11)$$

Por substitución de  $W_0$  y  $W_n$  de las ecs. 8 y 9 tenemos:

$$ORR = \left[ \frac{\sum_{t=t^*+1}^n a_t (1 + r_{t,n})^{n-t}}{\sum_{t=0}^{t^*} a_t (1 + r_{0,t})^{-t}} \right]^{1/2} - 1.0 \quad (12)$$

Para tasas externas dadas, un proyecto es capaz de ser tanto un proyecto de inversión como un proyecto de financiamiento si tiene diferentes puntos de transición y puede tener diferentes NPV\* dependiendo de si éste es evaluado como un proyecto de inversión o como un proyecto de financiamiento.

En el evento poco probable de que un proyecto sea considerado como una inversión potencial y una fuente de fondos, deben ser practicados análisis independientes.

Retomando las reglas de decisión del valor presente neto y tasa de retorno para proyectos de doble flujo de efectivo, éstas son sin ambigüedades y lógicamente consistentes para todos los proyectos de flujos internos de efectivo si NPV\* y ORR son utilizados como valor presente neto y tasa de retorno total.

#### 4.6 Comparación entre los dos criterios de Valor Presente

Los criterios "suma de los valores presentes" y "riqueza incremental" del valor presente neto pueden ser comparados y contrastados primero asumiendo certeza y luego con ésta suposición relajada. son asumidos mercados perfectos y se realizan comparaciones solo para proyectos de inversión. Todas las conclusiones son aplicadas de la misma manera para proyectos de financiamiento.

##### 4.6.1 Asumiendo certeza y todas las $r_{0,t}$ 's igualadas a k.

Asumiendo certeza tenemos las siguientes relaciones entre cada  $r_{0,t}$  y la respectiva  $r_{t,n}$  para  $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ :

$$(1 + r_{0,t})^t (1 + r_{t,n})^{n-t} = (1 + k)^n \quad (13)$$

Si todas las  $r_{0,t}$ 's son igualadas a la tasa de descuento k, todas las  $r_{t,n}$ 's deberían ser también igualadas a k, basados en la ec. 13 tenemos:

$$NPV^* = \sum_{t=0}^{t^*} \frac{a_t}{(1+k)^t} + \frac{\sum_{t=t^*+1}^n a_t (1+k)^{n-t}}{(1+k)^n} \quad (14)$$

Queda claro que ésta fórmula NPV\* es equivalente a la fórmula NPV de la Ec. 1, por lo tanto NPV y NPV\* de los proyectos son equivalentes asumiendo certeza y todas las  $r_{0,t}$ 's equivalentes a k, en éste caso la utilización de cualquier criterio de valor presente es de no consecuencia para el uso del valor presente neto. Considerando que ésta igualdad entre NPV\* y NPV, uno podría asumir que TIR y ORR son también equivalentes bajo esas condiciones. Después de todo, TIR y ORR son las tasas de descuento para la cuál NPV y NPV\* respectivamente son iguales a cero. En contraste con NPV y TIR, sin embargo, NPV\* y ORR requiere suposiciones explícitas en cuanto a los costos de oportunidad asociados con los flujos internos de efectivo (en éste caso, todas las  $r_{0,t}$ 's son iguales a k).

La equivalencia algebraica de la Ec. 1 y 14 puede ser utilizada para ilustrar la diferencia entre TIR y ORR.

Asumiendo certeza y todas las  $r_{0,t's}$  iguales a  $k$ , la ORR de un proyecto es aquella tasa  $\delta$  para la cuál la siguiente ecuación es verdadera (notar que permanecen los costos de oportunidad asociados con los flujos internos de efectivo):

$$\sum_{t=0}^{t^*} \frac{a_t}{(1+k)^t} + \sum_{t=t^*+1}^n \frac{a_t(1+k)^{n-t}}{(1+\delta)^n} = 0 \quad (15)$$

En contraste, la TIR de un proyecto es aquella tasa  $\phi$  para la cuál se da la siguiente igualdad ( la ausencia de cualquier provisión explícita para los costos de oportunidad asociados con los flujos internos de efectivo requiere de que todas las  $k$ 's en la ec. 14 deban ser reemplazadas por  $\phi$  ):

$$\sum_{t=0}^{t^*} \frac{a_t}{(1+\phi)^t} + \sum_{t=t^*+1}^n \frac{a_t(1+\phi)^{n-t}}{(1+\phi)^n} = 0 \quad (16)$$

