# CAPITULO IV

## EL ESCALAMIENTO APLICADO AL DISEÑO DE PROCESOS QUIMICOS.

### 4.1 INTRODUCCION

Una de las actividades principales de la Ingeniería de Proceso, es el dimensionar el equipo involucrado. Equipo tal como: Reactores Químicos, columnas de destilación, columnas de absorción, etc. y para ello se pueden utilizar dos métodos generales.

1. Selección y diseño del equipo. Este método incluye la selección del equipo de fabricación estandar, así como aquel que se diseñe en base a correlaciones, ecuaciones, modelos, etc.

2. Escalamiento de datos piloto. Implica dimensionar el equipo mediante el uso de ecuaciones de escala que resultan al comparar un sistema industrial con un sistema piloto.

El escalamiento, es una técnica de diseño para definir un sistema grande a partir de uno pequeño y viceversa; es decir, de una planta piloto se obtienen los datos de diseño necesarios, que, a través de una técnica adecuada de escalamiento, sirven para definir la planta industrial, esto es:

Planta piloto → datos de diseño → escalamiento → planta industrial

También, de una planta industrial existente, se obtienen datos de diseño, que nos ayudan a definir una planta industrial de diferente capacidad. Así, Planta Industrial → datos de diseño → escalamiento → planta industrial de tamaño diferente.

Sin embargo, el escalamiento no es un método de simulación, no predice y no contesta a preguntas del tipo :

-- ¿Qué sucede si la razón de reflujo de una columna de destilación aumenta de 1.8 a 2.3 ?

-- ¿Qué sucede con la conversión de reactantes, si la temperatura en el reactor aumenta ó disminuye una cantidad X de grados?

Para contestar éste tipo de preguntas, se pueden seguir dos técnicas básicas.

a). <u>Simulación</u>, que implica el uso de modelos matemáticos que reproducen el comportamiento del sistema.

b). <u>Experimentar</u>, en un sistema "similar" al sistema en estudio. Esta experimentación se realiza en plantas piloto.

La <u>Planta piloto</u> ó modelo a escala, es una unidad pequeña que involucra todos los elementos principales del equipo industrial que se desea escalar. Es usada para definir la planta industrial, como también, la operabilidad de un proceso durante un largo tiempo. Pero, se ha argumentado mucho sobre ésto y se ha dicho que :

1. Retrasa la comercialización del proceso debído al tiempo de su construcción y operación.

2. Cuestan mucho dinero.
3. Como generadora de información debe competir con :

   a) Búsquedas bibliográficas, que son más baratas.
   b) Simulaciones del proceso que son más baratas.
   c) Estudios a nivel de banco ó laboratorios.
   d) Pruebas cortas en plantas industriales.

Por otro lado, se argumenta que son necesarias para :

a) Estudiar los efectos del proceso a largo plazo.
b) Determinar factores relacionados con la calidad del producto.
c) Obtener el producto necesario para desarrollar un estudio de mercado.
d) Estudiar problemas de escalamiento.
e) Proporcionar una demostración convincente para los usuarios de la tecnología.

También se argumenta que :

1. La razón de ser de las plantas industriales, es producir y no hacer en ellas campañas muy largas de experimentación ya que a la larga, se pierde dinero.

2. Las plantas industriales no están (ni deben estar) instrumentadas para obtener todos los datos para hacer un buen análisis y diagnóstico del experimento.

El escalamiento se basa precisamente en el principio de similaridad, que establece que "La configuración de un sistema físico está determinado por relaciones entre magnitudes del sistema". En un proceso químico, esas relaciones son :

- Proporciones geométricas
- Gradientes de velocidad
- Gradientes de temperatura
- Gradientes de concentración.

