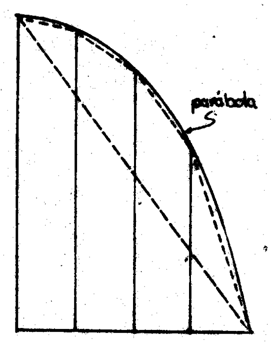


fig.8. Concepto de convergencia o exhausión

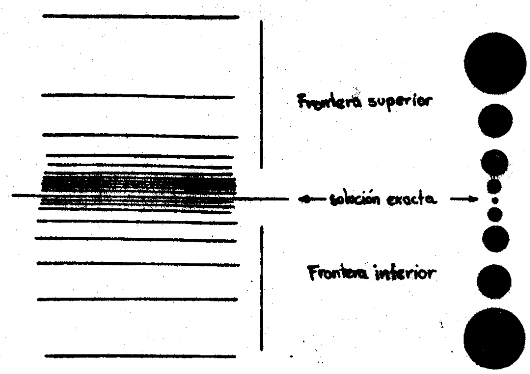


fig.9. concepto de fronteras

Error.
Es obvio que una discretizacion involucra una aproximacion. Consecuentemente, obtenemos una solucion que no es exacta. La cantidad por la cual diferimos de la solucion, la podemos llamar --- error; y este se va disminuyendo conforme aumenta la aproximacion asi, en el caso del circulo, el error es menor entre mayor numero de poligonos tengamos. Podemos expresar el error en el area como:

$$A^{*}-A=e$$

donde: A*=area exacta, A=area aproximada y e=error.

Causa y Efecto:
La escencia de toda investigacion es la examinacion y entendimiento de las causas y sus efectos. Por ejemplo, en un sistema hidrologico tenemos como causas, las producidas por estimulos al -- sistema y como efecto, la respuesta que dicho sistema presenta.

Si consideramos como causa en una cuenca hidrologica a la precipitacion, la respuesta o efecto de la cuenca se manifiesta en varias formas, como seria la evaporacion, el escurrimiento o la infiltracion.

La comprension de estas ideas nos ayuda significantemente a entender y extender el concepto del elemento finito en la ingenieria, lo cual constituye nuestro objetivo.

PASOS EN EL METODO DEL ELEMENTO FINITO.

Para conocer los efectos que se producen en un sistema debido a - causas externas a el, utilizamos una distribucion conveniente para representarlo, a la que llamaremos <u>. Al ser dificil de encontrar tal distribucion con metodos convencionales, utilizaremos el conocido como del elemento finito, basado en el concepto de -- discretizacion mencionado anteriormente. Dividimos al sistema -

en estudio en un numero de pequenas regiones (fig. 10) llamadas - elementos finitos. Una concecuencia de esta division, es que la distribucion <u> tambien es discretizada en las zonas correspon-- dientes. Estos nuevos elementos son ahora faciles de examinar y comparar con el sistema total y la distribucion <u> sobre el.

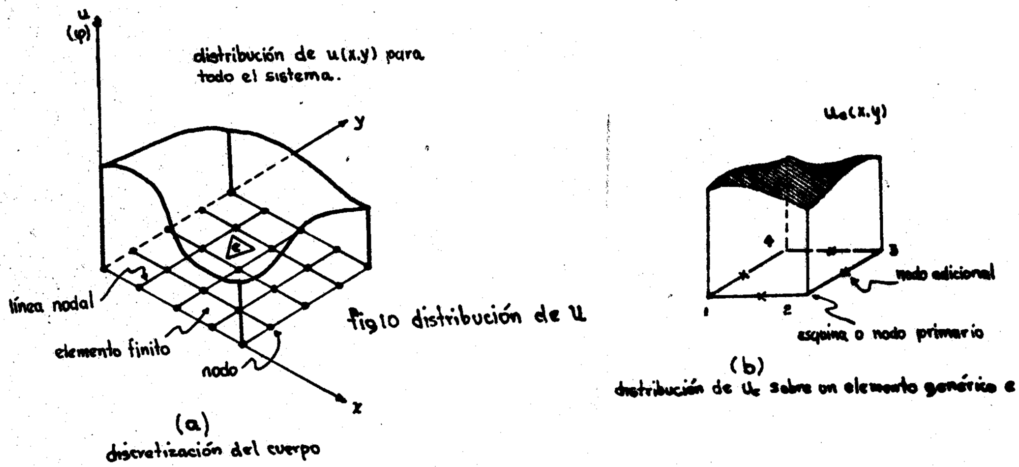


fig10 distribución de u

Paso 1. Discretizacion y seleccion de configuracion de elementos. Este paso involucra la subdivision del sistema en un numero de pequenos cuerpos llamados elementos finitos. Las intersecciones - de los lados de esos elementos son llamados nodos o puntos noda-- les, y las intersecciones de esos elementos son llamadas lineas - nodales o planos nodales. El tipo de elementos a utilizar depende escencialmente de la continuidad e idealizacion necesarias.

