

III.- CAMINOS PARA OBTENER INFORMACION A PARTIR DE LAS ECUACIONES GENERALES.

1.- CAMINO 1: SIMPLIFICACION DE LAS ECUACIONES Y SOLUCIONES ANALITICAS.

La primera ruta hacia la resolución de problemas actuales esquematizado en la Figura 1, involucra la simplificación de las ecuaciones de cambio tanto como la naturaleza física del problema lo permita, y la solución de la ecuación resultante analíticamente, o, si esto es imposible, numéricamente, usando las condiciones frontera impuestas por el problema. Aún cuando todas las simplificaciones permisibles hayan sido hechas, generalmente las ecuaciones permanecen intratables, excepto en casos muy simples. Cuando esto ocurre, es frecuentemente útil hacer posteriores suposiciones, no justificadas por hechos actuales, pero que reducen el problema general a casos limitantes simples que pueden ser resueltos. De esta manera, puede obtenerse información acerca del comportamiento de la transferencia bajo las condiciones límites, y el comportamiento actual, de interés debe tender hacia esto. Unas pocas de estas formas limitantes de las ecuaciones se muestran en la Tabla VI.

El primer caso considerado es el de un flujo potencial isotérmico de un fluido puro. Aquí, por "fluido puro" se entiende un fluido sin gradiente de concentración, la mezcla aire, es por tanto, un fluido puro. Las suposiciones de que el fluido es puro e isotérmico causan, automáticamente, que las ecuaciones de transferencia de masa y energía sean satisfechas si la disipación viscosa del flujo de energía es despreciable.

TABLA VI. FORMAS DE LAS ECUACIONES 5 PARA CASOS ESPECIALES

ECUACION DE CONTINUIDAD : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

CASO	ECUACION DE MOVIMIENTO	ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MASA	ECUACION DE ENERGIA	Nº.
FLUJO POTENCIAL ISOTERMICO DE UN FLUIDO PURO (EFECTOS DE VISCOSIDAD DESPRECIABLES)	$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$ $= -\nabla \mathcal{P}$ (Ecuación de Euler)			(6a)
FLUJO REPANTE ISOTERMICO DE UN FLUIDO PURO (EFECTOS DE INERCIA DESPRECIABLES)	$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$ (Ecuación de Stokes)			(6b)
CONVECCION FORZADA SIN REACCION QUIMICA (DESPRECIANDO CALOR DE MEZCLADO Y DISIPACION VISC.)	$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$	$\frac{Dw_a}{Dt} = D_{AB} \nabla^2 w_a$	$\frac{DT}{Dt} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T$	(6c)
FINALMENTE, CON GRADIENTES DE PRESION DESPRECIABLES	$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}$	$\frac{Dw_a}{Dt} = D_{AB} \nabla^2 w_a$	$\frac{DT}{Dt} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T$	(6d)

En flujo potencial, se supone que la contribución convectiva (también llamada contribución de inercia), es mucho mayor que la contribución viscosa en la ecuación de Navier-Stokes. Esto puede ocurrir en flujo a altas velocidades o en fluidos con bajas viscosidades. Con esta suposición, la ecuación de Navier-Stokes se simplifica a la forma mostrada en la ecuación 6a, que fue descubierta por Euler. Esto por supuesto, puede ser resuelto con condiciones límite apropiadas para el problema de tal manera que también satisfaga simultáneamente la ecuación de continuidad.

La ecuación de Euler se aplica estrictamente a fluidos no viscosos ideales (los cuales no existen) con vorticidad cero ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$), pero las soluciones de él nos dan información de su comportamiento, el cual es muy aproximado a sistemas reales a números de Reynolds muy grande, especialmente en gases y en flujos fuera de la capa límite. Se han obtenido muchas soluciones de esta ecuación para fluidos ideales pero aquí vamos a considerar únicamente una solución general. Para flujo en estado estable $\rho(\partial \mathbf{v} / \partial t) = 0$, y la ecuación de Euler se transforma en

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P}$$

donde $\mathcal{P} = P + \rho g h$, siendo h la altura referida a un plano. Sin embargo,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \frac{1}{2} v^2 - \mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{v}]$$

Puesto que se consideró que el flujo es irrotacional, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, y

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \frac{1}{2} v^2$$

Para el caso incompresible, por lo tanto,

$$\nabla \frac{1}{2} \rho v^2 = -\nabla \phi$$

y por integración,

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = -\mathcal{P} + \text{CONSTANTE}$$

o

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \mathcal{P} + \rho g h = \text{CONSTANTE}$$

la cual es la ecuación de Bernoulli. Note el gran número de simplificaciones hechas al pasar de la ecuación de conservación general a la ecuación de Bernoulli y que también esta ecuación es de aplicación restringida.

Si se supone lo contrario (que las fuerzas viscosas predominen sobre las fuerzas de inercia lo cual puede ocurrir en un flujo lento de un fluido viscoso), la ecuación de movimiento asume la forma mostrada en la ecuación 6b. Si esta se resuelve para el caso de estado estable con condiciones frontera para el flujo alrededor de una esfera, por ejemplo, la ecuación de Stokes para velocidad terminal de una esfera moviéndose lentamente a través de un líquido viscoso se obtiene.

Si, en una escala mas ambiciosa consideramos transferencia de momentum, de calor y de masa simultáneos y asumimos que los gradientes de presión son despreciables, que no hay reacción química, y que el calor de mezclado y la velocidad de disipación viscosa del flujo de energía son suficientemente chicos para ser despreciables, la ecuación de cambio asume la forma mostrada en la ecuación (6a).

Las ecuaciones de transferencia de momentum, de masa y de calor tienen la misma forma matemática y si las condiciones frontera son similares, la solución de una da la solución de las otras 2 ahorrándose una gran cantidad de trabajo. Estas similitudes forman la base de la mayoría de las analogías entre las transferencias de momentum, masa y calor las cuales han sido una parte muy importante en el desarrollo de problemas de Ingeniería Química. Las simplificaciones hechas para llegar a estas formas de ecuaciones generales va a sugerir algunas de las limitaciones de las analogías.

Después de las varias simplificaciones que han sido hechas para llegar a las formas mostradas en la ecuación (6d), los únicos términos en la ecuación 2 que quedan son los cambios con el tiempo, convectivos y términos de transferencia molecular. Como las 3 ecuaciones generales de transferencia fueran derivadas de la ecuación de conservación y como los términos correspondientes en cada ecuación general han sido retenidos (no han sido despreciados) las ecuaciones resultantes son análogas en su forma.

En el caso especial de un medio estacionario, la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento son satisfechas automáticamente y las otras son simplificadas a

$$\frac{\partial W_a}{\partial t} = D_{ab} \nabla^2 W_a$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T$$

Esta forma de la ecuación ha sido resuelta para un número de geometrías y condiciones límites, y existen una gran cantidad de soluciones tabuladas.

2. - CAMINO 2: ECUACIONES DE VOLUMEN PROMEDIADO. En muchos casos, aún cuando se pueden obtener soluciones exactas, realmente no necesitamos información detallada (o, "microscópica") acerca de velocidades locales, temperaturas, concentraciones y presiones producidas por una solución completa para analizar los efectos globales de un proceso. En lugar de eso, muchas veces es suficiente promediar las ecuaciones de cambio a través del volumen total del sistema por un procedimiento de volumen promediado antes de resolverlas para obtener ecuaciones globales o "macroscópica" de cambio para el sistema considerado como un todo.

