ELEMENTO FINITO

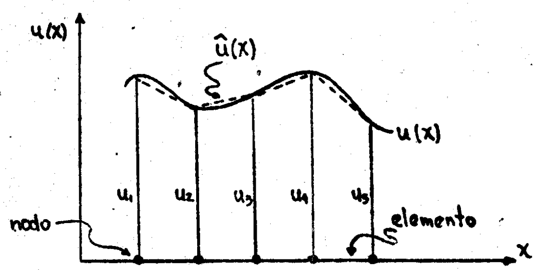
APLICACION PARA LOS ESTADOS UNIDIMENSIONAL Y BIDIMENSIONAL.

ELEMENTOS FINITOS PARA EL ESTADO UNIDIMENSIONAL.

FUNDAMENTOS.

El uso de este metodo esta basado en el proceso de discretizacion de un continuo en pequenos segmentos conocidos como elementos.

Enseguida proponemos una funcion solucion para cada uno de los elementos para obtener una funcion global mediante la union de tales funciones elementales.



Si para cualquier elemento del continuo proponemos una variacion lineal para la funcion u(x), tendremos:

$$\bar{u}(x)^e = a + bx \tag{23}$$

que satisfacera: $\bar{u}(x_i) = \bar{u}_i$ y

$$\bar{u}(x_{i+1}) = \bar{u}_{i+1}$$

por lo cual:

$$u_i = a + bx_i \tag{24}$$
$$u_{i+1} = a + bx_{i+1} \tag{25}$$

Resolviendo para <a> y <b> tendremos:

$$a = \frac{x_{i+1} u_i - x_i u_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \tag{26}$$

$$b = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{27}$$

Sustituyendo las ecuaciones (26) y (27) en la ecuacion (23) tenemos:

$$\bar{u}(x)^e = \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right) u_i + \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) u_{i+1} \tag{28}$$

siendo valido solamente para $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, es decir, el rango del elemento <e>.

Si unimos las ecuaciones (28) de cada elemento, tendremos la funcion general solucion, que seria:

$$\hat{u}(x) = \bigcup_{e=1}^{E} \bar{u}(x)^e \tag{29}$$

donde E sera el numero total de elementos en que hemos subdividido al continuo. Tambien, a la ecuacion (28) la podemos expresar como:

$$\bar{u}(x)^e = \omega_1^e u_i + \omega_2^e u_{i+1} \tag{30}$$

donde:

$$\omega_1^e = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \quad y \quad \omega_2^e = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Sustituyendo la ecuacion (30) en la ecuacion (29) obtenemos:

$$\hat{u}(x) = \left[\omega_1^1 u_1 + \omega_2^1 u_2\right] \cup \left[\omega_1^2 u_2 + \omega_2^2 u_3\right] \cup \left[\omega_1^3 u_3 + \omega_2^3 u_4\right] \cdots$$

$$\hat{u}(x) = \bigcup_{e=1}^{E} \left[\omega_1^e u_e + \omega_2^e u_{e+1}\right] \tag{31}$$

El metodo de Galerkin considera la introduccion de una funcion global Φ_i , definida por la union de los terminos que poseen el mismo factor u_i . Asi:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \omega_1^1 && \text{para } u_1 \\
\Phi_2 &= [\omega_2^1] \cup [\omega_1^2] && \text{para } u_2 \\
\Phi_3 &= [\omega_2^2] \cup [\omega_1^3] && \text{para } u_3 \\
&\vdots \\
\Phi_i &= [\omega_2^{i-1}] \cup [\omega_1^i] && \text{para } u_i \\
&\vdots \\
\Phi_n &= \omega_2^{n-1} && \text{para } u_n
\end{aligned} \tag{32}$$

APLICACION PARA EL CASO ESTABLECIDO.

