ANEXO 4

CALCULO VARIACIONAL.

Una clase importante de problemas envuelve la determinacion de una o mas funciones sujetas a ciertas condiciones, tal como maximizar o minimizar una cierta integral definida, cuyos integrandos dependen de la funcion o funciones incognitas y/o ciertas de sus derivadas. Por ejemplo, para encontrar la ecuacion y=u(x) de la distancia curva a lo largo de los puntos desde (0,0) a (1,1) en el plano x,y la cual es minima, podemos buscar u(x) tal que:

$$I=\int_0^1 \sqrt{1+u'^2}\, dx = \min \tag{A4-1}$$

con: $u(0)=0 \quad u(1)=1$

Consideraremos primero el caso cuando intentamos maximizar o minimizar una integral de la forma:

$$I=\int_a^b F(x,u,u')\,dx \tag{A4-2}$$

sujeta a las condiciones: $u(a)=A \quad u(b)=B$ (A4-3)

donde a, b, A y B son constantes dadas. Suponemos que F tiene derivadas de segundo orden continuas con respecto a sus tres argumentos y requiere que la funcion incognita u(x) posea dos derivadas donde sea en (a,b). Para fijar idea suponemos que I sera maximizada.

Asi visualizamos un concurso, solamente con funciones las cuales tienen derivadas en (a,b) y toman los valores finales prescritos. El problema consiste en seleccionar de todas las funciones en concurso, la funcion (o funciones) para las cuales I es mayor.

Bajo la suposicion de que hay en realidad una funcion u(x) que tiene esta propiedad, consideraremos enseguida, una familia de funciones admisibles de un parametro las cuales incluyen u(x), llamandoles, el conjunto de todas las funciones de la forma:

$$u(x)+\epsilon\,\eta(x) \tag{A4-4}$$

donde $\eta(x)$ es cualesquier funcion dos veces diferenciable seleccionada arbitrariamente, la cual se verifica en los puntos finales del intervalo (a,b):

$$\eta(a)=\eta(b)=0 \tag{A4-5}$$

y donde ϵ es un parametro el cual es constante para cualquier --

funcion en el conjunto pero que varia de una funcion a otra. El incremento $\epsilon\eta(x)$ representa la diferencia entre las variadas funciones y la funcion solucion actual, frecuentemente se le llama - "una variacion de u(x)".

Si el resultado de reemplazar u(x) por u(x) + $\epsilon\eta$ (x) en I es denotado por I(ϵ) como:

$$I(\epsilon)=\int_a^b F(x, u+\epsilon\eta, u'+\epsilon\eta')\,dx \tag{A4-6}$$

se sigue que I(ϵ) toma su maximo valor cuando ϵ =0, esto es, --- cuando la variacion de u es cero. de aqui se sigue que:

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon}=0 \quad \text{cuando} \quad \epsilon=0 \tag{A4-7}$$

La continuidad supuesta de las derivadas parciales de F con respecto a sus tres argumentos implica la continuidad de dF/dϵ , tal que podemos diferenciar I(ϵ) bajo el signo de integral para obtener:

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon}=\int_a^b \left[\frac{\partial F(x,u+\epsilon\eta,u'+\epsilon\eta')}{\partial(u+\epsilon\eta)}\eta+\frac{\partial F(x,u+\epsilon\eta,u'+\epsilon\eta')}{\partial(u'+\epsilon\eta')}\right]dx \tag{A4-8}$$

De aqui colocando ϵ =0 obtenemos una expresion para la condicion (A4-7) en la forma:

$$I'(0)=\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial u'}\eta'(x)\right]dx=0 \tag{A4-10}$$

Podemos escribir F $\equiv$ F(x,u,u´) notando que las derivadas parciales $\partial F/\partial u$ y $\partial F/\partial u'$ han sido formadas con x, u y u´ tratadas - como variables independientes.

El siguiente paso consiste de transformar la integral del segundo producto en (A4-10) por una integracion por partes, para obtener:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'}\eta'(x)\,dx=\left[\frac{\partial F}{\partial u'}\eta(x)\right]_a^b-\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\eta(x)\,dx=-\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\eta(x)\,dx \tag{A4-11}$$

en consecuencia de (A4-5). Asi la ecuacion (A4-10) viene a ser:

$$\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)-\frac{\partial F}{\partial u}\right]\eta(x)\,dx=0 \tag{A4-12}$$

es posible probar rigurosamente que, dado que (A4-12) es verdadero para cualquier funcion η (x) la cual es dos veces diferenciable en (a,b) y cero en los limites del intervalo, consecuentemente los coeficientes de η (x) en el integrando deben ser cero en cualquier lugar de (a,b), tal que la condicion:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)-\frac{\partial F}{\partial u}=0 \qquad \textbf{(A4-13)}$$

sea satisfecha. Esta es la llamada ecuacion de Euler asociada con el problema de maximizar (o minimizar) la integral (A4-2) sujeta a (A4-3).