Filosóficamente, esto corresponde a procesos que se estudian como una "caja negra". Derivaremos ecuaciones que nos informarán que la producción total de la caja negra se debe a la alimentación y a las condiciones de operación. La debilidad de este método radica en que no se conocen detalles de los procesos de transferencia. Usando este método, no hay manera de hechar una ojeada dentro de la caja negra, mientras que el método analítico del camino 1, cuando se usa nos capacita para ver algunas partes del interior y de esta manera nos proporciona una mejor oportunidad para mejorar la operación del proceso la ventaja del procedimiento de volumen promediado es que produce útiles ecuaciones globales aún para problemas complicados. Vamos a ver el proceso de volumen promediado y a indicar brevemente como pueden usarse algunos de sus resultados.

El procedimiento de volumen promediado consiste simplemente en promediar cada término de la ecuación de cambio sobre el volumen total del sistema y simplificar el resultado. Al llevar a cabo el procedimiento, es necesario usar el teorema de la divergencia de Gauss, por medio del cual las integrales de volumen V del sistema pueden reemplazarse para una integral de superficie S del sistema incluyendo V . Para cantidades escalares, vectoriales y tensoriales, este teorema puede ser escrito como,

$$\int_V (\nabla s) dV = \int_S n s dS \quad (7a)$$

$$\int_V (\nabla \cdot v) dV = \int_S (n \cdot v) dS = \int_S v_n dS \quad (7b)$$

$$\int_V (\nabla \cdot \tau) dV = \int_S (n \cdot \tau) dS \quad (7c)$$

donde n es el vector normal dirigido exteriormente a la superficie. De esta manera muchas de las integrales de volumen son convenientemente expresadas en términos de integrales de superficie, evaluadas sobre la superficie total S del sistema, la cual puede, por ejemplo, representar las superficies límites de un sistema de flujo. Luego es útil dividir la superficie total S de un sistema general en superficies parciales de clase especial: un control de superficie a la entrada y a la salida, S_i y S_o , a través del cual el mate --- rical entra y sale del proceso, una superficie de transferencia de masa S_m , en la que por ejemplo pueden tener lugar reacciones heterogéneas catalizadas, o a través del cual la masa puede ser adhe

rida o removida, una superficie "movil" S_m , por ejemplo, un agitador, un pistón, etc. Por medio de la cual trabajo útil puede removerse del sistema, y el resto de las superficies fijas S_f , que pueden ser mojadas por el fluido. (El trabajo removido del sistema y el calor adherido al sistema se le asignan valores positivos de acuerdo con la usual convención termodinámica.) Por consiguiente,

$$S = S_i + S_o + S_m + S_w + S_f \quad (8)$$

Aquí se asume que las propiedades del fluido no varían significativamente en la entrada y en la salida de las secciones transversales de control, y que el transporte de masa, momentum y energía a través de estas superficies por mecanismos moleculares son pequeños comparados con el transporte debido al flujo global. Generalmente las posiciones de las superficies S_i y S_o pueden seleccionarse de tal manera que estas suposiciones se justifiquen.

Finalmente, usaremos la convención de que el cambio en cualquier cantidad del sistema es dada por

$$\Delta (\text{cantidad}) =$$

$$\begin{array}{cc} \text{valor de la cantidad en la salida} & - & \text{valor en la entrada} \\ \text{(subscrito o)} & & \text{(subscrito i)} \end{array}$$

Si cada término de las ecuaciones generales de conservación de la propiedad intensiva P (Ecuación 2) se integra sobre el volumen del sistema, y si se asume que la superficie del sistema no es móvil, podemos escribir

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) dV = \frac{d}{dt} \int_V P dV = - \int_V \left\{ \nabla \cdot (vP) \right\} dV - \int_V (\bar{v} \cdot \Pi) dV - \int_V (vF) dV + \int_V G dV \quad (9)$$

Usando el Teorema de Gauss y sus relaciones,

$$\frac{d}{dt} \int_V P dV = - \int_S (n \cdot v P) dS - \int_S (n \cdot \Pi) dS - \int_S (n F) dS + \int_V G dV \quad (10)$$

Finalmente, las integrales de superficie pueden desmenuzarse en sus partes componentes en S_i , S_c , S_m , S_w , y S_f dando la forma generalizada de la ecuación macroscópica de conservación para la propiedad general P:

$$\frac{d}{dt} \int_V P dV = - \int_{S_i + S_c} (n \cdot v P) dS -$$

I.- Velocidad total de acumulación de P en el sistema

II.- Velocidad neta de transporte de P en el sistema debido al flujo global a través de la entrada y la salida de los controles de superficie.

$$\int_{S_m} (n \cdot v P) dS - \int_{S_m} (n \cdot \Pi) dS -$$

III.- Velocidad de transporte de P en el sistema debido al flujo global a través de la superficie de transferencia de masa

IV.- Velocidad de transporte de P en el sistema a través de procesos moleculares.

$$\int_{S_f} (n \cdot \Pi) dS - \int_{S_w} (n \cdot \Pi) dS -$$

V.-Velocidad de transporte de P en el sistema por procesos moleculares a través de la superficie fija

$$\int_{S_i + S_o} (nF) dS$$

VII.-Velocidad neta de transporte de P en el sistema debido a fuerzas en la entrada y en la salida de los controles de superficie

$$\int_{S_f} (nF) dS$$

IX.-Velocidad de transporte de P a el sistema debido a fuerzas actuando sobre la superficie fija

VI.-Velocidad de transporte de P en el sistema por procesos moleculares a través de la superficie de trabajo removido:

$$- \int_{S_m} (nF) dS$$

VIII.-Velocidad de transporte de P en el sistema debido a fuerzas actuando sobre la superficie de transferencia de masa.

$$- \int_{S_m} (nF) dS +$$

X.-Velocidad de transporte de P en el sistema debido a fuerzas actuando sobre la superficie de trabajo removido.

$$\int_V G dV \quad (11)$$

XI.-Velocidad total de generación de P dentro del sistema.