Consideremos la ecuacion general de flujo:

$$T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - S \frac{\partial h}{\partial t} - W - N = 0 \qquad (33)$$

donde:

T_x, T_y = coeficiente de transmisividad. (L^2/T)
$\partial^2 h/\partial x^2, \partial^2 h/\partial y^2$ = variacion de la carga en el sentido x,y. (1/L)
S = coeficiente de almacenamiento. (ADIM)
$\partial h/\partial t$ = variacion con respecto al tiempo. (L/T)
N = gasto de entrada o salida al sistema sobre elementos. ($L^3/T * 1/L^2$)
W = gasto de entrada o salida al sistema sobre nodos. ($L^3/T * 1/L^2$)

Para el caso de flujo unidimensional no tenemos variacion con respecto a uno de los ejes principales, por ejemplo: $\partial^2 h/\partial y^2 = 0$ ademas, para el caso establecido, la variacion con respecto al -- tiempo desaparece, $\partial h/\partial t = 0$ por lo que la ecuacion (33) se transforma en:

$$T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - W - N = 0 \qquad (34)$$

Para resolver la ecuacion (34), aplicamos la funcion de prueba $\hat{u}(x)$ de la ecuacion (31) y dandole peso con la funcion Φ_i de la ecuacion (32), al minimizar el residuo obtenemos:

$$\int_{X_1}^{X_N} \left(T_x \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - W - N \right) \Phi_i \, dx = 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots N$$

$$= T_x \int_{X_1}^{X_N} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \Phi_i \, dx - N \int_{X_1}^{X_N} \Phi_i \, dx - W = 0 \qquad (35)$$

Integrando por partes para el primer termino de la ecuacion (35), tenemos:

$$r = \Phi_i \qquad dr = \frac{d\Phi_i}{dx} dx$$

$$ds = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} dx \qquad s = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$$

$$\int_a^b r \, ds = sr \Big|_a^b - \int_a^b s \, dr$$

$$\int_{X_1}^{X_N} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \Phi_i \, dx = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Phi_i \Big|_{X_1}^{X_N} - \int_{X_1}^{X_N} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} dx \qquad (36)$$

Con la ecuacion (36) en sustitucion del primer termino en la ecuacion (35), se obtiene:

$$T_x \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Phi_i \Big|_{x_1}^{x_N} - T_x \int_{x_1}^{x_N} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \, dx - N_i \int_{x_1}^{x_N} \Phi_i \, dx - W_i = 0 \tag{37}$$

para i=1,2,....,n

De las ecuaciones (31) y (32) podemos decir que:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \left[\frac{\partial w_1^1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial w_2^1}{\partial x} w_2 \right] \cup \left[\frac{\partial w_1^2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial w_2^2}{\partial x} u_3 \right] \cup \left[\frac{\partial w_1^3}{\partial x} u_3 + \frac{\partial w_2^3}{\partial x} u_4 \right] \cup \ldots$$

para i=1,2,....,n

y:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \left[\frac{\partial w_2^{i-1}}{\partial x} \right] \cup \left[\frac{\partial w_1^i}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial w_1^1}{\partial x} \qquad \frac{\partial \Phi_N}{\partial x} = \frac{\partial w_2^{N-1}}{\partial x} \tag{38}$$

para i=1,2,....,n

De las ecuaciones (30) y (38) tenemos:

$$w_1^e = \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} \qquad \frac{\partial w_1^e}{\partial x} = - \frac{1}{\Delta e}$$

$$w_2^e = \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} \qquad \frac{\partial w_2^e}{\partial x} = \frac{1}{\Delta e} \tag{39}$$

De las ecuaciones (32) y (38) tenemos:

$$\Phi_1 = w_1^1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x}{\Delta_1} \qquad \partial \Phi_1 = - \frac{1}{\Delta_1}$$

$$\Phi_N = w_2^{N-1} = \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} = \frac{x - x_{N-1}}{\Delta_{N-1}} \qquad \partial \Phi_N = \frac{1}{\Delta_{N-1}}$$

$$\Phi_i = w_2^{i-1} \cup w_1^i = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cup \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{\Delta_i} \cup \frac{x_i - x}{\Delta_i}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = + \frac{1}{\Delta_i} \cup - \frac{1}{\Delta_i} \tag{40}$$

