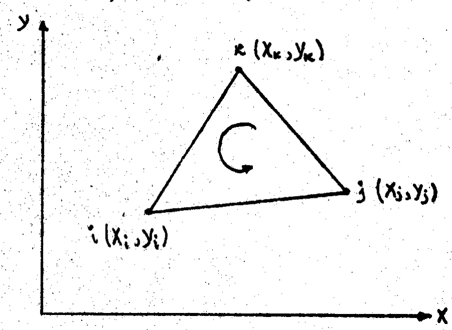
ELEMENTOS FINITOS PARA EL ESTADO BIDIMENSIONAL.

FUNDAMENTOS.

Para el caso de flujo bidimensional, considerando que este actua sobre un plano con dos ejes principales <x,y>, dividiremos nuestro sistema en elementos de tipo triangular como se puede observar en la figura 16 proponiendo como funcion de prueba a $\Phi_i(x,y)$, la cual quedaria expresada como:

$$\Phi_i^e(x,y) = a_i + b_i x + c_i y \tag{58}$$



Sujeta a las siguientes restricciones:

$$\Phi_i(X_i, Y_i) = 1$$

$$\Phi_i(X_j, Y_j) = 0$$

$$\Phi_i(X_k, Y_k) = 0$$

Por lo que:

$$a_i + b_i X_i + c_i Y_i = 1$$

$$a_i + b_i X_j + c_i Y_j = 0$$

$$a_i + b_i X_k + c_i Y_k = 0$$

Y resolviendo para los coeficientes a_i, b_i y c_i tenemos:

$$a_i = \frac{1}{2A}(X_j Y_k - X_k Y_j) \tag{59}$$

$$b_i = \frac{1}{2A}(Y_j - Y_k) \tag{60}$$

$$c_i = \frac{1}{2A}(X_k - X_j) \tag{61}$$

donde A = area sobre el elemento $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}$

Sustituyendo las expresiones (59), (60) y (61) en la ecuacion -- (58) obtenemos:

$$\Phi_i^e(x,y) = \left[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)\,x + (x_k - x_j)\,y \right] \frac{1}{2A_e} \qquad (62)$$

Realizando analisis similares para los nodos j, k obtenemos:

$$\Phi_j^e(x,y) = \left[(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)\,x + (x_i - x_k)\,y \right] \frac{1}{2A_e} \qquad (63)$$

$$\Phi_k^e(x,y) = \left[(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)\,x + (x_j - x_i)\,y \right] \frac{1}{2A_e} \qquad (64)$$

donde Ae = area del elemento.

Entonces la funcion de prueba <u> para un elemento dado estara de finida por:

$$u^e(x,y) = u_i\,\phi_i^e + u_j\,\phi_j^e + u_k\,\Phi_k^e \qquad (65)$$

y la funcion global sera de la forma:

$$\hat{u}(x,y) = \left[u^1(x,y)\right] \cup \left[u^2(x,y)\right] \cup \left[u^3(x,y)\right] \cup \ldots$$

$$= \bigcup_{e=1}^{E} u^e(x,y) \qquad (66)$$

donde E = numero de elementos del sistema.

APLICACION PARA EL CASO ESTABLECIDO.

Considerando la ecuacion (33) y tomando en cuenta la variacion de la carga a lo largo de dos ejes principales y ademas, ya que la variacion con respecto al tiempo no existe debido a que tratamos con caso establecido, la ecuacion (33) quedaria expresada:

$$T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - W - N = 0 \qquad (67)$$

Siguiendo los fundamentos del metodo de Galerkin tendremos:

$$\iint_R \left(T_x \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} - W - N\right) \Phi_i \, dx\,dy = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N \qquad (68)$$

Es conveniente definir el concepto Φ_i , el cual resulta ser la suma de valores de ϕ_i^e de los elementos que se encuentran contiguos al nodo i, esto es:

$$\Phi_i = \bigcup_{e=1}^{k} \phi_i^e$$

donde k es el numero de elementos que comparten el mismo vertice i. Aplicando el teorema de Green sobre la ecuacion (68), obtenemos:

$$-\iint_R \left(T_{x_i} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right) dx\,dy - \iint_R \left(T_{y_i} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\right) dx\,dy + \oint_\Gamma \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} \Phi_i \, ds - \iint_R N_i \Phi_i \, dx\,dy - W_i = 0 \qquad (69)$$