La aplicación del principio de similaridad implica que en el sistema a diseñar, los fenómenos que ocurren en el sistema piloto, sean de la misma magnitud que en el sistema industrial y, en éste punto se pueden seguir dos caminos:

por un lado se trata de identificar los fenómenos que afectan al sistema

↓

para así obtener los grupos adimensionales que caracterizan al sistema

↓

para posteriormente eliminar los grupos adimensionales que no afectan

↓

Estos grupos adimensionales nos pueden servir para obtener las relaciones de escalamiento

↓

ó bien para obtener una correlación entre los grupos adimensionales, con la cual se puede también obtener la relación de escalamiento.

Por otro lado se pueden obtener las ecuaciones ó modelos que reproducen el comprtamiento del sistema.

↓

Para así obtener ecuaciones de diseño.

↓

con las cuales se pueden

↓

obtener las relaciones de escalamiento.

grupos adimensionales →

correlaciones. →

Para obtener las relaciones de escalamiento, se puede dividir la ecuación aplicada al sistema industrial por la misma ecuación paro aplicada al sistema piloto. De modo que

$$\frac{\text{Ecuación industrial}}{\text{Ecuación piloto}} = 1 = \lambda_{\text{ecuación}} \qquad \text{Ec. 4.1.1}$$

ésta ecuación, puede ser un grupo adimensional, una correlación ó bien la ecuación de diseño. Con ésta ecuación, pueden obtenerse las ecuaciones necesarias para definir el sistema industrial. Dentro de las ecuaciones más usuales de escalamiento se pueden mencionar las siguientes :

1. Ecuaciones de similaridad, que resultan de la igualdad de grupos adimensionales. (Véase Capítulo III)

2. Ecuaciones de Extrapolación, que resultan de la igualdad de correlaciones. (Véase Capítulo I)

3. Ecuaciones de diseño, que resultan de la igualdad de ecuaciones de diseño. Y,

4. Las ecuaciones que resultan de la combinación de ecuaciones de escalamiento con técnicas de diseño tradicional.

## 4.2 EJEMPLOS DE ECUACIONES DE ESCALA.

4.2.1 En el caso de ecuaciones de similaridad, éstas son muy variadas y entre ellas se obtienen algunos grupos adimensionales típicos como los que se enuncian enseguida.

| Fenómeno | | Grupos adimensionales que afectan. |
|---|---|---|
| Momentum | | $\rho V L/\mu$ ; $V^2/Lg$ ; $\rho V^2 L/\sigma$ |
| Calor: | a) conducción | $\rho c_p L^2/kt$ |
| | b) convección libre | $c_p \mu/k$ ; $\beta g \Delta t L^3 \rho^2/\mu^2$ |

c) convección forzada $c_p\mu/k$ ; $\rho v L/\mu$

d) radiación $\rho c_p v/\sigma e t^4$ ; $t_\alpha/t_r$ ; $\rho c_p v L/k$

Masa : $\rho v L/\mu$ ; $\mu/\rho D$

Reacción Química $R_A \Delta H_R L/\rho c_p v t$ ; $c_p \mu/k$ ; $L v \rho/\mu$

a) calor $\beta g \Delta t L^3 \rho^2/\mu^2$ ; $\rho c_p v/\sigma e t^3$ ; $t_\alpha/t_r$

b) Masa (convección forzada) $\mu/\rho D$ ; $R_A L^2/D C_A$ ; $L v \rho/\mu$

c) Momentum $L v \rho/\mu$

con las cuales se pueden obtener diferentes ecuaciones de escala, dependiendo del fenómeno que afecte al equipo que se desea escalar. Por ejemplo, si afecta el fenómeno de Momentum. Los grupos adimensionales son :

| | | |
|---|---|---|
| Reynolds = | $\rho v L/\mu$ | Ec. 4.2.1 |
| Froude = | $v^2/L g$ | Ec. 4.2.2 |
| Weber= | $\rho v^2 L/\sigma$ | Ec. 4.2.3 |

y las ecuaciones de escala se obtienen igualando el número de Reynolds del sistema piloto con el numero de Reynolds del sistema industrial. De modo que:

$$\lambda_{Reynolds} = 1 \quad \text{ó bien} \quad R_{esm} = R_{efs}. \qquad \text{Ec. 4.2.4}$$

y también podemos hacer que :

$$\lambda_\rho \lambda_{v^2} \lambda_L/\lambda_\mu = 1 \qquad \text{Ec. 4.2.5}$$

y en forma similar se procede con los otros números adimensionales que afecten.