Para I=1.   De la ecuacion (37) y utilizando las expresiones (38) (39) y (40):

$$T_{x_i} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Phi_1 \Big|_{x_1}^{x_N} = \begin{matrix} \partial \hat{u}/\partial x & \text{para } x = x_1 \\ 0 & \text{para } x = x_N \end{matrix} = \varphi_1 \quad \text{condición de frontera inicial.} \qquad (41)$$

$$-T_{x_i}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\,dx = -T_{x_1}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial w_1^1}{\partial x}u_1 + \frac{\partial w_2^1}{\partial x}u_2\right)\frac{\partial w_1^1}{\partial x}\,dx$$

$$= -T_{x_1}\int_{x_1}^{x_2}\left(-\frac{u_1}{\Delta_1}+\frac{u_2}{\Delta_1}\right)\left(-\frac{1}{\Delta_1}\right)dx$$

$$= -T_{x_1}\frac{u_1}{\Delta_1} + T_{x_1}\frac{u_2}{\Delta_1}$$

$$-N_1\int_{x_1}^{x_2}\Phi_1\,dx = -N_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{(x_2-x)}{\Delta_1}\,dx$$

$$= -\frac{N_1}{2}\Delta_1$$

Finalmente obtenemos:

$$-\varphi_1 - T_{x_1}\frac{u_1}{\Delta_1} + T_{x_1}\frac{u_2}{\Delta_1} - \frac{N_1}{2}\Delta_1 - W_1 = 0 \qquad (42)$$

Para I=i. (Caso general).

$$T_{x_i}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\Phi_i\Big|_{x_1}^{x_N} = 0$$

$$-T_{x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\,dx = -T_{x_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{\partial w_1^{i-1}}{\partial x}u_{i-1} + \frac{\partial w_2^{i-1}}{\partial x}u_i\right)\left(\frac{\partial w_2^{i-1}}{\partial x}\right)dx$$

$$-T_{x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{\partial w_1^i}{\partial x}u_i + \frac{\partial w_2^i}{\partial x}u_{i+1}\right)\left(\frac{\partial w_1^i}{\partial x}\right)dx$$

$$= -T_{x_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(-\frac{u_{i-1}}{\Delta_{i-1}}+\frac{u_i}{\Delta_{i-1}}\right)\left(\frac{1}{\Delta_i}\right)dx - T_{x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(-\frac{u_i}{\Delta_i}+\frac{u_{i+1}}{\Delta_i}\right)\left(-\frac{1}{\Delta_i}\right)dx$$

$$= T_{x_{i-1}}\frac{u_{i-1}}{\Delta_{i-1}} - \left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}}+\frac{T_{x_i}}{\Delta_i}\right)u_i + T_{x_i}\frac{u_{i+1}}{\Delta_i}$$

$$-N_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\Phi_i\,dx = -N_{i-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{x-x_i}{\Delta_{i-1}}\,dx - N_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x_{i+1}-x}{\Delta_i}\,dx = -N_{i-1}\Delta_{i-1} - N_i\Delta_i$$

Y finalmente:

$$T_{x_{i-1}} \frac{u_{i-1}}{\Delta_{i-1}} - \left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}} + \frac{T_{x_i}}{\Delta_i} \right) u_i + T_{x_i} \frac{u_{i+1}}{\Delta_i} - N_{i-1} \Delta_{i-1} - N_i \Delta_i - W_i = 0 \qquad (43)$$

Para I=N.
Basandonos en la forma general podemos deducir el resultado de la ecuacion (37) para este caso:

$$T_{x_N} \frac{u_{N-1}}{\Delta_{N-1}} - T_{x_N} \frac{u_N}{\Delta_{N-1}} - \frac{N_N}{2} \Delta_{N-1} - W_N = 0$$

$$T_{x_i} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Phi_N \Big|_{x_1}^{x_N} = \begin{cases} 0 & \text{para } x = x_1 \\ \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x} & \text{para } x = x_N \end{cases} = \varphi_2$$

Basandonos en la expresion (41):

$$-T_x \int_{x_1}^{x_N} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} dx = -T_{x_N} \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left(\frac{\partial \omega_1^{N-1}}{\partial x} u_{N-1} + \frac{\partial \omega_2^{N-1}}{\partial x} u_N \right) \frac{\partial \omega_2^{N-1}}{\partial x} dx$$

$$= -T_{x_N} \int_{x_1}^{x_N} \left(-\frac{1}{\Delta_{N-1}} u_{N-1} + \frac{1}{\Delta_{N-1}} u_N \right) \frac{1}{\Delta_{N-1}} dx$$

$$= T_{x_N} \frac{u_{N-1}}{\Delta_{N-1}} - T_{x_N} \frac{u_N}{\Delta_{N-1}}$$

$$-N_N \int_{x_{N-1}}^{x_N} \Phi_N dx = -N_N \int_{x_1}^{x_N} \frac{x - x_{N-1}}{\Delta_{N-1}} dx$$

$$= -N_N \frac{1}{2\Delta_{N-1}}$$

Y finalmente:

$$T_{x_N} \frac{u_{N-1}}{\Delta_{N-1}} - T_{x_N} \frac{u_N}{\Delta_{N-1}} - N_N \frac{1}{2\Delta_{N-1}} - W_N - \varphi_2 = 0 \qquad (44)$$

Donde φ_2 = condicion de frontera final mediante un proceso similar al de la expresion (41).