De la ecuacion (65) tendremos para un elemento dado:

$$u^e(x,y) = u_i \phi_i^e + u_j \phi_j^e + u_k \phi_k^e \qquad (65)$$

y

$$\frac{\partial u^e}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} u_i + \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} u_j + \frac{\partial \phi_k^e}{\partial x} u_k \qquad (70)$$

$$\frac{\partial u^e}{\partial y} = \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} u_i + \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} u_j + \frac{\partial \phi_k^e}{\partial y} u_k \qquad (71)$$

De las expresiones (62), (63) y (64):

$$\frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} = (y_j - y_k) \frac{1}{2A_e}$$

$$\frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} = (y_k - y_i) \frac{1}{2A_e}$$

$$\frac{\partial \phi_k^e}{\partial x} = (y_i - y_j)\frac{1}{2Ae}$$

$$\frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} = (x_k - x_j)\frac{1}{2Ae}$$

$$\frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} = (x_i - x_k)\frac{1}{2Ae}$$

$$\frac{\partial \phi_k^e}{\partial y} = (x_j - x_i)\frac{1}{2Ae}$$

Si hacemos:

$$L_1 = \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} K_1$$

$$L_2 = \frac{\partial \phi_j^e}{\partial x} K_1$$

$$L_3 = \frac{\partial \phi_k^e}{\partial x} K_1$$

$$M_1 = \frac{\partial \phi_i^e}{\partial y} K_2$$

$$M_2 = \frac{\partial \phi_j^e}{\partial y} K_2$$

$$M_3 = \frac{\partial \phi_k^e}{\partial y} K_2$$

donde:

$$K_1 = (y_j - y_k)/2$$

$$K_2 = (x_k - x_j)/2$$

tendremos:

$$\frac{\partial \hat{u}^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = L_1 u_i + L_2 u_j + L_3 u_k \tag{72}$$

$$\frac{\partial \hat{u}^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = M_1 u_i + M_2 u_j + M_3 u_k \tag{73}$$

Sustituyendo las expresiones (72) y (73) en la ecuacion (69) ob-- tenemos:

$$\iint_R T_{x_i} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\, dxdy + \iint_R T_{y_i} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\, dxdy = A_1 + A_2$$

Para un nodo i dado,

$$A_1 = \iint_R \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} \cup \frac{\partial u^2}{\partial x} \cup \frac{\partial u^3}{\partial x} \cup \ldots \cup \frac{\partial u^E}{\partial x} \right) \cdot \left(\phi_i^{e_1} \cup \phi_i^{e_2} \cup \phi_i^{e_3} \cup \ldots \cup \phi_i^{e_k} \right) dxdy \tag{74}$$

$$A_2 = \iint_R \left(\frac{\partial u^1}{\partial y} \cup \frac{\partial u^2}{\partial y} \cup \frac{\partial u^3}{\partial y} \cup \ldots \cup \frac{\partial u^E}{\partial y} \right) \cdot \left(\phi_i^{e_1} \cup \phi_i^{e_2} \cup \phi_i^{e_3} \cup \ldots \cup \phi_i^{e_k} \right) dxdy \tag{75}$$

Como ϕ_i^e existe solamente para el elemento e, escogeremos los -- $\partial u^e/\partial x$ que son para el mismo elemento que ϕ_i, es decir:

$$A_1 = \iint_{e_1} \frac{\partial u^{e_1}}{\partial x} \phi_i^{e_1} dxdy + \iint_{e_2} \frac{\partial u^{e_2}}{\partial x} \phi_i^{e_2} dxdy + \iint_{e_3} \frac{\partial u^{e_3}}{\partial x} \phi_i^{e_3} dxdy + \ldots + \iint_{e_k} \frac{\partial u^{e_k}}{\partial x} \phi_i^{e_k} \tag{76}$$

donde:

$$\iint_{e_e} T_{x_e} \frac{\partial u^{e_e}}{\partial x} \phi_i^{e_e} dxdy = T_{x_e} \left[\frac{1}{4A_e} (y_j - y_k)^2 \right] u_i^{e_e} + T_{x_e} \left[\frac{1}{4A_e} (y_k - y_i)(y_j - y_k) \right] u_j^{e_e}$$