4.2.2 <u>Ecuaciones de escala por extrapolación.</u> Para éstas es necesario contar con relaciones como la del tipo mostrada enseguida,

$$\frac{hL}{k} = K\left[\frac{L v \rho}{\mu}\right]^{x}\left[\frac{C_p \mu}{k}\right]^{y} \qquad \text{Ec. 4.2.6}$$

donde se observa una correlación típica para el coeficiente de película de transferencia de calor. Esta correlación (4.2.6) nos sirve para obtener ecuaciones del tipo :

$$\frac{\lambda_h \lambda_L}{\lambda_k} = \left[\frac{\lambda_L \lambda_v \lambda_\rho}{\lambda_\mu}\right]^{x}\left[\frac{\lambda_{C_p} \lambda_\mu}{\lambda_k}\right]^{y} \qquad \text{Ec. 4.2.7}$$

la cual relaciona el sistema piloto con el sistema industrial.

4.2.3 En el caso de ecuaciones de escala obtenídas por ecuaciones de diseño, es necesario obtener ecuaciones de escala del tipo

$$q = U A \Delta t_m \qquad \text{Ec. 4.2.8}$$

que es la ecuación de diseño de un intercambiador de calor y nos sirve para obtener ecuaciones de escala del tipo

$$\lambda_q = \lambda_U \lambda_A \lambda_{\Delta t_m} \qquad \text{Ec. 4.2.9}$$

4.2.4 En cuanto a las ecuaciones que resultan de combinar ecuaciones de escala con técnicas tradicionales de diseño, solo es necesario jugar con éstas comcombinaciones, pero sin dejar de obtener información del sistema piloto.

## 4.3 ESCALAMIENTO POR SIMILARIDAD.

Para visualizar mejor éste método, se ejemplifica el escalamiento de - un reactor hipotético, para lo cual se procede de la siguiente manera :

I. Obtenemos primero, la ecuación general de escalamiento. Para éste debemos conocer los principales fenómenos que afectan al sistema reactivo. En nuestro caso, esos fenómenos son Momentum, Calor y Masa; por lo tanto, los grupos adimensionales involucrados en el sistema reactivo son los que describen precisamente los fenómenos anotados en la sección 4.2. y por supuesto, con reacción química, como se muestra en la ecuación.

$$\frac{R_A L}{C_A V} = f \left[ \frac{\Delta H_R C_A}{\rho C_p t} ; \frac{C_p \mu}{k} ; \frac{L v \rho}{\mu} ; \frac{\beta g \Delta t L^3 \rho^2}{\mu^2} ; \frac{t_\alpha}{t_r} ; \frac{\mu}{\rho D} ; \frac{\Delta H_R C_A V}{q_p} \right] \qquad \text{Ec. 4.3.1}$$

ó bien :

$$\frac{R_A L}{C_A V} = f \left[ \begin{matrix}\text{grupo de} \\ \text{producción} \\ \text{de calor}\end{matrix} ; P_r ; R_e, G_r ; J_H ; \begin{matrix}\text{Número de} \\ \text{radiación}\end{matrix} ; S_c ; \begin{matrix}\text{Pérdidas} \\ \text{de calor}\end{matrix} \right]$$

De acuerdo a la ecuación 4.3.1, se tienen en orden respectivo, el grupo de reacción química, el grupo de producción de calor, número de Prandtl, número de Reynolds, número de Grashoff, número de Thring (de radiación múltiple), el número de radiación, número de Schmidt y finalmente el grupo que involucra las pérdidas ó ganancias de calor hacia los alrededores. Todos ellos caracterizan un reactor químico y, una vez que se tiene la ecuación general de escalamiento, conviene simplificarla y para ello, tenemos lo siguiente :

II. Simplificaciones. En particular, para un sistema reactivo se tiene que :

A) Se puede suponer que la convección natural es despreciable, con lo cual eliminamos el número de Grashoff de la ecuación general de escalamiento.

b) Se puede considerar que las propiedades físicas y termodinámicas tienen el mismo valor en el sistema piloto y el industrial y con ello eliminamos los números de Prandtl y de Shmidt.

c) Podemos también considerar que dentro del reactor el efecto de la radiación es despreciable, con lo cual se eliminarán los grupos adimensionales de radiación y de Thring.