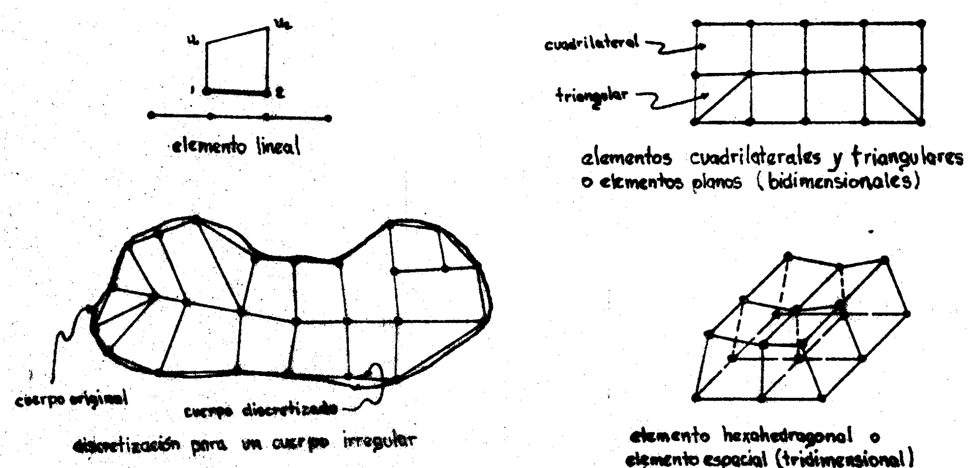


fig11. diferentes tipos de elementos

Paso 2. Seleccion del modelo aproximado de funcion.
Los puntos nodales proveen puntos estrategicos para escribir funciones matematicas que describan la forma de la distribucion de las cantidades incognitas sobre el dominio del elemento. Un numero de funciones matematicas como polinomiales o series trigonometricas pueden ser usadas para este proposito. Si u denota las incognitas, la funcion de interpolacion polinomial puede ser expresada como:

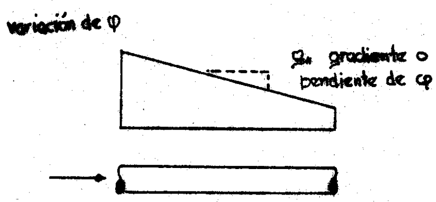
$$\hat{u} = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \cdots + N_m u_m$$

donde u_i , $i = 1, m$ son las incognitas en los nodos y $Ni = N1, Nm$ son las funciones de interpolacion.

Paso 3. Definir las relaciones esfuerzo-desplazamiento (gradiente-posicion),(incognitas) y las constitutivas.
Para el caso de flujo:

$$g_x = \frac{d\varphi}{dx}$$

φ es la carga hidraulica o potencial;
g_x es el gradiente de φ , es decir, el cambio de φ con respecto a la posicion x.



f.12 idealización unidimensional de flujo

Las relaciones constitutivas definen la respuesta o efecto en un sistema debido a causas. Una ley constitutiva es la Ley de Darcy para flujo a travez del medio poroso.

$$v_x = K_x g_x$$

donde K_x = coeficiente de permeabilidad, v_x = velocidad; y
g_x = gradiente.

Paso 4. Derivacion de ecuaciones elementales.
Los metodos mas utilizados son los de la energia y el de los residuos pesados. El metodo de la energia requiere de un conocimiento mas avanzado en calculo variacional, por lo que trataremos con el metodo de los residuos pesados.

Metodo de los Residuos Pesados.
Es una de las mejores alternativas para formular el metodo del -- elemento finito. Un numero de esquemas son usados bajo este metodo entre los cuales estan: colocacion, subdominio, minimos cuadrados y metodo Galerkin. Para muchos problemas con ciertas caracteristicas matematicas, el metodo Galerkin ha sido el mas comunmente utilizado para aplicaciones del elemento finito.