$$+ T_{x_e} \left[\frac{1}{4A_e} (y_i - y_j)(y_j - y_k) \right] u_k^{e_e} \tag{77}$$

para e=1,2,...,k

Y analogamente:

$$A_2 = \iint_{e_e} T_{y_e} \frac{\partial u^{e_e}}{\partial y} \phi_i^{e_e} dxdy$$

para e=1,2,...,k

$$A_2 = T_{y_e} \left[\frac{1}{4A_e} (x_k - x_j)^2 \right] u_i^{e_e} + T_{y_e} \left[\frac{1}{4A_e} (x_k - x_j)(x_i - x_k) \right] u_j^{e_e} + T_{y_e} \left[\frac{1}{4A_e} (x_j - x_i)(x_k - x_j) \right] u_k^{e_e} \tag{78}$$

entonces:

$$\sum_{e_1}^{e_k} \left[T_{x_e} \left(L_1^{e_e} u_i^{e_e} + L_2^{e_e} u_j^{e_e} + L_3 u_k^{e_e} \right) + T_{y_e} \left(M_1^{e_e} u_i^{e_e} + M_2^{e_e} u_j^{e_e} + M_3^{e_e} u_k^{e_e} \right) \right] = A_1 + A_2 \tag{79}$$

donde k es el numero de elementos que comparten el nodo i y e es el numero de los elementos de acuerdo con la nomenclatura dada -- inicialmente.

Por lo tanto:

$$\iint_R T_{xe}\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\,dxdy+\iint_R T_{ye}\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\,dxdy=\sum_{e_1}^{e_k}\Big[\left(T_{xe}L_1+T_{ye}M_1\right)^{ee}u_i^{ee}$$

$$+\left(T_{xe}L_2+T_{ye}M_2\right)^{ee}u_j^{ee}+\left(T_{xe}L_3+T_{ye}M_3\right)^{ee}u_k^{ee}\Big] \qquad (80)$$

Con respecto al ultimo termino de la ecuacion (69):

$$\iint_R N\phi_i\,dxdy=\iint_R\left(N^1\cup N^2\cup N^3\cup\ldots\cup N^E\right)\left(\phi_i^{e_1}\cup\phi_i^{e_2}\cup\phi_i^{e_3}\cup\ldots\cup\phi_i^{e_k}\right)dxdy$$

$$=\iint_{e_1}N^{e_1}\phi_i^{e_1}\,dxdy+\iint_{e_2}N^{e_2}\phi_i^{e_2}\,dxdy+\cdots+\iint_{e_k}N^{e_k}\phi_i^{e_k}\,dxdy \qquad (81)$$

para i=1,2,....,n
Para un elemento dado,

$$\iint_e N^e\phi_i^e\,dxdy=N^e\iint_e(a+bx+cy)\,dxdy=N^e\Big[\iint_e a\,dxdy+\iint_e bx\,dxdy+\iint_e cy\,dxdy\Big] \qquad (82)$$

De las expresiones (59), (60) y (61) obtenemos:

$$N^e\iint_e a\,dxdy=\frac{(x_jy_k-x_ky_j)}{2A_e}N^e(A_e)=(x_jy_k-x_ky_j)\frac{N^e}{2} \qquad (83)$$

$$N^e b\iint_e x\,dxdy=N^e b\bar{x}A_e=N^e\frac{(y_j-y_k)}{2A_e}\frac{(x_i+x_j+x_k)}{3}A_e=\frac{(y_j-y_k)(x_i+x_j+x_k)}{6}N^e \qquad (84)$$

$$N^e c\iint_e y\,dxdy=\frac{(x_k-x_j)(y_i+y_j+y_k)}{6}N^e \qquad (85)$$

donde hemos considerado a x, y como $\bar{x}$, $\bar{y}$ es decir, un promedio de los valores de coordenadas para el elemento dado.