Aquí tres de los integrales de superficie han sido omitidos debido a que generalmente son cero:

$$\int_{S_f} (n \cdot v_P) dS = 0$$

(velocidad de transporte de P en el sistema debido al flujo global a través de la superficie fija y la cual se supone que es impermeable e inerte, $n \cdot v = 0$)

$$\int_{S_w} (n \cdot v P) dS = 0 \quad \left(\text{en la superficie de trabajo removido, } n \cdot v = 0 \right)$$

$$\int_{S_i + S_o} (n \cdot \Pi) dS \approx 0 \quad \left(\text{Velocidad neta de transporte de } P \text{ en el sistema debido a transportes moleculares a trav\u00e9s de la entrada y la salida de los controles de su superficie, supuesto despreciable} \right)$$

Las formas asumidas por los varios t\u00e9rminos en la Ecuaci\u00f3n II- para la masa total, masa del componente A, momentum y transferencia de energ\u00eda se muestran en la Tabla VII. Las integrales sobre las superficies $S_i + S_o$ representa el cambio en la cantidad entre la entrada y la salida de las secciones de control, como puede ser ilustrado considerando el t\u00e9rmino II:

$$\begin{aligned} \int_{S_i + S_o} \rho \bar{v}_n dS &= \int_{S_i} \rho \bar{v}_n dS + \int_{S_o} \rho \bar{v}_n dS \\ &= -\rho_{\text{entrada}} \bar{v}_{\text{entrada}} \int_{S_i} dS + \rho_{\text{salida}} \bar{v}_{\text{salida}} \int_{S_o} dS \\ &= \rho_{\text{salida}} \bar{v}_{\text{salida}} S_{\text{salida}} - \rho_{\text{entrada}} \bar{v}_{\text{entrada}} S_{\text{entrada}} \\ &= \Delta (\rho \bar{v} S) \\ &= \Delta \dot{M} \end{aligned}$$

Donde \dot{M} es la velocidad m\u00e1sica de flujo. En este punto hemos asumido, como se dijo anteriormente, que las propiedades de la corriente (aqu\u00ed ρ) son constantes sobre la entrada y a la salida de las secciones transversales, y hemos asignado valores promedio de \bar{v}_n

TABLA VII. FORMAS DE LOS TERMINOS EN LA ECUACION 11 PARA CASOS ESPECIFICOS DE TRANSPORTE EN FLUIDOS INCOMPRESIBLES.

TERMINO EN LA ECUACION 11	MASA TOTAL	MASA DEL COMPONENTE A	MOMENTUM	ENERGIA
$\int \rho dV$ (CANTIDAD TOTAL DE P EN EL SISTEMA)	ρ_T	ρ_{TA}	M_T	$E_T = T \left(U + \frac{1}{2} v^2 + Q \right)$ ENERGIA = ENERGIA INTERNA + ENERGIA CINETICA + ENERGIA POTENCIAL
I	$\frac{dP_T}{dt}$	$\frac{dP_{TA}}{dt}$	$\frac{dM_T}{dt}$	$\frac{dE_T}{dt}$
II	$\int_{S_1+S_2} \rho v_n dS = \Delta(\rho \bar{v} \cdot S) = \Delta T_n$	$\int_{S_1+S_2} \rho_A v_n dS = \Delta(\rho_A \bar{v} \cdot S) = \Delta T_n^A$	$\int_{S_1+S_2} \rho v_n v dS = \Delta(\rho \bar{v} \cdot S) = \Delta \left(\rho \frac{v^2}{2} T \right)$	$\int_{S_1+S_2} \rho v_n dS = \Delta \left\{ \rho \left(\bar{v} \cdot U S + \frac{1}{2} (\bar{v} \cdot S)^2 + Q \bar{v} \cdot S \right) \right\} = \Delta \left\{ \left(U + \frac{1}{2} \frac{v^2}{2} + Q \right) T \right\}$
III	$\int_{S_m} \rho v_n dS = T^{(m)}$	$\int_{S_m} \rho_A v_n dS$	$\int_{S_m} \rho v_n v dS = F^{(m)}$ (Fuerza debida a la transferencia de masa)	$\int_{S_m} \rho v_n dS = \int_{S_m} \rho \left(U + \frac{1}{2} v^2 + Q \right) v_n dS \approx \int_{S_m} \rho U v_n dS$ son iguales comparados con S_m
IV	0	$\int_{S_m} J_{n,p} dS = T_n^{(m)}$	$\int_{S_m} (\rho \cdot n) dS$	$\int_{S_m} q_n dS = \int_{S_m} q_n^{(c)} dS + \int_{S_m} q_n^{(d)} dS$

Tabla XL. CONTINUACION

V	0	0	$\int_{S_f} (\tau \cdot n) ds = F_{visc}$ <p>(Fuerza viscosa total en el sistema.)</p>	$\int_{S_f} q_n ds = \int_{S_f} q_n^{(c)} ds [q_n^{(d)} = 0 \text{ sobre } S_f]^{b}$
VI	0	0	$\int_{S_w} (\tau \cdot n) ds$	$\int_{S_i+S_o} (\pi \cdot v)_n ds = \int_{S_i+S_o} (p v_n) ds + \int_{S_i+S_o} (\tau \cdot v)_n ds$
VII	0	0	$\int_{S_i+S_o} (p n) ds = \Delta (p s)$	$\approx \int_{S_i+S_o} (p v_n) ds = \Delta (p \bar{v} s) = \Delta \left(\frac{p \Gamma}{P} \right)$
VIII	0	0	$\int_{S_m} (p n) ds$	$\int_{S_m} (\pi \cdot v)_n ds = \int_{S_m} (p v_n) ds + \int_{S_m} (\tau \cdot v)_n ds \approx \int_{S_m} (p v_n) ds$
IX	0	0	$\int_{S_f} (p n) ds$	0
X	0	0	$\int_{S_w} (p n) ds$	$\int_{S_w} (\pi \cdot v)_n ds = \dot{W}_z$ <p>(velocidad de propagación de trabajo sobre la superficie S_w debido a fuerzas de atracción y viscosidad)</p>
XI	0	γ_{zn}	$F_{ext} = p_i g$ <p>(si la única fuerza externa es g)</p>	\dot{Q}_z <p>(velocidad total de generación de calor en el sistema)</p>

TABLA VII. CONTINUACION

^a Aunque los términos se han escrito para un sistema binario, también son aplicables a sistemas de multicomponentes.

^b Los términos III, IV, V y VIII pueden combinarse para dar aproximadamente

$$\int_{S_m+S_r} q_n^{(a)} ds + \int_{S_m} [q_n^{(a)} + \rho U v_n + p v_n] ds = -\dot{Q} - \dot{Q}^{(m)} \quad (-\dot{Q} = \text{velocidad total de conducción de calor en el sistema a través de } S_m \text{ y } S_r; -\dot{Q}^{(m)} = \text{velocidad total de transferencia de calor que ocurre como resultado de la transferencia de masa}). \text{ Aquí } q_n^{(d)} \text{ es un efecto de "calor de mezcla", } q^{(d)} = \bar{H}_A J_A + \bar{H}_B J_B.$$

^c Generalmente se escriben como $F_{\text{visc}} + F_{\text{form}} = F_{\text{arrastre}}$ (fuerza total de arrastre)

sobre las secciones de entrada y de salida. Otras integrales sobre $S_1 + S_2$ son tratadas análogamente excepto que en el caso de la transferencia de momentum, S y T son vectores cuyas direcciones se dan en la dirección del flujo. A las otras integrales se le han asignado símbolos a manera de abreviación. El significado de cada símbolo será obvio refiriéndose a los términos originales en la Ecuación 11.

Cuando estos términos se sustituyen en la Ecuación 11, se obtienen las formas finales de las ecuaciones macroscópicas de conservación mostradas en la Tabla VIII. La Tabla VIII también contiene las ecuaciones de balance macroscópico de energía mecánica, que se obtienen ejecutando el producto escalar de la ecuación de movimiento (Ecuación 5c) y la velocidad V y luego se promedian los volúmenes, suponiendo que el fluido es incompresible, que la única fuerza externa que actúa es la gravedad y que un equilibrio químico existe en el sistema. En esta ecuación, W_t representa la velocidad total de transferencia de energía mecánica a los alrededores por la acción de fuerzas viscosas y de presión actuando sobre las superficies, y E_{vt} representa la velocidad total de disipación de energía mecánica (las "perdidas por fricción"). Otros balances macroscópicos pueden también obtenerse para aplicaciones especiales.