Cuando todas las  $r_{0,t's} = k$ , el criterio TIR provee las mismas decisiones de aceptación-rechazo que el criterio de valor presente neto. No obstante, la jerarquización de proyectos mutuamente excluyentes teniendo la misma escala pueden diferir dependiendo de si los proyectos son jerarquizados en base a sus valores presentes netos o en base a sus tasas internas de retorno.

Esta inconsistencia potencial de jerarquización persiste no importando como la escala del proyecto haya sido definida. Para entender mejor porque el valor presente neto y el criterio TIR proveen conflicto en la jerarquización de proyectos, muchos escritores han identificado condiciones en las cuales la TIR en la jerarquización de proyectos son consistentes con el criterio de "riqueza incremental" del valor presente neto. Proyectos con flujos internos de efectivo los cuales tienen la misma riqueza inicial y la misma TIR necesariamente tienen la misma riqueza terminal solo si existen los costos de oportunidad para "reinvertir" los flujos internos de efectivo a su común TIR. De ésta manera la jerarquización de proyectos en base a sus tasas internas de rendimiento ha sido mencionada para "implicar" una oportunidad para "reinvertir" a las respectivas tasas internas de rendimiento de los proyectos.

El criterio ORR siempre provee las mismas decisiones aceptación/rechazo, así como el criterio NPV\* ( ver prueba en apéndice D), para proyectos teniendo la misma escala, la jerarquización de proyectos, basados en ORR son siempre consistentes con NPV\* ( ver prueba en apéndice E ).

#### **4.6.2 Asumiendo Certidumbre y algunas $r_{0,t's}$ no igualadas a k.**

La relación entre  $r_{0,t's}$  y  $r_{t,n's}$  asumiendo certidumbre puede ser obtenida en la ec. 13 la cual puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(1 + r_{0,t})^t} = \frac{(1 + r_{t,n})^{n-t}}{(1 + k)^n} \quad (17)$$

Como es notado rápidamente cuando algunas  $r_{0,t's}$  no son iguales a k, la fórmula NPV apropiada es la presentada en la ecuación 7.

Basados en las relaciones presentadas en la ec. 17 entre las respectivas  $r_{0,t's}$  y  $r_{t,n's}$  en la ec. 7, ésta es equivalente a la fórmula NPV\* presentados en la ec. 10. De ésta manera asumiendo certeza, NPV de un proyecto y NPV\* son siempre equivalentes no importando si todas las  $r_{0,t's}$  son equivalentes a  $k$ .

La equidad entre NPV y NPV\* no es trasladable entre TIR y ORR. La TIR de un proyecto de inversión representa la tasa promedio por periodos de fondos ganados mientras se invirtió en el proyecto.

Sin embargo, los fondos requeridos por un proyecto no son necesariamente requeridos para la totalidad de horizonte de  $n$ -periodos. En el caso de proyectos de flujo internos de efectivo, algunos fondos son invertidos en el proyecto en menos de  $n$ -periodos.

De ésta manera la TIR de un proyecto con flujos internos de efectivo representa la tasa promedio de fondos invertidos para varias longitudes de tiempo dentro del horizonte de  $n$ -periodos. La aceptabilidad de un proyecto de flujos internos de efectivo no puede ser determinada por simple comparación de la TIR contra  $k$ , los costos de oportunidad de las firmas en  $n$ -periodos. En ausencia de la suposición de que las  $r_{0,t's}$  son iguales a  $k$ , el criterio TIR pueden no proveer las mismas decisiones de aceptación/rechazo como el criterio de valor presente neto.

En contraste, la ORR de un proyecto representa la tasa promedio periódica de ganancias desde el tiempo 0' al tiempo  $n$  sobre todos los fondos requeridos por el proyecto para cualquier periodo dentro del horizonte de  $n$ -periodos. Mientras invertimos en el proyecto esos fondos ganan la TIR del proyecto. Cuando esos fondos no son necesarios por el proyecto se asumen explícitamente como ganancias de las firmas a los costos de oportunidad. Por lo tanto la ORR de un proyecto es un promedio de las TIR's de los proyectos y las tasas externas de inversión proporcionadas.