En conclusion tenemos que:
para I=1:

$$\left(-\frac{T_{x_1}}{\Delta_1}\right)u_1+\left(\frac{T_{x_1}}{\Delta_1}\right)u_2=\frac{N_1}{2}\Delta_1+W_1+\varphi_1$$

para I=i:

$$\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}}\right)u_{i-1}-\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}}+\frac{T_{x_i}}{\Delta_i}\right)u_i+\left(\frac{T_{x_i}}{\Delta_i}\right)u_{i+1}=N_{i-1}\Delta_{i-1}+N_i\Delta_i+W_i$$

para I=N:

$$\left(\frac{T_{x_N}}{\Delta_{N-1}}\right)u_{N-1}-\left(\frac{T_{x_N}}{\Delta_{N-1}}\right)u_N=\frac{N_N}{2\Delta_{N-1}}+W_N+\varphi_2$$

Lo cual expresado matricialmente quedaria como:

$$\left[\bar{T}_x\right]\left\{\bar{U}\right\}=\left\{\bar{N}\right\}+\left\{\bar{W}\right\} \qquad (45)$$

Formado de las expresiones (42), (43) y (44).

APLICACION PARA EL CASO NO ESTABLECIDO (TRANSITORIO).

De la ecuacion (33), por tratarse de flujo unidimensional, se sigue con: $\partial^2 h/\partial y^2 = 0$ es decir, la variacion de la carga existe solamente a lo largo de un eje principal, y por ser flujo no establecido, encontraremos una variacion con respecto al tiempo, es decir: $\partial h/\partial t \neq 0$, por lo que la ecuacion (33) quedaria como:

$$T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - S \frac{\partial h}{\partial t} - W - N = 0 \qquad (46)$$

Nuevamente hacemos uso de la funcion de prueba $\hat{u}(x)$ de la ecuacion (31) y le damos peso con la funcion Φ_i de la ecuacion (33), despues de minimizar el residuo, considerando la ecuacion (46) obtenemos:

$$\int_{x_1}^{x_N} \left(T_{x_i} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - S_i \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - W_i - N_i\right) \Phi_i \, dx = 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N$$

$$T_{x_i} \int_{x_1}^{x_N} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \Phi_i \, dx - S_i \int_{x_1}^{x_N} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \Phi_i \, dx - N_i \int_{x_1}^{x_N} \Phi_i \, dx - W_i = 0 \qquad (47)$$

Utilizando el mismo procedimiento empleado para la obtencion de la ecuacion (37) considerando a la ecuacion (35), obtenemos despues de integrar por partes el primer miembro de la ecuacion (47)

$$T_{x_i} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\Big|_{x_1}^{x_N} - T_{x_i} \int_{x_1}^{x_N} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \, dx - S_i \int_{x_1}^{x_N} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \Phi_i \, dx - N_i \int_{x_1}^{x_N} \Phi_i \, dx - W_i = 0 \qquad (48)$$

Para I=1,. De la ecuacion (48) apoyados con la expresion (42) podemos observar que:

$$-\varphi_1 - T_{x_1} \frac{u_1}{\Delta_1} + T_{x_1} \frac{u_2}{\Delta_1} - \frac{N_1}{2} \Delta_1 - W_1 - S_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \Phi_1 \, dx = 0$$

donde:

$$-S_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \Phi_1 \, dx = -S_1 \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x_2 - x}{\Delta_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{x - x_1}{\Delta_1} \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{x_2 - x}{\Delta_1} \right) \cdot dx$$

$$= S_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - x)^2}{\Delta_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial t} \, dx - S_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{\Delta_1^2} \frac{\partial u_2}{\partial t} \, dx$$

$$= S_1 \frac{\Delta_1}{3} \frac{\partial u_1}{\partial t} - S_1 \frac{\Delta_1}{6} \frac{\partial u_2}{\partial t}$$