El significado de los balances macroscópicos será ahora examinado. La ecuación 12a simplemente expresa el balance de masa global sobre el sistema, y, por lo tanto, no nos produce más información estimulante. La ecuación 12b nos da el balance de masa en estado no estacionario para cada componente en un sistema donde puede haber-

TABLA VIII. FORMAS DE VOLUMEN PROMEDIADO DE LAS ECUACIONES 5

FLUJO INCOMPRESIBLE

Ecuaciones Microscópicas
de conservación de

Nº

MASA TOTAL	$\frac{dP_t}{dt} = -\Delta P + T^{(m)}$	(12a)
MASA DEL COMPONENTE A	$\frac{dP_{Ae}}{dt} = -\Delta T_A + T_A^{(m)} + Y_{TA}$	(12b)
MOMENTUM	$\frac{dM_t}{dt} = -\Delta \left\{ \frac{\bar{v}^2}{\bar{v}} T + pS \right\} + F - F_{\text{arrastre}} + F_{\text{ext}}$	(12c)
ENERGIA (CINETICA + MECANICA)	$\frac{dE_t}{dt} = -\Delta \left\{ \left(u + \frac{1}{2} \frac{\bar{v}^3}{\bar{v}} + c \right) + \left(\frac{p}{\rho} \right) T \right\} + \dot{Q}^{(m)} + \dot{Q}_t + \dot{Q}_e - \dot{W}_t$	(12d)
ENERGIA MECANICA	$\frac{d}{dt} (K_t + Q_t) = -\Delta \left\{ \frac{1}{2} \frac{\bar{v}^3}{\bar{v}} + \frac{p}{\rho} + c \right\} T - \dot{W}_t - \dot{E}_{\text{ext}}$	(12e)

transferencia de masa y ocurrir alguna reacción química. Estas ecuaciones pueden obtenerse directamente simplificando correctamente -- las ecuaciones generales. Los balances macroscópicos de momentum-- y energía son igualmente balances generalizados escritos para situaciones en estado no estable en sistemas fluyentes. Un balance ma--croscópico de energía interna puede obtenerse fácilmente sustrayen--do la Ecuación 12c de la Ecuación 12d, y esto producirá la ecua--ción de balance global de calor para un sistema, usada por todos -- los ingenieros.

Las ecuaciones de volumen promediado producen inmediatamente relaciones prácticas útiles y conocidas. Sin embargo, debido a que no podemos ver dentro de nuestro sistema de "caja negra", teórica--mente no podemos predecir como serán algunos de los términos. Por e--jemplo, la velocidad de disipación viscosa de energía mecánica E_{ν} no puede ser calculada a priori, pero puede expresarse empíricamen--te en términos de un factor de fricción determinado experimentalmen--te. De la misma manera, las velocidades de transferencia de masa y transferencia de calor tienen que expresarse en términos de coefici--entes de transferencia de masa y calor determinados experimentalmen--te, que tratan de incluir una variedad de diferentes tipos de con--portamiento local en un solo factor empírico.

3.- CAMPO 3: EVOLUCIÓN DE TIEMPO PROMEDIADO. En caso de flu--jos turbulentos, el campo de flujo se caracteriza por rápidos y fre--cuentes fluctuaciones de velocidad al azar. Pequeños elementos del fluido aparecen moviéndose en direcciones al azar, distancias al azar y en velocidades al azar impuestas sobre la velocidad global ha--

cia adelante. Estos elementos o remolinos pueden transportar calor, masa o momentum en dirección transversal al flujo. Hay, por lo tanto, presente un mecanismo adicional para transportar estas propiedades que no se presenta en flujos laminares, en los cuales las interacciones entre las capas del fluido en la dirección normal a la dirección del flujo ocurre solamente a nivel molecular a través del transporte viscoso de momentum y el transporte de calor y de masa por conducción y difusión molecular, como se consideró en el camino 1.

En principio, las ecuaciones de cambio obtenidas anteriormente pueden aplicarse también al transporte turbulento. Sin embargo, aún si las ecuaciones de movimiento de Navier-Stokes, por ejemplo, podrían simplificarse para la situación particular que va a ser estudiada y resuelta con condiciones límites apropiadas en cualquier instante, los resultados darían una fotografía instantánea de la distribución de velocidad en ese tiempo. La velocidad instantánea en cada punto dependerá en parte del promedio de la velocidad hacia adelante en ese punto y en parte de la dirección y velocidad de un remolino que pasa por el punto. Un instante después, otra solución dará una fotografía diferente del campo de flujo. Lo mismo se puede decir para los campos de concentración y de temperatura. Tal información no es útil para los propósitos de Ingeniería donde generalmente se desea tener para cada punto su velocidad promedio, su temperatura promedio, y su concentración promedio.

En lugar de resolver primeramente las ecuaciones para un gran número de diferentes instantes de tiempo y luego promediar los ve-

locidades locales instantáneas obtenidas, es mucho más conveniente tomar las ecuaciones de cambio de tiempo promediadas y luego intentar resolverlas aplicando las correctas condiciones límites para obtener valores locales de tiempo promediado de velocidad, presión, concentración y temperatura.

Al llevar a cabo el proceso de tiempos promediados, es necesario seleccionar cuidadosamente el período de tiempo Δt sobre el cual van a ser tomados los promedios.

El procedimiento de las ecuaciones de tiempo promediado es simple. El valor instantáneo local de la velocidad u otro parámetro fluctuante se reemplaza por la suma de la velocidad promedio y una velocidad de fluctuación; por ejemplo,

$$v = \bar{v} + v'$$

donde v representa la velocidad instantánea en el punto en cuestión, \bar{v} representa su valor promedio, definida como

$$\bar{v} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} v dt$$

y v' es la desviación instantánea de v de un valor promedio. De estas definiciones se sigue que

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} v' dt = \bar{v}' = 0$$

Sin embargo, obviamente, el cuadrado de la velocidad de fluctuación promedio no puede ser igual a cero,

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} (v')^2 dt = \overline{(v')^2} \neq 0$$

