ANEXO 3.

JACOBIANOS Y COORDENADAS CURVILINEAS. CAMBIO DE VARIABLE EN INTEGRALES.

Si las ecuaciones:

$$X = X(u_1, u_2) \qquad Y = Y(u_1, u_2) \tag{A3-1}$$

pueden ser interpretadas como funciones de coordenadas curvilineas u_1 y u_2 en el plano x,y.

Los vectores:

$$u_1 = i\frac{\partial x}{\partial u_1} + j\frac{\partial y}{\partial u_1}$$
$$u_2 = i\frac{\partial x}{\partial u_2} + j\frac{\partial y}{\partial u_2} \tag{A3-2}$$

son entonces tangentes a las curvas coordenadas, con longitudes $\partial s_1/\partial u_1$ y $\partial s_2/\partial u_2$. El elemento vectorial de area plana es entonces dado por:

$$dA = (u_1 \times u_2)\, du_1\, du_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & 0 \end{vmatrix} du_1\, du_2$$

y esta relacion da por resultado:

$$dA = |dA| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u_1,u_2)}\right| du_1\, du_2 \tag{A3-3}$$

Entonces tenemos:

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{A^*} F(u_1,u_2) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u_1,u_2)}\right| du_1\, du_2 \tag{A3-4}$$

donde:

$$F(u_1,u_2) = f[x(u_1,u_2), y(u_1,u_2)]$$

y donde (A3-1) transforma A en A*, si $\partial(x,y)/\partial(u_1,u_2)$ es continua y no cero en A*.