ANEXOS

ANEXO 1.
TEOREMA DE GREEN.

Si en el teorema de divergencia:

$$\iiint_R \nabla\cdot r\, d\tau = \oiint_s v\cdot n\, d\sigma$$

nosotros escribimos: $V=\varphi_1\nabla\varphi_2$
donde φ_1 y φ_2 son funciones escalares de posicion, obtenemos los resultados:

$$\iiint_R \nabla\cdot\varphi_1\nabla\varphi_2\, d\tau = \oiint_s n\cdot\varphi_1\nabla\varphi_2\, d\sigma$$

Haciendo uso de la formula de diferenciacion:

$$\nabla\varphi u = \varphi\cdot\nabla u + u\cdot\nabla\varphi$$

nos lleva a la forma:

$$\iiint_R \left[\varphi_1\nabla^2\varphi_2 + (\nabla\varphi_1)\cdot(\nabla\varphi_2)\right] d\tau = \oiint_S n\cdot\varphi_1\nabla\varphi_2\, d\sigma \qquad \text{(A1-1)}$$

Esta ecuacion es conocida como la primera forma del Teorema de Green. Una forma mas simetrica es obtenida si φ_1 y φ_2 son intercambiables en la ecuacion (A1-1) y la ecuacion resultante es restada de la ecuacion (A1-1) para dar:

$$\iiint_R \left[\varphi_1\nabla^2\varphi_2 - \varphi_2\nabla^2\varphi_1\right] d\tau = \oiint_S n\cdot(\varphi_1\nabla\varphi_2 - \varphi_2\nabla\varphi_1)\, d\sigma \qquad \text{(A1-2)}$$

Esta ecuacion es conocida como la segunda forma del teorema de Green o frecuentemente como el Teorema de Green, y es muy usada en aplicaciones. En ambas ecuaciones (A1) y (A1-2) la region R es la region limitada por la superficie cerrada S . Si se supone que φ_1 y φ_2 son dos veces diferenciables continuamente en R , dos casos especiales de esos teoremas son de particular interes. Si tomamos $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$ en (A1-1) se sigue que:

$$\iiint_R \left[\varphi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)^2\right] d\tau = \oiint_S \varphi\, n\cdot\nabla\varphi\, d\sigma \qquad \text{(A1-3)}$$

donde: $(\nabla\varphi)^2 = (\nabla\varphi)(\nabla\varphi)$

Notamos que el producto $n\nabla\varphi$ esta de acuerdo con:

$$\frac{dr}{ds} = \nabla\varphi = \frac{d\varphi}{ds} \qquad dr\cdot\nabla\varphi = d\varphi$$

la derivada de φ en la direccion de n esto es, en la direccion de las normales al exterir de S en un punto sobre S. Asi, podemos escribir:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = n\nabla\varphi \qquad \text{(A1-4)}$$

y hablar de esta cantidad como la derivada normal de φ en un punto sobre S. Con esta notacion, la ecuacion (A1-3), se transforma en:

$$\iiint_R \left[\varphi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)^2\right] d\tau - \oiint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma \qquad \text{(A1-5)}$$

y las ecuaciones (A1-1) y (A1-2) pueden ser reescritas en una forma similar. Un segundo caso especial importante del teorema de Green es obtenido al tomar $\varphi_1=\varphi,\ \varphi_2=1$ en (A1-2). Dado que

$$\nabla\varphi_2=0 \qquad \nabla^2\varphi_2=0$$

se sigue, con la notacion de (A1-4)

$$\iiint_R \nabla^2\varphi\, d\tau = \oiint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma \qquad \text{(A1-6)}$$

Las expresiones (A1-5) y (A1-6) seran muy usadas en ciertas aplicaciones.