Si también reemplazamos los valores instantáneos de la pro-

propiedad P, su flujo molecular II, y sus velocidades de generación en las superficies y en el seno del sistema, F, G por las sumas de sus valores promedios y sus partes de fluctuación suponiendo, sin embargo, que la densidad será constante, podemos escribir de nuevo -- las Ecuaciones generales de conservación (2) para la propiedad P como sigue,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} dt + \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \frac{\partial P'}{\partial t} dt = \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{Ia} \qquad \qquad \qquad \text{Ib} \\
 & - \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \left[\frac{\partial (\bar{v}_x \bar{P})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}_y \bar{P})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v}_z \bar{P})}{\partial z} \right] dt - \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{IIa} \\
 & \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \left[\frac{\partial (v'_x \bar{P})}{\partial x} + \frac{\partial (v'_y \bar{P})}{\partial y} + \frac{\partial (v'_z \bar{P})}{\partial z} + \frac{\partial (\bar{v}_x P')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}_y P')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v}_z P')}{\partial z} \right] dt - \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{IIb} \\
 & \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \left[\frac{\partial (v'_x P')}{\partial x} + \frac{\partial (v'_y P')}{\partial y} + \frac{\partial (v'_z P')}{\partial z} \right] dt - \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{IIc} \\
 & \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \left[\frac{\partial (\bar{\Pi}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\Pi}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\Pi}_z)}{\partial z} \right] dt - \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{IIIa} \\
 & \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \left[\frac{\partial (\Pi'_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\Pi'_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\Pi'_z)}{\partial z} \right] dt - \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{IIIb} \\
 & \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} \right] dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \left[\frac{\partial F'}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + \frac{\partial F'}{\partial z} \right] dt + \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{IVa} \qquad \qquad \qquad \text{IVb} \\
 & \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \bar{G} dt + \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} G' dt \qquad \qquad \qquad (13) \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{Va}
 \end{aligned}$$

Todos los términos "a" en esta ecuación comprenden cantidades de tiempo promediadas y pueden tratarse como constantes. Todos los términos "b" son los valores promedios de las partes de desviación de las cantidades, que por definición son iguales a cero y desaparecen. Los términos "c" comprenden los productos de las partes de desviación y consecuentemente, no desaparecen. Haciendo estas simplificaciones, las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = & \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_x \bar{P}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}_y \bar{P}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{v}_z \bar{P}) \right] - \\ & \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\Pi}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\Pi}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\Pi}_z) \right] - \\ & \left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right] + \bar{G} - \\ & \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_x' P'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v_y' P'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v_z' P'}) \right] \quad (14) \end{aligned}$$

Esta es la ecuación general de conservación "turbulenta" para la propiedad P. Comparando esta ecuación con la ecuación general de conservación original en términos de los valores instantáneos de los parámetros, vemos que la nueva expresión es la misma que antes, salvo que las cantidades de tiempo promediadas sustituyen a las cantidades instantáneas, con la excepción de que aparecen 3 términos adicionales que corresponden a las partes de fluctuación.

Sustituyendo en la ecuación 14 los valores de los términos --

mostrados en la Tabla II (ahora usando los valores de tiempo promediados), la ecuación de conservación turbulenta generalizada puede convertirse en la ecuación de conservación turbulenta para la masa total (ecuación de continuidad), masa del componente A, momento y energía los cuales se muestran en la Tabla IX, los flujos turbulentos adicionales denotados por cantidades con asterisco se definen en la Tabla X para el caso de un fluido con densidad constante.

Antes de usar las ecuaciones de transferencia turbulentas mostradas en las Tablas IX y X, es necesario expresar los flujos en función de fuerzas directoras apropiadas y otras cantidades medibles de tiempo promediadas.

Se asume que los flujos de tiempo promediados, \bar{P}_i , \bar{J}_n se definen en la forma usual, excepto que ahora usamos como fuerzas directoras los gradientes de tiempo promediados de concentración, temperatura y velocidad. Así, estos flujos de tiempo promediado pueden expresarse en términos de las usuales propiedades de transporte (supuestas constantes).

Las contribuciones de flujo turbulento, \bar{J}_n^* , \bar{r}^* , \bar{q}^* , presentan, sin embargo, problemas mas serios. Al presente, no se dispone de ningún método para predecir estas cantidades teóricamente como funciones de las propiedades de tiempo promediado de la corriente; siempre es necesario expresarlas empíricamente ha sido un serio obstáculo en el estudio de los procesos de transferencia turbulentos.

A causa de los importantes efectos de la turbulencia sobre los procesos de transferencia en fluidos, una enorme cantidad de --

trabajos se han hecho para estudiar las características de la turbulencia, tratados para predecir la naturaleza del comportamiento turbulento que ocurrirán bajo condiciones especificadas y sobre la manera en que esto afectará la transferencia de momentum, de calor y de masa. Mientras que se ha logrado alguna comprensión sobre algunos mecanismos no existe aún, una teoría satisfactoria que pronostique los flujos turbulentos. Por ahora, únicamente es posible calcular velocidades de transferencia turbulentos haciendo una generalización sobre la base de datos experimentales. Las principales técnicas se dan aquí.

El método más antiguo para tratar con flujos turbulentos comprende los conceptos de Boussinesq de la viscosidad cinemática de remolino, mas tarde generalizada a la difusividad térmica de remolino y a la difusividad de remolino. Este estudio dice que los flujos turbulentos serán proporcionales a las fuerzas directrices correspondientes, expresadas en términos de los gradientes de las cantidades de tiempo promediados. La constante de proporcionalidad es la propiedad de transporte de remolino.

Pronto se encontró que las propiedades de transporte de remolino no son constantes, sino que dependen marcadamente del número de Reynolds de la corriente turbulenta así como de las distancias a las interfaces u objetos sólidos; esta variación tiene que determinarse experimentalmente. Una vez que se tienen los datos experimentales para uno de los procesos de transporte turbulentos, se pueden usar para predecir los otros flujos turbulentos bajo la misma geometría y condiciones de flujo. Debido a que el calor, la ma-

sa y el momento son transportados en una corriente turbulenta por el movimiento de los mismos remolinos, es razonable esperar que -- las 3 propiedades de transporte de remolino tendrán aproximadamente el mismo valor numérico. De aquí, si se conoce la viscosidad cinemática de remolino, esta información puede usarse para predecir la transferencia turbulenta de masa o calor.

El siguiente estudio de problemas de flujo turbulento se basa en el concepto de longitud de mezclado de Prandtl. Prandtl originalmente pensó que la longitud de mezclado de un remolino era una cantidad análoga al recorrido libre medio de una molécula en un gas. Después de recorrer una distancia igual a la longitud de mezclado, se supone que el remolino se une totalmente con el fluido de los alrededores el cual puede tener diferentes propiedades que las del remolino. Se sufre la dificultad que la longitud de mezclado es una marcada función del número de Reynolds y para flujo en un tubo, por ejemplo, varía desde cero en la pared, pasa a través de un máximo y tiende a cero de nuevo en el eje del tubo.

Se obtuvieron una basta cantidad de datos de distribución de velocidad de tiempo promedio para varios tipos de flujos turbulentos en canales y alrededor de objetos sólidos. Tales datos de velocidad pueden generalizarse a los así llamados perfiles universales de velocidad, dando una distribución de la velocidad de tiempo promedio la cual es válida para capas límites en flujos turbulentos totalmente desarrollados. Basados en esta adecuada generalización de los datos experimentales disponibles, se han obtenido ex

presiones para las cantidades de transporte de remolino. Las cuales pueden usarse para calcular los flujos turbulentos que aparecen en las ecuaciones de la Tabla IX. Quizás, la generalización de este tipo mas ampliamente usada es la de Deissler que ha sido usada en una gran variedad de situaciones turbulentas.