Si recordamos que F y por consiguiente tambien $\partial F/\partial u'$ pueden depender de x, directa e indirectamente, a traves de las variables intermedias u(x) y u'(x), deducimos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)+\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right]\frac{du}{dx}+\left[\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right]\frac{du'}{dx} \qquad \textbf{(A4-14)}$$

tal que la ecuacion de Euler (A4-13) tambien puede ser escrita en la forma expandida:

$$F_{u'u'}\frac{d^2u}{\partial x^2}+F_{uu'}\frac{du}{dx}+\left(F_{xu'}-F_u\right)=0 \qquad \textbf{(A4-15)}$$

Ademas, la forma (A4-13) frecuentemente es mas conveniente en la practica, la forma expandida muestra que, excepto en casos especiales cuando $F_{u'u'}\equiv\partial^2F/\partial u'^2$ es cero, la ecuacion es en efecto una ecuacion diferencial de segundo orden en u, sujeta a las condiciones de frontera u(a)=A y u(b)=B.

Dado que los coeficientes en la ecuacion (A4-15) pueden depender no solamente de x sino tambien de u y du/dx, la ecuacion no es necesariamente lineal. Sin embargo, esto involucra la derivada de orden superior d^2u/dx^2 en una forma lineal y de aqui esto puede ser descrito como una ecuacion casi-lineal en aquellos casos cuando en verdad no es lineal.

Tiene algo de importancia notar que no tenemos que mostrar que (A4-13) tiene una solucion que satisfaga (A4-3) o, si tiene tal solucion, que esta solucion realmente maximiza o minimiza I. Hemos indicado solamente que (A4-13) es una condicion necesaria, la cual debe ser satisfecha por u, si u es habilitada. La formulacion de condiciones suficientes las cuales aseguran que una funcion u(x) asi obtenida realmente maximiza o minimiza I, lo hace esto un maximo relativo en algun sentido), es mucho mas dificil.

Frecuentemente, en la practica, uno puede estar seguro por anticipado que existe una funcion admisible que maximiza (o minimiza). Las soluciones de (A4-13) son llamadas frecuentemente extremos del problema de variacion ya sea que satisfagan o no (A4-3) y maximicen o minimicen I.

Generalizaciones, en las cuales mas variables dependientes y/o independientes son incluidas o las cuales incluyen otras modificaciones, son descritas enseguida.

a) Si (A4-2) es reemplazada por la integral:

$$I \equiv \int_a^b F(x, u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n')\, dx \tag{A4-16}$$

donde los valores de las n funciones incognitas independientes u, $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ son dadas cada una en los puntos extremos x=a y x=b, obtenemos una ecuacion de Euler similar a (A4-13) en correspondencia con cada u_r.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u_r'}\right) - \frac{\partial F}{\partial u_r} = 0 \qquad (r=1,2,\ldots,n) \tag{A4-17}$$

Asi por ejemplo, la ecuacion de Euler asociada con la integral:

$$\int_a^b (u_1'^2 + u_2'^2 - 2u_1 u_2 + 2x u_1)\, dx \tag{A4-18}$$

se establece que sea:

$$\frac{d}{dx}(2u_1') - (-2u_2 + 2x) = 0 \quad y \quad \frac{d}{dx}(2u_2') - (-2u_1) = 0 \tag{A4-19}$$

b) Supongamos que tenemos que maximizar o minimizar (A4-2):

$$\int_a^b F(x, u, u')\, dx = \text{max ó min} \tag{A4-20}$$

donde u(x) va a satisfacer las condiciones extremas prescritas:

$$u(a)=A, \quad u(b)=B \tag{A4-21}$$

como antes, pero tambien una condicion de restriccion es impuesta en la forma:

$$\int_a^b G(x, u, u')\, dx = K \tag{A4-22}$$

donde K es una constante prescrita. En este caso, la ecuacion de Euler apropiada se establece que sea el resultado de reemplazar F en (A4-13) por la funcion auxiliar:

$$H = F + \lambda G \tag{A4-23}$$

donde λ es una constante incognita. Esta constante, la cual es de la naturaleza de un multiplicador de Lagrange, generalmente aparece en la ecuacion de Euler y en su solucion, y sera determinada junto con las constantes de integracion en tal manera que las tres condiciones de (A4-21) y (A4-22) sean satisfechas.