Incorporando las consideraciones anteriores, simplificamos la ecuación general de escalamiento, que se reduce como se muestra en la ecuación 4.3.2, que ahora solo involucra los grupos adimensionales de reacción química, producción de calor, Reynolds y pérdidas ó ganancias de calor del reactor hacia los alrededores: de modo que

$$\frac{K_A L}{C_A V} = \frac{K_A \theta}{C_A} = f\left[\frac{\Delta H_R C_A}{\rho C_p t} ; \frac{L v \rho}{\mu} ; \frac{\Delta H_R C_A V}{q_p}\right] \qquad \text{Ec. 4.3.2}$$

III. Antes de continuar con el ejemplo, veamos algunas reglas generales para el escalamiento de reactores químicos. Para ambos reactores se tiene que :

1. Las concentracciones iniciales ó de entrada del reactor deben ser iguales, es decir :

$$\lambda_{C_i^o} = 1 \qquad \text{Ec. 4.3.3}$$

2. En ambos reactores, la calidad del producto debe ser la misma.

$$\lambda_{C_i} = 1 \qquad \text{Ec. 4.3.4}$$

3. En ambos reactores, la temperatura de operación ya sea constante ó variable, debe ser la misma.

$$\lambda_T = 1 \qquad \text{Ec. 4.3.5}$$

4. También en los dos reactores, la velocidad de reacción debe ser igual, ésto es.

$$\lambda_{R_L} = 1 \qquad \text{Ec. 4.3.6}$$

Para el caso de un sistema homogéneo, la velocidad de reacción es función de la temperatura y la concentración. Por lo tanto, la igualdad de velocidades de reacción, implica una igualdad de temperaturas y concentraciones.

Para el caso de un sistema heterogéneo como en un sistema sólido-gas, se pueden tener los siguientes pasos controlantes :

a). Primero; un control de reacción química. Para éste caso, la igualdad de velocidades de reacción implica una igualdad de temperatura y concentraciones.

b). Segundo; un control de transferencia de masa interfacial, que es la velocidad de transferencia de masa, es función de la concentración, del número de Reynolds, del diámetro de la partícula y de las propiedades físicas y termodinámicas de las sustancias involucradas. Por lo tanto, la igualdad de velocidades de reacción implica que :

$\lambda_{C_L} = 1$ ; igualdad de concentraciones — Ec. 4.3.7

$\lambda_{Re} = 1$ ; igualdad del No.de Reynolds — Ec. 4.3.8

$\lambda_{D_p} = 1$ ; igualdad de diámetro de partícula — Ec. 4.3.9

e igualdad de propiedades físicas y termodinámicas.

c). Tercero; se puede tener control de transferencia interior de masa. Para éste caso, la velocidad interior de difusión, es función de la temperatura, la concentración y el factor de efectividad, el cual depende de las características geométricas de la partícula sólida. Por lo tanto, la igualdad de velocidades de reacción implica que :

$\lambda_T = 1$ ; igualdad de temperaturas . Ec. 4.3.10

$\lambda_{C_L} = 1$ ; igualdad de concentraciones Ec. 4.3.11

e igualdad de partículas sólidas, que implica usar partículas iguales tanto en el reactor piloto como en el industrial.

d). Cuarto; las propiedades físicas y termodinámicas, deben se iguales. Es decir, se debe tener :