Todavía existen otras aproximaciones para los problemas con turbulencias bajo otras condiciones. Gran parte de este trabajo comprende estudios estadísticos acerca de las fluctuaciones; en particular, se han hecho estudios tratando de determinar como las fluctuaciones turbulentas a diferentes tiempos y posiciones se relacionan. Este estudio estadístico ha sugerido algunos mecanismos por los cuales se generan las turbulencias. Sin embargo, estos estudios aún no han producido resultados que sean útiles en la práctica.

Resumiendo, entonces, las ecuaciones generales de conservación pueden ser fácilmente extendidas para cubrir el transporte en corrientes turbulentas escribiendo de nuevo las ecuaciones de conservación obtenidas primeramente para cantidades instantáneas locales en términos de los valores de tiempo promediados, las cuales en tales casos son las cantidades de interés práctico y sumándole las contribuciones debidas a cantidades fluctuantes (los flujos turbulentos). Aunque lo último no puede expresarse teóricamente actualmente podemos predecirlos experimentalmente. Las ecuaciones de transferencia turbulenta pueden entonces simplificarse para la situación particular considerada y puede obtenerse alguna solución que satisfaga las condiciones límites del problema. En principio, los procesos de transferencia turbulentos pueden, por lo tanto, ser

TABLA IX FORMAS DE TIEMPO PROMEDIADO DE LAS ECUACIONES 5

SE ASUME DENSIDAD CONSTANTE Y UN SISTEMA BINARIO

N^o

Ecuación de Transporte Turbulento de

MASA TOTAL	$V \cdot \bar{V} = 0$	(15a)
MASA DEL COMPONENTE A	$\frac{D\bar{P}_A}{Dt} = -V \cdot \bar{J}_A - V \cdot \bar{J}_A^* - \bar{Y}_A$	(15b)
MOMENTUM	$\rho \frac{D\bar{V}}{Dt} = -V \bar{P} + \rho g - V \cdot \bar{P} - V \cdot \bar{P}^*$	(15c)
ENERGIA ^a	$\rho C_p \frac{D\bar{T}}{Dt} = -V \cdot \bar{q} - V \cdot \bar{q}^* + \mu \bar{\Phi} + \mu \bar{\Phi}^* + Q_n \bar{Y}_n$	(15d)

^a $\mu \bar{\Phi}^*$ es un término similar a $\mu \bar{\Phi}$

TABLA X. FORMAS DE LOS FLUJOS TURBULENTOS EN LAS ECUACIONES 15

FLUJO TURBULENTO DE MASA	$\overline{\overline{\overline{T}}}_{JA} = \overline{\overline{\overline{V}}}' \rho'$	(16a)
ESFUERZOS DE REYNOLDS (FLUJO TURBULENTO DE MOMENTUM)	$\overline{\overline{\overline{T}}}' = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\overline{\rho u_x' u_x'}}}' & \overline{\overline{\overline{\rho u_x' u_y'}}}' & \overline{\overline{\overline{\rho u_x' u_z'}}}' \\ \overline{\overline{\overline{\rho u_y' u_x'}}}' & \overline{\overline{\overline{\rho u_y' u_y'}}}' & \overline{\overline{\overline{\rho u_y' u_z'}}}' \\ \overline{\overline{\overline{\rho u_z' u_x'}}}' & \overline{\overline{\overline{\rho u_z' u_y'}}}' & \overline{\overline{\overline{\rho u_z' u_z'}}}' \end{bmatrix}$	(16b)
FLUJO TURBULENTO DE ENERGIA	$\overline{\overline{\overline{Q}}}' = \rho C_p \overline{\overline{\overline{V}}}' T'$	(16c)

atacados de la misma manera que los procesos correspondientes en corrientes laminares.

4.- CAMINO 4: ANALISIS INSPECCIONAL DE LAS ECUACIONES.- A menudo sucede que las ecuaciones de cambio aplicables a un caso dado no pueden resolverse con las condiciones límite apropiadas por alguno de los caminos después de haber hecho todas las simplificaciones -- permitidas en el problema. Que el problema pueda ser descrito por un conjunto de (irresolubles) ecuaciones diferenciales y condiciones límite, sin embargo, significa que se dispone de una cierta cantidad de información y puede obtenerse información útil en forma de grupos adimensionales por medio de un análisis inspeccional de las ecuaciones de transferencia. Este método no debe confundirse con el procedimiento indicado por Rayleigh y los procedimientos de análisis dimensional, los cuales se usan cuando no se cuenta con información acerca del problema uno que solo se dispone de una lista de parámetros importantes.

Una vez que se conocen los grupos adimensionales importantes, es posible planear y probar modelos experimentales eficientes con los que se estudia el problema y analizar los datos experimentales para obtener correlaciones generalizadas y escalar la información a sistemas prácticos. Por supuesto, la cantidad de información que se pueda obtener de esta manera, es pequeña comparada con la que se obtendría teniendo una solución analítica completa de las ecuaciones. Usaremos un procedimiento flexible usado por Hlinkenberg y Macy que presenta algunas ventajas cuando se manejan ecuaciones complejas de transferencia.

En este procedimiento, las ecuaciones de cambio se escriben y las "pseudodimensiones" de cada término se derivan reemplazando las velocidades, longitudes, etc. y recordando que los operadores ∇ , ∇^2 tienen las dimensiones de $1/L$ y $1/L^2$, respectivamente. Este procedimiento se aclarará con los ejemplos mostrados en la Tabla XI.

Debido a que las dimensiones de cada término en la ecuación de cambio (las cuales deben ser dimensionalmente homogéneas) son las mismas, se sigue que dividiendo cada una de las pseudodimensiones de los otros términos por la pseudodimensión de uno de ellos, se producirá un conjunto de grupos adimensionales para el problema.

En este procedimiento, las condiciones límite pueden ser -- tratadas fácilmente, teniendo un poco de cuidado. Esto se muestra mejor con un ejemplo. Supongamos que estamos tratando con -- las ecuaciones de flujo para una situación en la que aparece como condición límite la tensión superficial en la superficie libre. Las dimensiones correctas de cada término en las ecuaciones de flujo como se escriben en la Tabla XIC (parte superior) son -- fuerza / unidad de masa. Las dimensiones de la tensión superficial son fuerza / longitud y estas deben ponerse en las mismas dimensiones que los términos principales dividiendo por $l^2 \rho$, de tal manera que las pseudodimensiones de este término sean $\sigma / l^2 \rho$. Esto es tratado entonces exactamente igual que los pseudodimensiones de los términos principales al formar los grupos adimensionales.