$$\bar{x} = (x_i + x_j + x_k)/3$$

$$\bar{y} = (y_i + y_j + y_k)/3$$

Entonces la ecuacion (81) quedaria:

$$\iint_R N \Phi_i \, dx dy = (N_1 + N_2 + N_3)^{e_1} + (N_1 + N_2 + N_3)^{e_2} + \cdots + (N_1 + N_2 + N_3)^{e_k}$$

$$= \sum_{n=1}^{k} (N_1 + N_2 + N_3)^{e_n} \qquad (86)$$

donde:

$$N_1 = (x_j y_k - x_k y_j) \frac{N^e}{2}$$

$$N_2 = \frac{(y_j - y_k)(x_i + x_j + x_k)}{6} N^e = \frac{N^e}{6} (x_i y_j + x_j y_j + x_k y_j - x_i y_k - x_j y_k - x_k y_k)$$

$$N_3 = \frac{(x_k - x_j)(y_i + y_j + y_k)}{6} N^e = \frac{N^e}{6} (x_k y_i + x_k y_j + x_k y_k - x_j y_i - x_j y_j - x_j y_k)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{N^e}{6} (x_j y_k - x_k y_j + x_i y_j - x_i y_k + x_k y_i - x_j y_i)$$

donde:

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{N^e}{6} \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix} = \frac{N^e}{6} 2A_e$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{A_e N^e}{3} \qquad (87)$$

Por lo que la ecuacion (86) quedaria:

$$\iint_R N \Phi_i \, dx dy = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{AN}{3} \right)^{e_n}$$

donde k es el numero de elementos que comparten el nodo i.

Y finalmente la ecuacion (69) queda:

$$\sum_{e_1}^{e_k} \left[(T_{x_e} L_1 + T_{y_e} M_1)^{ee} u_i^{ee} + (T_{x_e} L_2 + T_{y_2} M_2)^{ee} u_j^{ee} + (T_{x_e} L_3 + T_{y_e} M_3)^{ee} u_k^{ee} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{AN}{3}\right)^{ee} \right] - W_e = 0 \qquad (89)$$

para i=1,2,....,N.

Expresado matricialmente nos resulta como la solucion de n ecua-- ciones con n incognitas en la forma:

$$\left[\bar{B}\right]\left\{\bar{U}\right\} = \left\{\bar{f}\right\} \qquad (90)$$

APLICACION PARA EL CASO NO ESTABLECIDO (TRANSITORIO).

Considerando la ecuacion (33) en forma total, ya que la variacion con respecto al tiempo interviene en ella, tenemos:

$$T_{x_i}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+T_{y_i}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}-S_i\frac{\partial h}{\partial t}-W_i-N=0 \qquad (33)$$

Segun el metodo de Galerkin:

$$\iint_R \left[T_{x_i}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}+T_{y_i}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}-S_i\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}-W_i-N_i=0 \qquad (91)$$

Los terminos en los extremos de la expresion (91) nos da un resultado similar al de la expresion (89). Y el termino restante:

$$\iint_R S_i\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\Phi_i\,dxdy=\iint_R\left\{\left[S^{e_1}\frac{\partial u^{e_1}}{\partial t}\right]\cup\left[S^{e_2}\frac{\partial u^{e_2}}{\partial t}\right]\cup\cdots\cup\left[S^{e_k}\frac{\partial u^{e_k}}{\partial t}\right]\right\}\Phi_i\,dxdy \qquad (92)$$

$$=\iint_R\left(S\frac{\partial u}{\partial t}\Phi_i\right)^{e_1}dxdy+\iint_R\left(S\frac{\partial u}{\partial t}\Phi_i\right)^{e_2}dxdy+\cdots+\iint_R\left(S\frac{\partial u}{\partial t}\Phi_i\right)^{e_k}dxdy \qquad (93)$$

De la expresion (65):

$$u^e=u_i^e\phi_i^e+u_j^e\phi_j^e+u_k^e\phi_k^e$$

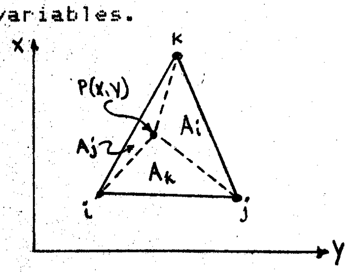
$$\frac{\partial u^e}{\partial t}=\frac{\partial u_i^e}{\partial t}\phi_i^e+\frac{\partial u_j^e}{\partial t}\phi_j^e+\frac{\partial u_k^e}{\partial t}\phi_k^e \qquad (94)$$