Debido a que ORR representa una tasa promedio periódica de ganancias sobre fondos invertidos desde el tiempo 0 al tiempo  $n$ , puede ser apropiadamente comparada con los costos de oportunidad  $k$  para  $n$ -periodos de las firmas para determinar la aceptabilidad del proyecto.

#### 4.6.3 Asumiendo incertidumbre.

Donde el futuro de los flujos netos de efectivo no son conocidos con certeza, las tasas externas ( $k$ ,  $r_{0,t,s}$  y  $r_{t,n,s}$ ) son ajustadas al riesgo para reflejar tasas de ganancias sobre inversiones de riesgo comparable. Además, las relaciones presentadas en la ec. 13 entre las respectivas  $r_{0,t,s}$  y  $r_{t,n,s}$  no necesariamente obtenemos que NPV y NPV\* de los proyectos sean equivalentes. En ausencia de certidumbre, las decisiones de inversión basadas en el valor presente neto de los proyectos calculados usando las fórmulas NPV ( ecs. 1 y 7 ) pueden no maximizar el valor de la firma ya que esas formulas son inconsistentes con el criterio de "riqueza incremental" del valor presente neto.

Una relación que puede ser obtenida entre las respectivas  $r_{0,t,s}$  y  $r_{t,n,s}$  asumiendo incertidumbre es propuesto en la estructura literal por el término tasa de participación.

Esa relación puede ser representada de la siguiente manera donde  $\theta$  es referida como un premio de liquidación y es asumido que es mayor que cero y menor que  $k$ :

$$(1 + r_{0,t})^t (1 + r_{t,n})^{n-t} = (1 + (K - \theta))^n \quad (18)$$

Asumiendo ésta relación, la riqueza terminal  $W_n$  de un proyecto de inversión será siempre mayor o igual que cero y en un proyecto de financiamiento será menor o igual que cero ( ver prueba en apéndice B). El signo de la riqueza terminal  $W_n$  de un proyecto es critico porque la tasa de retorno total de un proyecto es indefinida si ésta riqueza terminal  $W_n$  tiene un "mal" signo.

Asumiendo incertidumbre y las relaciones indicadas en la ec. 18, es posible que todas las  $r_{0,t,s}$  y  $r_{t,n,s}$  sean menores que  $k$ . En éste caso, el NPV de los flujos internos de efectivo de un proyecto de inversión puede ser mayor que NPV\* porque NPV asume reinversiones a  $k$  (ec. 1) o asume  $r_{0,t}$  y  $r_{t,n}$  la totalidad "promedio geométrico" como  $k$  (ecs. 7 y 13). De la misma manera con la TIR implica suposiciones de una oportunidad para "reinvertir". La TIR produce una tasa de rendimiento mayor calculada para flujos internos de efectivo aceptables para proyectos de inversión aceptables que la ORR. Asumiendo incertidumbre, el uso de las formulas convensionales NPV asociada con el criterio TIR puede proveer una sistemática predisposición la cuál favorece a los proyectos de inversión con "pagos" inmediatos sobre la totalidad de "pagos" que son recibidos en un futuro más lejano.

#### 4.6.4 Una constante de costos de oportunidad para los flujos internos de efectivo.

Las definiciones de riqueza incremental y riqueza terminal y por lo tanto NPV\* Y ORR pueden ser simplificados asumiendo que todas las  $r_{0,t}$ s y  $r_{t,n}$ s ( $t = 1, 2, \dots, n-1$ ) son iguales a una tasa constante  $r$  la cuál puede o nó ser igual a  $k$ . Tomando ésta constante de costo de oportunidad para todos los flujos internos de efectivo, la riqueza inicial  $W_0$  y riqueza terminal  $W_n$  de un proyectos son definidas de la siguiente manera:

$$W_0 = \sum_{t=0}^{t^*} \frac{a_t}{(1+r)^t} \quad (19)$$

$$W_n = \sum_{t=t^*+1}^n a_t (1+r)^{n-t} \quad (20)$$

El NPV\* y ORR de un proyecto pueden entoces ser definidas de la siguiente manera:

$$NPV^* = \frac{\sum_{t=t^*+1}^n a_t (1+r)^{n-t}}{(1+k)^n} + \sum_{t=0}^{t^*} \frac{a_t}{(1+r)^t} \quad (21)$$



$$ORR = \frac{\sum_{t=t^*+1}^n a_t (1+r)^{n-t}}{\sum_{t=0}^{t^*} a_t (1+r)^{-t}} - 1.0 \quad (22)$$