El metodo de los residuos pesados esta basado en la minimizacion de los residuos, despues de que una solucion aproximada o tanteada es sustituida en las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema.

Ecuaciones elementales.
Las ecuaciones del comportamiento de un elemento, son expresadas comunmente como:

$$[k]\ \{q\} = \{Q\} \qquad \text{------(1)}$$

donde: $[k]$ = propiedad del elemento en la matriz,
$\{q\}$ = vector de incognitas en el nodo del elemento,
$\{Q\}$ = vector de parametros de fuerza nodal en el elemento.

Paso 5. Ensamblar las ecuaciones elementales para obtener ecuaciones de ensamble o globales e introducir condiciones de frontera.
Nuestro objetivo final es obtener las ecuaciones para todo el modelo que definan aproximadamente el comportamiento del mismo.

Una vez que las ecuaciones elementales son establecidas para un elemento generico, estamos listos para generar ecuaciones para los otros elementos usando la ecuacion (1) una y otra vez. Despues se unen todas para formar las ecuaciones globales. Este proceso de ensamble esta basado en la ley de compatibilidad o de continuidad. Se requiere que el cuerpo siga continuo, esto es que -- los puntos vecinos sigan con las mismas vecindades de cada uno, - asi por ejemplo, en el caso de flujo, la carga en dos puntos adyacentes o consecutivos tiene que ser la misma (fig. 13).

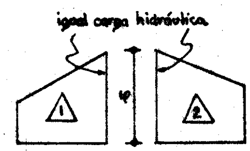


fig 13. compatibilidad de interelementos

Finalmente, las ecuaciones de ensamble son expresadas matricialmente como:

$$[K]\ \{r\} = \{R\} \qquad \text{-----(2)}$$

donde:

$[K]$ = propiedades de ensamble de la matriz
$\{r\}$ = propiedades de ensamble de incognitas nodales
$\{R\}$ = vector de ensamble de parametros de fuerza.

Condiciones de Frontera.
Los aspectos que un cuerpo presenta a no alterar sus propiedades con la aplicacion de una fuerza, se conoce como coaccion y depende de lo que rodea al cuerpo. A estos alrededores se les llama condiciones de frontera y solo cuando los introducimos, podemos decir como permanece el cuerpo. Podemos encontrar dos tipos de frontera: esenciales y naturales. La fig. 14 muestra un cilindro a traves del cual existe un flujo de fluido o temperatura. En la frontera S1 la temperatura o la carga hidraulica es conocida: esto es una condicion de frontera esencial. El lado derecho es impermeable al agua o protegido termicamente contra el calor, entonces la condicion de frontera es especificada como flujo de fluido o calor, que es proporcional a la primera derivada de la carga del fluido o la temperatura. Está es una condicion de frontera natural.

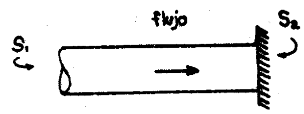


fig 14. ejemplo de condiciones de frontera

Para reflejar las condiciones de frontera en la aproximacion del elemento finito representada por la ecuacion (2), usualmente es necesario modificar esas ecuaciones para las condiciones geometricas de frontera. Las ecuaciones de ensamble modificadas, son expresadas en notacion matricial como:

$$[\bar{K}]\{\bar{r}\} = \{\bar{R}\} \qquad \text{--------(3)}$$

Paso 6. Resolver para las incognitas primarias.
La ecuacion (3) es un conjunto de ecuaciones algebraicas simultaneas lineales (o no lineales), que pueden ser escritas en forma general como:

$$\begin{aligned} K_{11} r_1 + K_{12} r_2 + \dots + K_{1n} r_n &= R_1 \\ K_{21} r_1 + K_{22} r_2 + \dots + K_{2n} r_n &= R_2 \\ &\vdots \\ K_{n1} r_1 + K_{n2} r_2 + \dots + K_{nn} r_n &= R_n \end{aligned} \qquad \text{------(4)}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse mediante eliminacion Gaussiana u otros metodos iterativos.

Paso 7. Resolver para cantidades secundarias.
En varios casos es necesario resolver para cantidades adicionales o secundarias basados en los resultados obtenidos en la primera iteracion.