Entonces:

$$\iint_e S_e\left(\frac{\partial u_i^e}{\partial t}\phi_i^e+\frac{\partial u_j^e}{\partial t}\phi_j^e+\frac{\partial u_k^e}{\partial t}\phi_k\right)(\phi_i^e)\,dxdy=\iint_e S_e\frac{\partial u_i^e}{\partial t}\phi_i^e\phi_i^e\,dxdy$$

$$+\iint_e S_e\frac{\partial u_j^e}{\partial t}\phi_j^e\phi_i^e\,dxdy+\iint_e S_e\frac{\partial u_k^e}{\partial t}\phi_i^e\phi_k^e\,dxdy \qquad (95)$$

Si sustituimos las expresiones (62),(63) y (64) en la ecuacion -- (95) obtendremos una expresion un poco dificil de evaluar debido a lo indefinido de los limites de integracion, por lo que trataremos con un nuevo concepto para definir al elemento mediante un cambio de variables.



En la figura (17) podemos observar un elemento con un punto P con coordenadas (x,y) localizado en su interior, el cual subdivide al elemento en tres areas apropiadas Ai, Aj, Ak. Podemos definir las variables Li, Lj y Lk como:

$$L_i = \frac{A_i}{A_e}$$
$$L_j = \frac{A_j}{A_e} \qquad (96)$$
$$L_k = \frac{A_k}{A_e}$$

donde Ae = area del elemento.

Podemos observar que si P(x,y) se localiza en el vertice i del elemento, Ai = A y Li = 1, Lj = Lk = 0. Similarmente si se localiza en el vertice j, Aj = A, Lj = 1 y Lk = Li = 0 ; y Ak = A, Lk = 1, Li = Lj = 0 si se localiza en el vertice k.

Dado que los valores de ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k actuan en forma similar, podemos concluir que:

$$\phi_i \equiv L_i \;, \phi_j \equiv L_j \;; \; \phi_k \equiv L_k \qquad (97)$$

Y las integrales en la expresion (95) serian de la forma:

$$\iint_e f(L_i, L_j)\, dL_i\, dL_j$$
$$\iint_e f(L_i, L_k)\, dL_i\, dL_k \qquad (98)$$
$$\iint_e f(L_j, L_k)\, dL_j\, dL_k$$

Como Li = Li(x,y) y Lj = Lj(x,y) puede demostrarse mediante Calculo Superior que con un cambio de variable en integrales llegamos a:

$$\iint_e f(L_i, L_j) dL_i dL_j = \iint_e f\left[L_i(x,y), L_j(x,y)\right] \left| \frac{\partial(L_i, L_j)}{\partial(x,y)} \right| dx dy \qquad (99)$$

donde el determinante es conocido como "Jacobiano en x,y de Li, Lj" definido por:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L_i}{\partial x} & \frac{\partial L_j}{\partial x} \\ \frac{\partial L_i}{\partial y} & \frac{\partial L_j}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial L_i}{\partial x}\frac{\partial L_j}{\partial y} - \frac{\partial L_j}{\partial x}\frac{\partial L_i}{\partial y} \qquad (100)$$

De aqui deducimos que:

$$dL_i\, dL_j = \left| \frac{\partial(L_i, L_j)}{\partial(x, y)} \right| dx dy \tag{101}$$

Y la expresion (100) quedaria:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L_i}{\partial x} & \frac{\partial L_j}{\partial x} \\ \frac{\partial L_i}{\partial y} & \frac{\partial L_j}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{(y_j - y_k)(x_i - x_k) - (x_k - x_j)(y_k - y_i)}{4A_e^2}$$

$$= \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_k y_j + x_k y_k - x_k y_k + x_k y_i + x_j y_k - x_j y_i}{4Ae^2} = \frac{2Ae}{4Ae^2}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L_i}{\partial x} & \frac{\partial L_j}{\partial x} \\ \frac{\partial L_i}{\partial y} & \frac{\partial L_j}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{2Ae} \tag{102}$$

Sustituyendo la expresion (102) en (101) obtenemos:

$$dL_i\, dL_j = \frac{1}{2Ae} dx dy$$

ó

$$dx dy = 2Ae\, dL_i\, dL_j \tag{103}$$

Asi, basados en la expresion (103), podemos decir que los termi-- nos de la ecuacion (95) se comportarian de la siguiente forma:

$$\iint_e S_e L_i^e L_i^e \frac{\partial u_i^e}{\partial t} (2Ae\, dL_i\, dL_j) = 2AeS_e \frac{\partial u_i^e}{\partial t} \int_0^1 \left[\int_0^{1-L_j} (L_i^e)^2 dL_i \right] dL_j \tag{104}$$