$\lambda_\rho = 1$ ; igualdad de densidades Ec. 4.3.12

$\lambda_\mu = 1$ ; igualdad de viscosidades Ec. 4.3.13

$\lambda_{C_p} = 1$ ; igualdad de capacidades caloríficas Ec. 4.3.14

y en general, la igualdad de algunas propiedades físicas. Esto es:

$\lambda_L = 1$ Ec. 4.3.15

e). Por último, las no-idealidades en el reactor industrial deben ser menores ó cuando mucho iguales a las que se tienen en el sistema piloto. Es decir :

$\lambda$ no-idealidades $\leq 1$ Ec. 4.3.16

## IV. Pasos para el escalamiento del reactor.

En el sistema piloto se deben conocer.

En el sistema industrial se deben conocer.

$$\left.\begin{matrix} C_L^{\circ} \\ C_L \\ T \\ \theta \\ L \\ Q \\ q_p \end{matrix}\right\} \frac{R_A \theta}{C_A} ; \frac{\Delta H_R C_A}{\rho C_p t} ; \frac{L V \rho}{\mu} ; \frac{\Delta H_R C_A V}{q_p} \left\{\begin{matrix} C_L^{\circ} \\ C_L \\ T \\ Q \end{matrix}\right.$$

Primero debemos obtener las ecuaciones de escala:

A partir del grupo de reacción química $R_A\theta/C_A$ se obtiene la ecuación que relaciona $R_A$, $\theta$, $C_A$. Así :

$$\lambda_{R_A} \lambda_{\theta} = \lambda_{C_A} \qquad \text{Ec. 4.3.17}$$

pero debído a que las $R_L$ son iguales, así como las concentraciones, entonces la ecuación de escala se reduce a :

$$\lambda_{\theta} = 1 \qquad \text{Ec. 4.3.18}$$

que implica una igualada de $\theta$ entre el sistema piloto y el industrial. Ahora bien, como $\theta = V_R/Q$ , es posible obtener la ecuación.

$$\lambda_Q = \lambda_{V_R} = \lambda_L^3 \qquad \text{Ec. 4.3.19}$$

de la cual se obtiene el factor de escalamiento para las dimensiones del reactor, ésto es :

$$\lambda_L = \lambda_Q^{1/3} \qquad \text{Ec. 4.3.20}$$

también a partir del grupo de calor se desprende que las temperaturas deben ser iguales. $\lambda_T = 1$. Esta igualdad es necesaria para que las velocidades de reacción sean iguales a partir del número de Reynolds, lo que nos permite obtener la ecuación que relaciona la longitud característica con la velocidad, la densidad y la viscosidad

$$\lambda_L \lambda_v \lambda_\rho = \lambda_\mu \qquad \text{Ec. 4.3.21}$$

que al considerar que las propiedades físicas entre el sistema piloto y el industrial son iguales, ésta se reduce a

$$\lambda_v = \lambda_L^{-1}$$

ó bien Ec. 4.3.22

$$\lambda_L = \lambda_Q$$

Como puede observarse, éste resultado es compatible con el grupo de reacción química (Ec.4.3.20), por lo cual se hace necesario usar la ecuación

$$\lambda_L = \lambda_Q^{1/3}$$

lo que significa que se toma como válido el resultado de la igualdad de tiempos de residencia, que hace que el número de Reynolds del sistema industrial sea mayor que el del sistema piloto tal como lo muestra la ecuación

$$\lambda_{Re} = \lambda_L^2 \qquad \text{Ec. 4.3.23}$$

disminuyendo por lo tanto las no idealidades en el reactor industrial.