Las únicas entradas requeridas por las ecs. 21 y 22 son los flujos netos de efectivo esperados, son una tasa de descuento  $k$  y, una constante de costo de oportunidad  $r$  para los flujos internos de efectivo. Tomando una tasa externa  $r$  como constante, la riqueza terminal  $W_n$  de un proyecto de inversión podrá ser positiva o igual a cero y en un proyecto de financiamiento podrá ser negativa ó igual a cero (ver prueba en apéndice C).

Si por casualidad,  $r$  y TIR son iguales ( ó una de éstas múltiples TIR's), la ORR de los proyectos pueden también igualarse a esa tasa. Si  $r$  es igual a la tasa de descuento  $k$ , los NPV\* de los proyectos pueden ser igualados a NPV.

Las ecuaciones 21 y 22 permiten hacer decisiones para elegir explicitidad en la constante de costo de oportunidad para los flujos internos de efectivo cuando se calcula el valor presente neto o tasa interna de rendimiento. Esas fórmulas de NPV\* y ORR son fácilmente modeladas en una hoja electrónica de computadora permitiendo observación de sensibilidad de NPV\* y ORR de proyectos independientemente de las varaciones de  $k$  o  $r$ . Está fuera de la realidad, por supuesto, al asumir que todas las  $r_{0,t's}$  y  $r_{t,n's}$  son iguales. La tasa sencilla  $r$  no puede representar la totalidad de las diferentes  $r_{0,t's}$  y  $r_{t,n's}$  que podrían ser encontradas en más escenarios del "mundo real". No obstante, las ecs. 21 y 22 son propuestas para realizar análisis de libertad para especificar tasas de financiamiento o inversión externas de  $k$  o TIR. Por ésto quien está dispuesto a tratar con la colocación de diferentes  $r_{0,t's}$  y  $n$  diferentes  $r_{t,n's}$ , NPV\* y ORR son definidas en las ecs. 10 y 12 las cuales tienen más mérito teórico.

#### **4.7 Ajuste de la ORR**

Una metodología utilizada para ajustar la Tasa de Retorno Total de un proyecto pequeño con la de un proyecto mayor es la siguiente:

$$\left[ \frac{W_{0A}}{W_{0B}} \right] ORR_A + \left[ \frac{W_{0B} - W_{0A}}{W_{0B}} \right] k = \text{ORR ajustada}$$

Donde:

$W_{0A}$  = Riqueza inicial del proyecto A

$W_{0B}$  = Riqueza inicial del proyecto B

$ORR_A$  = Tasa de Retorno Total del Proyecto A

$k$  = Costo de oportunidad asumida por las firmas.

#### **4.8 Ejemplo numérico.**

Muchos de los conceptos presentados en éste trabajo pueden ser ilustrados considerando los proyectos A y B los cuales son presentados en las tablas 1 y 2 respectivamente.

Es asumida una constante de costo de oportunidad de 9 por ciento por periodo ( $r = 0.09$ ) para los flujos internos de efectivo. Se asume también un costo de oportunidad por las firmas de 10 por ciento por periodo ( $k = 0.10$ ).

El proyecto A puede ser tanto un proyecto de financiamiento como un proyecto de inversión porque tiene valores  $p_t$  tanto positivos como negativos para  $t = 0, 1, 2$ . Cuando es analizado como un proyecto de inversión, el proyecto A es equivalente a un proyecto de doble flujo de efectivo que requiere entradas de \$ 1,000 al tiempo 0 y reembolsos de \$ 1,427.34 al tiempo 3. Como un proyecto de inversión, el proyecto A tiene un NPV\* de \$ 72.38 y un ORR de 12.59 por ciento y es por lo tanto aceptable.