Y finalmente:

$$-\varphi_2-T_{x_1}\frac{u_1}{\Delta_1}+T_{x_2}\frac{u_2}{\Delta_1}-S_1\frac{\Delta_1}{3}\frac{\partial u_1}{\partial t}-S_1\frac{\Delta_1}{6}\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{N_1}{2}\Delta_1-W_1=0 \qquad (49)$$

Aplicando la tecnica de diferencias finitas con la aproximacion implicita, en la que:

$$u=\frac{1}{2}\left(u_t+u_{t+\Delta t}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\Delta t}\left(u_{t+\Delta t}-u_t\right) \qquad (50)$$

donde u_t = valor de la funcion en el tiempo t.
donde $u_{t+\Delta t}$ = valor de la funcion en el tiempo t+Δt.

Haciendo que:

$$u_i=u_t$$
$$u_i^{?}=u_{t+\Delta t} \qquad (51)$$

Tendremos en la ecuacion (49):

$$-\varphi_1-T_{x_1}\frac{u_1+u_1^{?}}{2\Delta_1}+T_{x_1}\frac{u_2+u_2^{?}}{2\Delta_1}-S_1\frac{\Delta_1}{3}\frac{u_1^{?}-u_1}{\Delta t}-S_1\frac{\Delta_1}{6}\frac{u_2^{?}-u_2}{\Delta t}-\frac{N_1}{2}\Delta_1-W_1=0$$

$$-\varphi_1-\left(\frac{T_{x_1}}{2\Delta_1}-\frac{S_1\Delta_1}{3\Delta t}\right)u_1+\left(\frac{T_{x_1}}{2\Delta_1}+\frac{S_1\Delta_1}{6\Delta t}\right)u_2-\left(\frac{T_{x_1}}{2\Delta_1}+\frac{S_1\Delta_1}{3\Delta t}\right)u_1^{?}+\left(\frac{T_{x_1}}{2\Delta_1}-\frac{S_1\Delta_1}{6\Delta t}\right)u_2^{?}-\frac{N_1}{2}\Delta_1-W_1=0 \qquad (52)$$

Para I=i. Nuevamente con la ecuacion (48) y apoyados con la expresion (43) observamos que:

$$T_{x_{i-1}}\frac{u_{i-1}}{\Delta_{i-1}}-\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}}+\frac{T_{x_i}}{\Delta_i}\right)u_i+T_{x_i}\frac{u_{i+1}}{\Delta_i}-N_{i-1}\Delta_{i-1}-N_i\Delta_i-W_i-S_i\int_{x_1}^{x_n}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\phi_i\,dx=0$$

donde:

$$-S_i\int_{x_1}^{x_n}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\phi_i\,dx=-S_{i-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{x_i-x}{\Delta_{i-1}}\frac{\partial u_{i-1}}{\partial t}+\frac{x-x_{i-1}}{\Delta_{i-1}}\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{x-x_{i-1}}{\Delta_{i-1}}\right)dx$$

$$-S_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta_i}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{x-x_i}{\Delta_i}\frac{\partial u_{i+1}}{\partial t}\right)\left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta_i}\right)dx$$

$$=-\left(S_{i-1}\frac{\Delta_{i-1}}{6}\right)\frac{\partial u_{i-1}}{\partial t}-\left(S_{i-1}\frac{\Delta_{i-1}}{3}+S_i\frac{\Delta_i}{3}\right)\frac{\partial u_i}{\partial t}-S_i\frac{\Delta_i}{6}\frac{\partial u_{i+1}}{\partial t}$$

Y finalmente:

$$T_{x_{i-1}}\frac{u_{i-1}}{\Delta_{i-1}}-\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}}+\frac{T_{x_i}}{\Delta_i}\right)u_i+T_{x_i}\frac{u_{i+1}}{\Delta_i}-\left(S_{i-1}\frac{\Delta_{i-1}}{6}\right)\frac{\partial u_{i-1}}{\partial t}-\left(S_{i-1}\frac{\Delta_{i-1}}{3}+S_i\frac{\Delta_i}{3}\right)\frac{\partial u_i}{\partial t}$$

$$-S_i\frac{\Delta_i}{6}\frac{\partial u_{i+1}}{\partial t}-N_{i-1}\Delta_{i-1}-N_i\Delta_i-W_i=0 \tag{53}$$