Del grupo de pérdidas ó ganancias de calor se obtiene la ecuación

$$\lambda_{Q_p} = \lambda_v = \lambda_L \qquad \text{Ec. 4.3.24}$$

que nos permite escalar las pérdidas de calor. Y, del escalamiento geométrico, es posible obtener la ecuación de escala para las dimensiones del reactor. Esto es;

$$\lambda_{\text{magnitudes}} = \lambda_L \qquad \text{Ec. 4.3.25}$$

En resumen, los resultados obtenídos son :

| | |
|---|---|
| 1.- Igualdad de tiempos de residencia | $\lambda_\theta = 1$ |
| 2.- Factor de escala | $\lambda_L = \lambda_Q^{1/3}$ |
| 3.- Número de Reynolds | $\lambda_{Re} = 1$ |
| 4.- Igualdad de temperaturas | $\lambda_T = 1$ |
| 5.- Escalamiento geométrico; $\lambda_{\text{magnitudes}}$ | $= \lambda_L$ |
| 6.- Pérdidas de calor | $\lambda_{q_p} = \lambda_L$ |
| 7.- No idealidades; $\lambda_{\text{no idealidades}} < 1$ | |

## 4.4 ESCALAMIENTO DE UN REACTOR.

Para llevar a cabo el ejemplo de escalamiento de un reactor, supondremos que se tiene una unidad de pirólisis de petróleo que consiste en dos secciones en serie, la primera consiste de 58 tubos de $\emptyset$ = 3 pulgadas de diametro - interno y 25 pies de longitud. Y la segunda consiste de 68 tubos de 2 pulgadas de diametro interno y 25 pies de longitud. Véase la Fig. 4.4.1

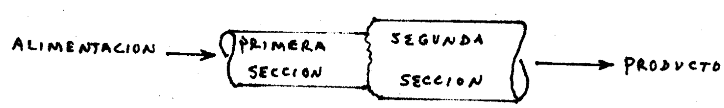


Fig. 4.4.1 Reactor hipotético.

Se alimenta a la unidad 2,500 barriles de petróleo por día, a una temperatura de 300 $^oF$ y se desea construir un modelo a escala que maneje 15 barriles por día y que sea capaz de reproducir el comportamiento del reactor industrial.

Como posible solución podemos suponer que el modelo consistirá de un solo tubo con dos diámetros diferentes $D_1$ y $D_2$ pero de igual longitud para cada diámetro véase la Fig. 4.4.2

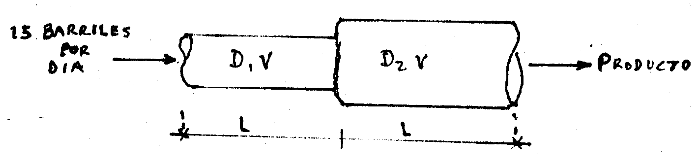


Fig. 4.4.2 Reactor con diámetros distintos pero igual longitud.

Donde las incógnitas son $D_1$ , $D_2$ y L, para éste caso, y de acuerdo a lo visto anteriormente, las ecuaciones de escala son :

1.- La primera ecuación de escala se obtiene a través de la igualdad de tiempos de residencia que a su vez implica que la relación de flujos promedio en el reactor es igual a la relación de flujos promedio en el reactor es igual a la relación de volúmenes, como se muestra enseguida,

$$\lambda_Q = 1 \qquad \text{ó bien} \qquad \lambda_Q = \lambda_V \qquad \text{Ec. 4.4.1}$$

2.- La segunda ecuación de escala se obtiene de la relación en los flujos de alimentación, de modo que,

$$\lambda_{\omega_0} = \frac{15}{2500} = \lambda_{Q_0} \qquad \text{Ec. 4.4.2.}$$

pero la relación de flujos de alimentación $\lambda_{Q_0}$ y la relación de flujos promedio $\lambda_Q$ serán iguales entre sí sólo cuando las temperaturas y las presiones sean iguales en puntos equivalentes en forma geométrica en ambos reactores. Para ello, la igualdad de temperatura ( $\lambda_T = 1$ ) es posible lograrla mediante un buen diseño ó escalamiento de equipo de transferencia de calor. Y, la igualdad de presiones ( $\lambda_P = 1$ ), solo se puede lograr si la presión ( $\Delta P$ ) entre puntos geométricamente equivalentes, en ambos reactores sea $\lambda_{\Delta P} = 1$, lo que nos conduce a