TABLA XI. ANALISIS DIMENSIONAL

A. ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MASA

ECUACION:	$C = - \frac{\partial C_A}{\partial t}$	$-V \cdot V_{CA}$	$+ D_{AB} \nabla^2 C_A$	$+ R_A$	COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA $k_L \times C_A / L$
SIGNIFICADO DE LOS TERMINOS:	VELOCIDAD DE CAMBIO (CON EL TIEMPO)	VELOCIDAD DE CAMBIO POR CONVECCION (INERCIA)	VELOCIDAD DE CAMBIO POR TRANSFERENCIA MOLECULAR (DIFUSION)	VELOCIDAD DE CAMBIO POR REACCION QUIMICA HOMOGENEA	CONDICION LIMITE, TIPO DE COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA
PSEUDO - DIMENSIONES	c/t	Vc/L	$D_{AB} c/L^2$	R	$k_L c/L$
GRUPOS PARA UN CASO GENERAL	$\frac{L^2}{D_{AB} t} \left(\Delta / F_{0m} \right)$	$\frac{VL}{D_{AB}} \left(Pe_{(m)} = Re \cdot Sc \right)$			
OTROS GRUPOS DE TRANSFERENCIA DE MASA	$\frac{Vt}{L} (Ti)$	$\frac{D_{AB} t}{L^2} (Fo_m)$	$\frac{k_L t}{L} (Fo_m \cdot Sh)$	$\frac{R_L}{D_{AB}} (D_{nH})$ $\frac{R_L L}{D_{AB}} (Sh)$	
		$\frac{RL}{Vc} (D_{nH})$	$\frac{R_L (Sh / Pe_m)}{V}$		

TABLA XI. (CONTINUACION)

ECUACION DE TRANSFERENCIA DE CALOR (FLUIDO INCOMPRESIBLE)

ECUACION	$C = - \frac{\partial T}{\partial t}$	$-v \cdot VT$	$+\frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T$	$+\frac{\alpha \phi}{\rho c_p}$	$+\frac{Q_R}{\rho c_p}$	$+\frac{I^2}{\sigma_0 \rho c_p}$	$hT/\rho c_p L$
SIGNIFICADO DEL TERMINO	VELOCIDAD DE CAMBIO CON EL TIEMPO	VELOCIDAD DE CAMBIO POR CONEXION	VELOCIDAD DE CAMBIO POR TRANSFERENCIA MOL ESCALA (CONDUCCION)	VELOCIDAD DE GENERACION POR REACCION QUIMICA	VELOCIDAD DE GENERACION EN EL SENO DEL SISTEMA POR CALIENTA MIENTO DE JUELE	COEFICIENTE DE TORNIL. DE CALOR (h)	CONDICION LIMITE COMPROMIENDO
UNIDAD - DIMENSIONES	T/t	VT/L	$RT/\rho c_p L^2$	$\mu V/\rho c_p L^2$	$Q_R/\rho c_p$	$H_c^2/L^2 \sigma_0 \rho c_p$	$hT/\rho c_p L$
CONJUNTO DE GRUPOS PARA EL CASO GENERAL (TODOS REFERIDOS AL TERMINO DE CONDUCCION)	$\frac{VT}{L}$	$\frac{VL \rho c_p}{k}$ $Re \cdot Pr = Pe_h$ $\frac{\rho c_p L^2}{k t} = \frac{1}{Fo_h}$	$\frac{RT}{\rho c_p L^2}$ $\frac{Q_R L^2}{k T} = Da_{Th}$ $\frac{H_c^2}{\sigma_0 k T} = S \cdot Br \cdot E1 = \frac{N \cdot Br \cdot Re}{Rm^2} = (M_n)^2 Br / Rm^2$ $\frac{hL}{R} = Nu$	$\frac{\mu V}{RT}$ $\frac{Q_R L^2}{k T} = Da_{Th}$ $\frac{H_c^2}{\sigma_0 k T} = S \cdot Br \cdot E1 = \frac{N \cdot Br \cdot Re}{Rm^2} = (M_n)^2 Br / Rm^2$ $\frac{hL}{R} = Nu$	$\frac{Q_R L^2}{k T} = Da_{Th}$ $\frac{H_c^2}{\sigma_0 k T} = S \cdot Br \cdot E1 = \frac{N \cdot Br \cdot Re}{Rm^2} = (M_n)^2 Br / Rm^2$ $\frac{hL}{R} = Nu$	$\frac{H_c^2}{L^2 \sigma_0 \rho c_p}$	$hT/\rho c_p L$
ALGUNOS OTROS GRUPOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR	$\frac{VT}{L} = Th$	$\frac{k t}{\rho c_p L^2} = Fo_h$	$\frac{Q_R L^2}{\rho c_p k T} = \frac{L}{J \cdot R_m}$	$\frac{h t}{\rho c_p L} = \frac{Fo_h \cdot Br}{h}$	$\frac{h t}{\rho c_p L} = \frac{Fo_h \cdot Br}{h}$	$\frac{H_c^2}{L^2 \sigma_0 \rho c_p}$	$\frac{h t}{\rho c_p L} = \frac{Fo_h \cdot Br}{h}$

TABLE XI . (CONTINUACION)

C. ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MOMENTUM (FLUIDO INCOMPRESIBLE)									
ECUACION	$O = -\frac{\partial v}{\partial t}$	$-v \cdot \nabla v$	$\frac{d}{dt} \nabla^2 v$	$-\frac{1}{\rho} \nabla p$	$+g$	$(c + g \frac{\Delta p}{\rho})$	$\frac{\rho}{\rho} (\nabla^2 H)$	$\frac{\rho}{\rho} \times \text{AREA}$ $\rho \times \text{VOLUMEN}$	$\tau \times \text{LONGITUD}$ $\rho \times \text{VOLUMEN}$
SIGNIFICADO DEL TERMINO	VELOCIDAD DE CAMBIO CON EL TIEMPO	VELOCIDAD DE CAMBIO POR CONVECCION	VELOCIDAD DE CAMBIO POR TRANSFERENCIA MOLECULAR	VELOCIDAD DE CAMBIO DEBIDO A FUERZAS DE PRESION	VELOCIDAD DE CAMBIO A LA NATURALIDAD DEL CUERPO	GRAVITACION Y PRESION	MAGNETICA	CONDICIONES LIMITE	ESFUERZO CORTANTE EN LA PARED ESPECIFICADA
DIMENSIONES	V/t	V^2/L	$\mu V/\rho l^2$	l/LP	g	$g \frac{\Delta p}{\rho}$	$\frac{\mu_0 H_0^2}{L\rho}$	$\tau/L\rho$	$\tau/L^2\rho$
CONVECCION FORZADA (CASO GENERAL 1)	$\frac{L^2 P}{\mu t} = \frac{Re}{Th}$	$\frac{VLP}{\mu} = Re$	$\frac{PL}{\mu V} = Re \cdot E_v \rightarrow$	$\frac{gLV}{\mu} = \frac{Fr}{Re}$	$\frac{\mu_0 H_0^2 L}{\mu V} = Re \cdot S$	$\frac{M_A^2}{R_m} = \frac{Re}{J \cdot Ec}$			
CONVECCION LIBRE (CASO GENERAL 2)	$\frac{L^2 P}{\mu t} = \frac{Re}{Th}$	$\frac{VLP}{\mu} = Re$		$\frac{L^2 g \Delta \rho}{\mu V} = \frac{Fr'}{Re}$	$\frac{\mu_0 H_0^2 L}{\mu V} = Re \cdot S$	$\frac{M_A^2}{R_m} = \frac{Re}{J \cdot Ec}$			

