ANEXO 2.

FUNCIONES IMPLICITAS. DETERMINANTES JACOBIANOS.

Una ecuacion de la forma:

$$f(x,y,z,\ldots)=0 \qquad \text{(A2-1)}$$

involucrando un numero finito de variables, donde <f> posee derivadas parciales continuas, se puede considerar a una de sus variables como determinada, llamada <z>, como una funcion de las restantes, es decir:

$$z=\varphi(x,y,\ldots) \qquad \text{(A2-2)}$$

en alguna region y en cualquier punto donde la ecuacion (A2-1) es satisfecha y donde la derivada parcial de <f> con respecto a esa variable no es cero.

$$\partial f/\partial z\neq 0 \qquad \text{(A2-3)}$$

En tal caso decimos que la ecuacion (A2-1) define a <z> como una funcion implicita de las otras variables, en la vecindad de ese punto. Si consideramos a todas las otras variables como independientes, podemos determinar la derivada parcial de <z> con respecto a cualquiera de ellas, sin resolver explicitamente para <z>, por diferenciar (A2-1) parcialmente con respecto a esa variable. Asi, para determinar $\partial z/\partial x$ obtenemos de la ecuacion (A2-1):

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} \qquad \text{(A2-4)}$$

el denominador difiere de cero debido a la ecuacion (A2-3).

Si n+k variables son seleccionadas por n ecuaciones, esto es usualmente posible por considerar n de las variables como funciones de las k restantes. Sin embargo, no es siempre posible.

Como ilustracion, supongamos que x, y, u, v son relacionadas por dos ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} f(x,y,u,v)&=0\\ g(x,y,u,v)&=0 \end{aligned} \qquad \text{(A2-5)}$$

Si esas ecuaciones determinan <u> y <v> como funciones diferenciables de las variables <x> y <y>, podemos diferenciar el sistema con respecto a <x> y <y>, considerando esas dos variables como independientes, y asi obtener las cuatro relaciones siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad \text{(A2-6)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{(A2-7)}$$

Si hacemos:

$$u_x = \partial u/\partial x$$

$$u_y = \partial u/\partial y$$

$$v_x = \partial v/\partial x$$

$$v_y = \partial v/\partial y$$

Si las ecuaciones (A2-6) son resueltas para $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$ y las - ecuaciones (A2-7) son resueltas para $\partial u/\partial y$ y $\partial v/\partial y$ las expresiones para esas derivadas parciales pueden ser escritas en terminos de determinantes como:

$$u_x = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} \qquad v_x = -\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_x \\ g_u & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}$$

$$u_y = -\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_v \\ g_y & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} \qquad v_y = -\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_y \\ g_u & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} \qquad \text{(A2-8)}$$

Podemos asumir, sin embargo, que el denominador comun en (A2-8) - no desaparece, esto es, que:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{(A2-9)}$$

Si las ecuaciones (A2-5) y (A2-9) son satisfechas en cualquier -- punto, y si las primeras derivadas parciales de <f> y <g> son continuas en y cerca del punto, se puede demostrar que la ecuacion -(A2-5) determina a <u> y <v> como funciones implicitas de <x> y -<y> en alguna region incluyendo ese punto, con derivadas parciales dadas por (A2-8).

El determinante en (A2-9) es conocido como <JACOBIANO DE F y G -- CON RESPECTO A U y V>, y la notacion:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} \qquad \text{(A2-10)}$$

Es usada frecuentemente. En una forma similar podemos escribir, por ejemplo:

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix} \qquad \text{(A2-11)}$$

Y proceder en igual forma para definir el Jacobiano de cualquiera n funciones con respecto a n variables.

En esta notacion, si:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \neq 0 \qquad \text{(A2-12)}$$

La primera ecuacion de (A2-8) viene a ser por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \qquad \text{(A2-13)}$$