3.- La tercera relación de escala resulta de la igualdad de caída de presión, es decir

$$\lambda_{\Delta P} = 1 \qquad \text{Ec. 4.4.3}$$

Una ecuación adecuada para el modelo de caída de presión en un tubo, es por ejemplo la ecuación (2)

$$\Delta P = \frac{4 f L \rho}{2 D} \left( V_{prom} \right)^2 = \frac{32 f L w^2}{\pi^2 \rho D^5} \qquad \text{Ec. 4.4.4}$$

También podemos usar un modelo adecuado para el factor de fricción, como la ecuación que involucra el número de Reynolds

$$f = \frac{0.0791}{(R_e)^{1/4}} \qquad \text{Ec. 4.4.5}$$

que es la ecuación de Blasius (2) para determinar el factor de fricción, usada en flujo turbulento con $2.1 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^5$. Y,

$$Re = \frac{D V_{prom} \rho}{\mu} = \frac{4 w}{\pi D \mu} \qquad \text{Ec. 4.4.6}$$

siendo posible obtener la ecuación de escalamiento; para ello, podemos usar el modelo para la caída de presión (Ec. 4.4.4), con la que se obtendrá la relación de caída de presión entre el sistema piloto y el industrial. De modo que,

$$\lambda_{\Delta P} = 1 = \frac{\lambda_f \lambda_L \lambda_\omega^2}{\lambda_D^5} \qquad \text{Ec. 4.4.7}$$

Y, usando el modelo para el factor de fricción se puede relacionar éste con el número de Reynolds. Así,

$$\lambda_f = \lambda_{Re}^{-1/4} \qquad \text{Ec. 4.4.8}$$

y

$$\lambda_{Re} = \frac{\lambda_\omega}{\lambda_D} \qquad \text{Ec. 4.4.9}$$

Combinando las ecuaciones de escala para caída de presión con la del factor de fricción (Ec.4.4.8) y la del numero de Reynolds (Ec.4.4.9), se obtiene la ecuación de escala que nos garantiza la igualdad de caída de presión en puntos equivalentes. De modo que,

$$\lambda_L \lambda_\omega^{1.75} = \lambda_D^{4.75} \qquad \text{Ec. 4.4.10}$$

Con todo ésto que se ha visto, se puede atacar ya el problema y llegar al menos a una solución segura.

## 4.5 SOLUCION AL PROBLEMA.

El primer paso de la solución es suponer una relación entre los diámetros $D_1$ y $D_2$ . Por ejemplo, podemos suponer que

$$\lambda_{\text{área de la primera sección}} = \lambda_{\text{área de la segunda sección}} \qquad \text{Ec. 4.5.1}$$

el objetivo de ésta relación es mantener proporcionalmente la misma área de flujo entre el sistema piloto y el sistema industrial, con lo cual se llega a:

$$\frac{\dfrac{\pi D_1^2}{4}}{(58)\left[\pi(2)^2/4\right]} = \frac{\dfrac{\pi D_2^2}{4}}{(68)\left[\pi(3)^2/4\right]} \qquad \text{Ec. 4.5.2}$$

que al simplificarse queda como

$$D_1 = 0.6157 \; D_2 \qquad \text{Ec. 4.5.3}$$

El segundo paso de la solución implica combinar las ecuaciones de escala; es decir, combinar la ecuación que resultó de la igualdad de caída de presión

$$\lambda_L \, \lambda_w^{1.75} = \lambda_D^{4.75}$$

ó bien

$$\frac{L}{25} = \left[\frac{15}{2500/58}\right]^{1.75} = \left[\frac{D_1}{2}\right]^{4.75} \qquad \text{Ecs. 4.5.4}$$