Con las expresiones (50) y (51), de la ecuacion (53) obtenemos:

$$T_{x_{i-1}}\frac{u_{i-1}+u_{i-1}^{?}}{2\Delta_{i-1}}-\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}}+\frac{T_{x_i}}{\Delta_i}\right)\frac{u_i+u_i^{?}}{2}+T_{x_i}\frac{u_{i+1}+u_{i+1}^{?}}{2\Delta_i}-\left(S_{i-1}\frac{\Delta_{i-1}}{6}\right)\frac{u_{i-1}^{?}-u_{i-1}}{\Delta t}$$

$$-\left(S_{i-1}\frac{\Delta_{i-1}}{3}+S_i\frac{\Delta_i}{3}\right)\frac{u_i^{?}-u_i}{\Delta t}-S_i\frac{\Delta_i}{6}\frac{u_{i+1}^{?}-u_{i+1}}{\Delta t}-N_{i-1}\Delta_{i-1}-N_i\Delta_i-W_i=0$$

$$\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{2\Delta_{i-1}}+\frac{S_{i-1}\Delta_{i-1}}{6\Delta t}\right)u_{i-1}-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}}+\frac{T_{x_i}}{\Delta_i}\right)-\frac{1}{3\Delta t}\left(S_{i-1}\Delta_{i-1}+S_i\Delta_i\right)\right]u_i+\left(\frac{T_{x_i}}{2\Delta_i}+\frac{S_i\Delta_i}{6\Delta t}\right)u_{i+1}$$

$$-\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{2\Delta_{i-1}}-\frac{S_{i-1}\Delta_{i-1}}{6\Delta t}\right)u_{i-1}^{?}-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}}+\frac{T_{x_i}}{\Delta_i}\right)+\frac{1}{3\Delta t}\left(S_{i-1}\Delta_{i-1}+S_i\Delta_i\right)\right]u_i^{?}+\left(\frac{T_{x_i}}{2\Delta_i}-\frac{S_i\Delta_i}{6\Delta t}\right)u_{i+1}^{?}$$

$$-N_{i-1}\Delta_{i-1}-N_i\Delta_i-W_i=0 \tag{54}$$

Para I=N. De la ecuacion (48), apoyados con la expresion (44), podemos decir que:

$$T_{x_N}\frac{u_{N-1}}{\Delta_{N-1}}-T_{x_N}\frac{u_N}{\Delta_{N-1}}-N_N\frac{1}{2\Delta_{N-1}}-W_N-S_N\int_{x_1}^{x_N}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\Phi_N\,dx-\varphi_2=0$$

donde:

$$-S_N\int_{x_1}^{x_N}\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}\Phi_N\,dx=-S_N\int_{x_1}^{x_N}\left(w_1^{N-1}\frac{\partial u_{N-1}}{\partial t}+w_2^{N-1}\frac{\partial u_N}{\partial t}\right)\left(\frac{x-x_{N-1}}{\Delta_{N-1}}\right)dx$$

$$= -S_N \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left(\frac{x_N - x}{\Delta_{N-1}} \frac{\partial u_{N-1}}{\partial t} + \frac{x - x_{N-1}}{\Delta_{N-1}} \frac{\partial u_N}{\partial t} \right) \left(\frac{x - x_{N-1}}{\Delta_{N-1}} \right) dx$$

$$= -S_N \left(\frac{1}{6}\right) (\Delta_{N-1}) \frac{\partial u_{N-1}}{\partial t} - S_N \left(\frac{1}{3}\right) (\Delta_{N-1}) \frac{\partial u_N}{\partial t}$$

Y finalmente:

$$T_{X_N} \frac{u_{N-1}}{\Delta_{N-1}} - T_{X_N} \frac{u_N}{\Delta_{N-1}} - N_N \frac{1}{2\Delta_{N-1}} - W_N - S_N \frac{\Delta_{N-1}}{6} \frac{\partial u_{N-1}}{\partial t} - S_N \frac{\Delta_{N-1}}{3} \frac{\partial u_N}{\partial t} - \varphi_2 = 0 \qquad (55)$$