Donde podemos observar que el limite de integracion para Li esta en funcion del valor que toma el Lj. Y finalmente obtenemos:

$$2A_e S_e \frac{\partial u_i^e}{\partial t} \int_0^1 \frac{(L_i)^3}{3} \Big|_0^{1-L_j} dL_j = 2AeSe \frac{\partial u_i^e}{\partial t} \int_0^1 \frac{(1-L_j)^3}{3} dL_j$$

$$= -2A_eSe \frac{\partial u_i^e}{\partial t} \frac{(1-L_j)^4}{12} \Big|_0^1 = \frac{2AeSe}{12} \frac{\partial u_i^e}{\partial t} = \frac{AeSe}{6} \frac{\partial u_i^e}{\partial t} \tag{105}$$

Los otros dos terminos de la ecuacion (95) quedarian:

$$2AeSe \frac{\partial u_j^e}{\partial t} \int_0^1 \int_0^{1-L_j} L_j L_i\, dL_i dL_j = 2AeSe \frac{\partial u_j^e}{\partial t} \int_0^1 L_j \frac{L_i^2}{2} \Big|_0^{1-L_j} dL_j$$

$$= 2AeSe \frac{\partial u_j^e}{\partial t} \int_0^1 L_j (1-L_j)^2 dL_j = 2AeSe \frac{\partial u_j^e}{\partial t} \left(\frac{L_j^2}{2} - \frac{2L_j^3}{3} + \frac{L_j^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{A_eSe}{12} \frac{\partial u_j^e}{\partial t} \tag{106}$$

Y para el tercer termino de la ecuacion (95) llegariamos a un resultado similar. Por lo que finalmente la ecuacion (95) quedaria:

$$S_e \iint_R \frac{\partial \hat{u}^e}{\partial t} \Phi_i \, dx dy = \sum_{e_1}^{e_k} \left\{ \left[\frac{AeSe}{6} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right]^{e_r} + \left[\frac{AeSe}{12} \frac{\partial u_j}{\partial t} \right]^{e_r} + \left[\frac{AeSe}{12} \frac{\partial u_k}{\partial t} \right]^{e_r} \right\} \qquad (107)$$

Si hacemos:

$$N_1 = \frac{AeSe}{6} \qquad N_2 = N_3 = \frac{AeSe}{12}$$

Entonces:

$$S_e \iint_R \frac{\partial \hat{u}^e}{\partial t} \Phi_i \, dx dy = \sum_{r=1}^{k} \left\{ N_1 \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right]^{e_r} + N_2 \left[\frac{\partial u_j}{\partial t} \right]^{e_r} + N_3 \left[\frac{\partial u_k}{\partial t} \right]^{e_r} \right\} \qquad (108)$$

Lo cual expresado matricialmente quedaria:

$$S_e \iint_R \frac{\partial \hat{u}^e}{\partial t} \Phi_i \, dx dy = [\bar{C}] \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \qquad (109)$$

Agregando los terminos restantes en la ecuacion (95), apoyados con las expresiones (90):

$$[\bar{B}] \{\bar{u}\} + [\bar{C}] \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = \{\bar{f}\}$$

$$[T_x L + T_y M] \{\bar{u}\} + [C] \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = \{AN - W\} \qquad (110)$$

Haciendo uso de las expresiones (50) y (51) en la ecuacion (110) obtenemos:

$$\frac{1}{2} [\bar{B}] \{\bar{u}'\} + \frac{1}{\Delta t} [C] \{\bar{u}'\} = \{\bar{f}\} - \frac{1}{2} [\bar{B}] \{\bar{u}\} + \frac{1}{\Delta t} [C] \{\bar{u}\} \qquad (111)$$

donde:

$$[\bar{B}] = [T_x L + T_y M]$$

$$\{\bar{f}\} = -\{AN - W\} \qquad (90)$$

o bien:

$$[\bar{D}] \{\bar{u}'\} = \{\bar{f}\} + [\bar{E}] \{\bar{u}\} \qquad (112)$$

donde:

$$[\bar{D}] = \frac{1}{2} [\bar{B}] + \frac{1}{\Delta t} [\bar{C}]$$

$$[\bar{E}] = \frac{1}{\Delta t} [\bar{C}] - \frac{1}{2} [\bar{B}]$$