ó bien

$$L = 5.892 \; D_1^{4.75}$$

que relaciona la longitud del reactor con el diámetro del mismo. Esta ecuación podemos combinarla ahora con la ecuación de escala que resultó al relacionar los diámetros (Véase ecuación 4.5.3). Las ecuaciones 4.5.3 y 4.5.4, se deben combinar con la ecuación que resulta de igualar los tiempos de residencia

$$\lambda_V = \lambda_Q = \lambda_{Q_0} = 15/2500 \qquad \text{Ec. 4.5.5}$$

ó bien

$$\frac{15}{2500} = \frac{\text{volumen del reactor piloto}}{\text{volumen del reactor industrial}} \qquad \text{Ec. 4.5.6}$$

la cual puede simplificarse así

$$\frac{15}{2500} = \frac{\dfrac{\pi D_1^2}{4} L + \dfrac{\pi D_2^2}{4} L}{\left[(58)(\pi/4)(2)^2(25)\right] + \left[(68)(\pi/4)(3)^2(25)\right]}$$

ó bien $(D_1^2 + D_2^2)L = 126.6$

que relaciona los diámetros $D_1$ y $D_2$ con la longitud L del reactor.

Al combinar algunas ecuaciones anteriores, podemos obtener los valores numéricos para éstas incógnitas, como se muestra enseguida.

Sabemos que

$\lambda_V = \lambda_Q$ pero, $\lambda_L = \lambda_Q^{1/3}$ entonces $\lambda_Q = \lambda_L^3$

Sustituyendo ésta igualdad en $\lambda_V = \lambda_Q$ tendremos

$$\lambda_V = \lambda_L^3$$

El volumen de tubos puede obtenerse al multiplicar el área transversal de flujo por la longitud del tubo.

Volumen = Area transversal X longitud

$$V = A \times L$$

$$\text{Area} = \pi D^2/4$$

$$\therefore \text{Vol.} = \frac{\pi D^2 L}{4}$$

Entonces

$$\frac{\frac{\pi D_1^2 L_1}{4}}{\frac{\pi D_2^2 L_2}{4}} = \frac{L_1^3}{L_2^3}$$

llegando al despejar a la ecuación

$$\left[ \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 L_2^2 \right]^{1/2} = L_1 \qquad \text{Ec. 4.5.7}$$

pero vimos que $D_1 = 0.6157\ D_2$ ó bien $D_1/D_2 = 0.6157$ y $L_2 = 25$ pies, que sustituídos en la ecuación 4.5.7 se llega a :

$D_2 = 2.44$ pulgadas

obteniendo los siguíentes resultados :

$D_1 = 1.504$ pulgadas
$D_2 = 2.44$ pulgadas
$L = 15.39$ pies

Enseguida podemos preguntarnos si nos gusta éste reactor; y, una posible respuesta puede ser que el reactor está un poco grande. Otra posible solución podría ser aumentar el numero de tubos, lo que nos conduce a suponer por ejemplo que el modelo consiste de 10 tubos en cada sección y para solucionar el problema se puede seguir el procedimiento anterior, de tal manera que :

1. Suponemos una relación entre los diámetros $D_1$ y $D_2$, por ejem.

$$D_1 = 0.6157 \; D_2$$

2. Combinamos las ecuaciones de escala, que resultan de:

a) Primero, la igualdad de caída de presión, tal que:

$$L = 331.34 \; (D_1)^{4.75}$$

b) Segundo, sustituir la relación entre $D_1$ y $D_2$

$$D_1 = 0.6157 \; D_2$$

c) Tercero, la igualdad de tiempos de residencia

$$(D_1^2 + D_2^2) \; L = 12.66$$

De modo que se obtiene un reactor con las siguientes características

$D_1 = 0.47$ pulgadas
$D_2 = 0.77$ pulgadas
$L = 9.18$ pies

que tiene 10 tubos en cada sección y, así sucesivamente podríamos hacer $m$ iteraciones con $n$ arreglos, hasta llegar a un diseño que sea satisfactorio tanto en lo técnico como en lo económico. Para ello, podemos hacer uso de computadoras que nos reducen el tiempo de trabajo y nos permiten con ello simular perfectamente nuestro diseño del modelo. hasta llegar a una solución que satisfaga -- nuestras necesidades.