Aplicando las expresiones (50) y (51) a la ecuacion (55) obtenemos:

$$T_{X_N} \frac{u_{N-1} + u'_{N-1}}{2\Delta_{N-1}} - T_{X_N} \frac{u_N + u'_N}{2\Delta_{N-1}} - N_N \frac{1}{2\Delta_{N-1}} - W_N - S_N \frac{\Delta_{N-1}}{6} \frac{u'_{N-1} - u_{N-1}}{\Delta t} - S_N \frac{\Delta_{N-1}}{3} \frac{u'_N - u_N}{\Delta t} = 0$$

$$\left(\frac{T_{X_N}}{2\Delta_{N-1}} + \frac{S_N \Delta_{N-1}}{6\Delta t} \right) u_{N-1} - \left(\frac{T_{X_N}}{2\Delta_{N-1}} - \frac{S_N \Delta_{N-1}}{3\Delta t} \right) u_N + \left(\frac{T_{X_N}}{2\Delta_{N-1}} - \frac{S_N \Delta_{N-1}}{6\Delta t} \right) u'_{N-1}$$

$$- \left(\frac{T_{X_N}}{2\Delta_{N-1}} + \frac{S_N \Delta_{N-1}}{3\Delta t} \right) u'_N - \frac{N_N}{2\Delta_{N-1}} - W_N - \varphi_2 = 0 \qquad (56)$$

En conclusion tenemos que:
Para I=1:

$$-\left(\frac{T_{X_1}}{2\Delta_1} - \frac{S_1 \Delta_1}{3\Delta t} \right) u_1 + \left(\frac{T_{X_1}}{2\Delta_1} + \frac{S_1 \Delta_1}{6\Delta t} \right) u_2 - \left(\frac{T_{X_1}}{2\Delta_1} + \frac{S_1 \Delta_1}{3\Delta t} \right) u'_1 + \left(\frac{T_{X_1}}{2\Delta_1} - \frac{S_1 \Delta_1}{6\Delta t} \right) u'_2 = \frac{N_1}{2} \Delta_1 + W_1 + \varphi_1$$

Para I=i:

$$\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{2\Delta_{i-1}}+\frac{S_{i-1}\Delta_{i-1}}{6\Delta t}\right)u_{i-1}-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}}+\frac{T_{x_i}}{\Delta_i}\right)-\frac{1}{3\Delta t}\left(S_{i-1}+S_i\Delta_i\right)\right]u_i+\left(\frac{T_{x_i}}{2\Delta_i}+\frac{S_i\Delta_i}{6\Delta t}\right)u_{i+1}$$

$$-\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{2\Delta_{i-1}}-\frac{S_{i-1}\Delta_{i-1}}{6\Delta t}\right)u_{i-1}'-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{T_{x_{i-1}}}{\Delta_{i-1}}+\frac{T_{x_i}}{\Delta_i}\right)+\frac{1}{3\Delta t}\left(S_{i-1}\Delta_{i-1}+S_i\Delta_i\right)\right]u_i'$$

$$+\left(\frac{T_{x_i}}{2\Delta_i}-\frac{S_i\Delta_i}{6\Delta t}\right)u_{i+1}'=N_{i-1}'\Delta_{i-1}+N_i\Delta_i+W_i$$

Para I=N:

$$\left(\frac{T_{x_N}}{2\Delta_{N-1}}+\frac{S_N\Delta_{N-1}}{6\Delta t}\right)u_{N-1}-\left(\frac{T_{x_N}}{2\Delta_{N-1}}-\frac{S_N\Delta_{N-1}}{3\Delta t}\right)u_N+\left(\frac{T_{x_N}}{2\Delta_{N-1}}+\frac{S_N\Delta_{N-1}}{6\Delta t}\right)u_{N-1}'$$

$$-\left(\frac{T_{x_N}}{2\Delta_{N-1}}+\frac{S_N\Delta_{N-1}}{3\Delta t}\right)u_N'=\frac{N_N}{2\Delta_{N-1}}+W_N+\varphi_2$$

Lo cual expresado matricialmente quedaria:

$$\left[\bar{T}_x+\bar{S}\right]\left\{\bar{U}\right\}+\left[\bar{T}_x-\bar{S}\right]\left\{\bar{U}'\right\}=\left\{\bar{N}\right\}+\left\{\bar{W}\right\} \qquad (57)$$