Cuando es analizado como un proyecto de financiamiento, el proyecto A es equivalente a un proyecto de doble flujo de efectivo el cual provee \$ 284.40 al tiempo 0 con un intercambio de reembolso de \$ 236.00 al tiempo 3. El proyecto es también un proyecto de financiamiento aceptable obteniendo un NPV\* de \$ 107.09 y una ORR de - 6.03 por ciento.

El proyecto B puede ser solo un proyecto de inversión a partir de que todos sus valores  $p_{ts}$  para  $t = 0, 1, 2$  son negativos.

El proyecto B es equivalente a un proyecto de doble flujo de efectivo el cual requiere \$ 2,100 al tiempo 0 y retornos de \$ 2,911.58 al tiempo 3. Con éste NPV\* de 87.51 y una ORR de 11.51 por ciento, el proyecto B es un proyecto de inversión aceptable.

Si los proyectos A y B fueran comparados como proyectos de inversión mutuamente excluyentes, el proyecto B podría ser referido debido a que tienen el NPV\* mayor.

La diferencia en escala dentro entre esos dos proyectos evita que sus ORR's sean directamente comparables. La ORR del proyecto A de 12.59 por ciento es basada sobre una riqueza inicial ( $W_0$ ) de \$ 1,000, mientras que la ORR del proyecto B de 11.51 por ciento es basada sobre una riqueza inicial ( $W_0$ ) de \$ 2,100.

El Ajuste de medida para el proyecto A para la comparación con la ORR del proyecto B es de la siguiente manera:

$$\text{ORR ajustada} = \left[ \frac{1000}{2100} \right] .1259 + \left[ \frac{2100 - 1000}{2100} \right] .10 = 0.1123$$

Una vez que la ORR del proyecto es ajustada para diferencias en escala entre los dos proyectos, es claro que el proyecto B es preferible en términos de tasa de retorno así como en términos de valor presente neto. El ajuste de medida de la ORR provee la misma jerarquización de proyectos más no así el valor presente neto.

Tabla 1. proyecto A ( k = .10, r = .09 )

| t | a <sub>t</sub> | p <sub>t</sub> | FV(a <sub>t</sub> ) | $\sum_{i=t+1}^n FV(a_i)$ |
|---|----------------|----------------|---------------------|--------------------------|
| 0 | -1000.00       | -1000.00       | -1295.03            | 1427.34                  |
| 1 | 1400.00        | 284.40         | 1663.34             | -236.00                  |
| 2 | -400.00        | -52.27         | -436.00             | 200.00                   |
| 3 | 200.00         | 102.17         | 200.00              | 0.00                     |

Analizado como un proyecto de inversión t\* = 0, W<sub>0</sub> = -284.40, W<sub>n</sub> = -236.00

$$NPV^* = \frac{-236.00}{(1.10)^3} + (284.40) = \$107.09 \quad ORR = \left[ \frac{-236.00}{-284.40} \right]^{1/3} - 1.0 = -6.03 \%$$

Análisis convencional: NPV = \$92.41; TIR = 20.58 %

Tabla 2. Proyecto B ( k = .10, r = .09 )

| t | a <sub>t</sub> | p <sub>t</sub> | FV(a <sub>t</sub> ) | $\sum_{i=t+1}^n FV(a_i)$ |
|---|----------------|----------------|---------------------|--------------------------|
| 0 | -2100.00       | -2100.00       | -2719.56            | 2911.58                  |
| 1 | 1800.00        | -448.62        | 2138.58             | 773.00                   |
| 2 | -300.00        | -701.13        | -327.00             | 1100.00                  |
| 3 | 1100.00        | 148.27         | 1100.00             | 0.00                     |

Análizado como un proyecto de inversión: t\* = 0, W<sub>0</sub> = 2100.00, W<sub>n</sub> = 2911.58

$$NPV^* = \frac{2911.58}{(1.10)^3} + (-2100) = \$87.51 \quad ORR = \left[ \frac{2911.58}{2100.00} \right]^{1/3} - 1.0 = 11.51 \%$$

Análisis convencional : NPV = \$114.88; TIR = 13.68 %