

- a) Metodo de puntos iterativos.
- b) Metodo de Gauss-Seidel.
- c) Metodo de puntos sucesivos de sobrerelajacion iterativa.
- d) Metodo de bloques iterativos.
- e) Metodo sucesivo de sobrerelajacion lineal.

FUNDAMENTOS DEL PROCEDIMIENTO DE LOS RESIDUOS PESADOS.

El ingeniero ruso B. G. Galerkin fue el primero en introducir su metodo en esta forma, en 1915. Actualmente este es un caso especial de una aproximacion mas general que se conoce como el metodo de los residuos pesados (MRP). Para introducir el MRP, consideraremos la ecuacion independiente de tiempo:

$$L u = f \quad \text{en } B \quad \text{----(17)}$$

donde B es un dominio de frontera y el operador L actua sobre la funcion incognita <u> para generar las funciones conocidas <f>. Hagamos que <u> sea sustituida por una funcion $\hat{u}(x)$ la cual es formada por una combinacion lineal de funciones adecuadas y satisfacen las condiciones de frontera principales o esenciales del problema de valor de frontera. Una funcion de prueba adecuada podria ser:

$$\hat{u}(x) = \phi_1(x) + \sum_{j=2}^M a_j \phi_j(x) \quad \text{----(18)}$$

donde $\phi_1(x)$ es seleccionada para satisfacer las condiciones esenciales de frontera y las funciones coordenadas o bases $\phi_j(x)$ deben satisfacer las correspondientes condiciones de frontera homogeneas. Esto garantiza que para cualquier valor de la constante a_j , $\hat{u}(x)$ satisface las condiciones de frontera esenciales. Generalmente, en el metodo del elemento finito, el termino $\phi_1(x)$ no es escrito explicitamente pero se incorpora en la serie mediante una especificacion sobre los a_j . La ecuacion (18) se convierte en:

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^M a_j \phi_j(x) \quad \text{----(19)}$$

Hagamos un residuo \mathcal{R} definido por:

$$\mathcal{R}(x) = L \hat{u} - f(x) \quad \text{o} \quad \mathcal{R}(x) = L \left[\sum_{j=1}^M a_j \phi_j(x) \right] - f(x)$$

Si la solucion de prueba fuese la solucion exacta, el residuo desapareceria. En el metodo de los residuos pesados, se hace un intento de forzar este residuo a tomar un valor de cero, a traves de la seleccion de las constantes a_j ($j=1,2,\dots,M$). Los a_j son calculados para satisfacer las restricciones que aparecen cuando igualamos a cero las integrales pesadas de los residuos:

$$\int \mathcal{R}(x) w_i(x) dx = 0 \quad (i=1,2,\dots,M) \quad \text{----(20)}$$

Para simplificar, generalmente se hace uso de la notacion del producto punto (o producto escalar) de dos funciones <v> y <w> que es escrito como: $\langle v, w \rangle = \int v \cdot w \, dB$

y asi la ecuacion (20) puede ser escrita como:

$$\langle \mathcal{R}(x), w \rangle = 0 \quad (i=1,2,\dots,M) \quad \text{---(21)}$$

De la ecuacion (21), M ecuaciones pueden ser obtenidas las cuales en conjunto con las condiciones de frontera, pueden ser resueltas para M valores de a_j . Existen varios metodos de residuos pesados y cada uno se distingue por la seleccion de las funciones de peso < w_i >.

Metodo del Subdominio.

El dominio B es dividido en M subdominios pequeños B_i , y la funcion de peso viene a ser:

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{Para } x \text{ en } B_i \\ 0 & \text{Para } x \text{ fuera de } B_i \end{cases}$$

Asi, la ecuacion diferencial $L\hat{u}$ se integra sobre cada subdominio y se iguala a cero.

Metodo de la Colocacion.

M puntos x_i (conocidos como puntos de colocacion) son especificados en B y las funciones de peso son del tipo Dirac delta:

$$w_i = \delta(x - x_i)$$

que tienen la propiedad de que:

$$\int_B \mathcal{R}(x) w_i dx = \mathcal{R}(x_i) = 0$$

El procedimiento consiste de evaluar simplemente los residuos en los puntos de colocacion y ademas involucra un minimo esfuerzo de calculo. Desafortunadamente, el metodo es muy sensible a la manera de seleccionar los puntos de colocacion.

Metodo de los Minimos Cuadrados.

En esta aproximacion la funcion de peso es $p(x) \partial \mathcal{R} / \partial a_i$, donde $p(x)$ es una funcion positiva arbitraria. Esto es equivalente a minimizar el residuo cuadrado integrado:

$$I = \int p(x) \mathcal{R}^2(x) dx$$

con respecto a los parametros de prueba a_i ,

$$\partial I / \partial a_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,M).$$

Metodo de Galerkin.

El metodo de Galerkin fue formulado por la seleccion de las funciones bases (tambien conocidas como funciones coordenadas y bases) $\phi_i(x)$ como las funciones de peso. Asi, las ecuaciones residuales de peso seran:

$$\langle \mathcal{R}(x), \phi_i(x) \rangle = 0 \quad (i=1,2,3,\dots,M) \quad \text{---(22)}$$

Hay una segunda interpretacion del metodo Galerkin que puede proveer senas adicionales en el importante papel jugado por las funciones coordenadas. Como en el caso mas general del procedimiento Ritz, los ϕ_i son formalmente requeridos para satisfacer las condiciones de frontera impuestas en la ecuacion gobernante $Lu=f$ en B, donde B es un dominio de frontera, el operador L actua en la funcion desconocida $\langle u \rangle$ para generar la funcion conocida $\langle f \rangle$. Ademas, esas funciones deben ser linealmente independientes y representan las primeras M funciones del sistema de funciones ϕ_j ($j=1,2,\dots,M$) el cual es completo en la region dada. Para obtener una solucion exacta, el residuo $\mathcal{R}(x)$ debe desaparecer y asumiendo $L\hat{u}$ a ser continuo, esto es equivalente a requerir la ortogonalidad de la expresion $\mathcal{R}(x)$ para todas las funciones ϕ_j ($j=1,2,\dots,M$). Dado que solo las M funciones coordenadas son usadas, solo las M condiciones de ortogonalidad pueden ser satisfechas. Esto es, por supuesto, el mensaje contenido en la ecuacion (22).