C.A.S.O E.S.P.E.C.I.A.L. F.O.R.M.A.C.I.O.N D.E. O.N.D.A.S S.O.B.R.E U.N L.I.Q.U.I.D.O V.I.S.C.O.S.O (E.S.T.A.D.O S.T.A.B.L.E)	$\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$ $\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$ $\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$	$\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$ $\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$ $\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$	$\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$ $\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$ $\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$	$\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$ $\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$ $\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$	$\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$ $\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$ $\frac{L}{V} = \frac{1}{Re}$
A.L.G.U.N.O.S O.T.R.O.S G.R.U.P.O.S A.D.I.M.E.N.S.I.O.N.A.L.E.S P.A.R.A F.L.U.I.D.O	$\frac{V}{L} = Th$ $\frac{V}{L} = Th$ $\frac{V}{L} = Th$	$\frac{V}{L} = Th$ $\frac{V}{L} = Th$ $\frac{V}{L} = Th$	$\frac{V}{L} = Th$ $\frac{V}{L} = Th$ $\frac{V}{L} = Th$	$\frac{V}{L} = Th$ $\frac{V}{L} = Th$ $\frac{V}{L} = Th$	$\frac{V}{L} = Th$ $\frac{V}{L} = Th$ $\frac{V}{L} = Th$

a Grupos adimensionales definidos en la Tabla XIII.

b Cada término tiene significado de velocidad de cambio de molar de A por unidad de vol. por unidad de tiempo.

c Cada término significa velocidad de cambio de la temperatura.

d De la definición de Φ en función del gradiente de velocidad.

e Debido a que $I = V \times H$

* Cada término significa velocidad de cambio de momentum por unidad de masa de fluido (fuerza/unidad de masa). En cada caso considerado, los términos importantes se indican con un asterisco en la primera línea.

cionales.

Las condiciones iniciales en función de los grupos adimensionales se dan generalmente en forma de relaciones de los parámetros iniciales a los subsecuentes. Por ejemplo, en un problema de transferencia de calor en estado no estable con la condición de que la temperatura inicial es T_0 , para los grupos adimensionales se puede tomar T_0/T .

Las ecuaciones de transferencia de masa, calor y momento en función de los grupos adimensionales para fluidos incompresibles con propiedades físicas constantes han sido obtenidas en la Tabla XI; cada una tiene al menos un tipo de condición límite común. Para ilustrar la versatilidad de este método, se han incluido los términos eléctricos y magnéticos y suponemos también que el fluido es un buen conductor.

En las Tablas, se usa la convención de que la pseudodimensión que se divide aparece en la punta de una flecha mientras que la pseudodimensión por la cual se divide aparece en la cola de la flecha. En otras palabras, una flecha dibujada desde la columna para los términos de transporte molecular a la columna para los términos de inercia representa un grupo adimensional cuyo significado es la relación de inercia / transporte molecular. Los grupos formados se identifican sobre las flechas.

La Tabla XII da los grupos adicionales que surgen cuando hay transferencia simultánea de masa, energía y momento. En un problema actual, las ecuaciones diferenciales de partida sobre las cuales el análisis inspeccional es llevado a cabo para simplificarlos tanto como sea posible, con el propósito de que algunos de los térmi-

nos presentes en las ecuaciones generales puedan desaparecer. Sin embargo, el procedimiento es el mismo.

La Tabla XIII da los nombres y definiciones de los grupos adimensionales obtenidos en las Tablas XI y XII. Se usa un sistema de unidades fundamentales basado en la masa, longitud, tiempo, -- grados de temperatura y permeabilidad magnética. Como resultado de esto, la constante dimensional g_c y el equivalente mecánico del calor no aparecen.

Algunas de las ventajas de este procedimiento se muestran en las Tablas. Primero, de una manera simple se obtiene un conjunto completo de grupos adimensionales para el problema (y condiciones límite adecuadas) partiendo de todas las flechas en una columna y asegurándonos que cada una finaliza en la siguiente columna. Si todas las flechas empezaran en cualquier columna se obtendría aparentemente un conjunto diferente de grupos adimensionales, pero estos pueden aún expresarse en términos del primer conjunto tomando productos o relaciones de los primeros grupos. También si 2 o más flechas cubren las mismas distancias que otras flechas, entonces todos los grupos representados por estas flechas no pueden ser independientes. Por ejemplo, en la Tabla XII, solamente 2 de los 3 grupos l , s , y p , pueden ser independientes para un problema dado. Grupos extraños son, por lo tanto, fácilmente evitados.

Una importante es aún due al usar este procedimiento, el significado de cada grupo es inmediatamente claro; esto no siempre es fácil usando el método de Rayleigh o el método del teorema π . De los significados y relaciones de los varios grupos en general son-

te posible hacer importantes simplificaciones a las ecuaciones originales, las cuales pueden entonces asumir una forma que pueda ser resuelta. Por ejemplo la Tabla XIB muestra que el número de Brinkman - representa la relación de la generación de calor por disipación viscosa de energía a la velocidad de conducción de calor. Si el número de Brinkman es pequeño para un problema dado, puede deducirse que sería satisfactorio simplificar la ecuación de transferencia de calor eliminada el término complicado $\mu\phi$. Similarmente, bajo el camino 1 se notó que si el número de Reynolds es además grande, la ecuación de flujo de Navier-Stokes puede reemplazarse por la más simple ecuación de Euler omitiendo la contribución por transferencia viscosa. El uso de estos procedimientos para analizar e interpretar las ecuaciones de transferencia ha aumentado grandemente a medida que se investigan problemas más complicados.

TABLA XII - GRUPOS ADIMENSIONALES QUE SURGEN EN PROBLEMAS CON TRANSFERENCIA SIMULTANEA DE CALOR, DE MASA Y DE MOMENTUM.

	MASA	CALOR	MOMENTUM
TERMINO DE TRANSFERENCIA MOLECULAR	$D_{AB} \nabla^2 C_A$	$\frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T$	$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v$
PSEUDODIMENSIONES	$\frac{D_{AB}}{L^2} (c)$	$\frac{k}{\rho C_p L^2} (T)$	$\frac{\mu}{\rho L^2} (v)$
GRUPOS :			
CALOR + MASA	$\frac{k}{\rho C_p D_{AB}} (L_0)$		
MASA + MOMENTUM		$\frac{\mu}{\rho D_{AB}} (S_c)$	
CALOR + MOMENTUM			$\frac{\mu C_p}{k} (P_r)$
MASA + CALOR + MOMENTUM	DOS DE LOS SIGUIENTES, Le, Sc, Pr		

TABLA XIII - GRUPOS ADIMENSIONALES USADOS EN LAS TABLAS XI y XII

SÍMBOLO	NOMBRE	DEFINICIÓN	SÍMBOLO	NOMBRES	DEFINICIÓN
Br	N° de Brinkman	$\mu V / kT$	M_H	N° de Hartman	$\mu_0 H_0 \tau_0^2 L / \mu$
Ca	N° de Capillary	$\mu V / \sigma$	N	Parámetro de Fuerza magnética	$\mu_0 H_0 \tau_0^2 L / \rho V$
Da_I	N° de Damköhler	$R_0 L / \nu C$	Ne	N° de Newton	$\tau_0 / \rho V^2$
Da_{II}		$R_0 L^2 / D_{AB} C$	N_{Lu}	N° de Nusselt	$h' L / k$
Da_{III}		$Q R_0 L / \rho C_p V T$	Pe_h	N° de Peclet (transf. de calor)	$VL \rho C_p / k$
Da_{IV}		$Q R_0 L^2 / kT$	Pe_m	N° de Peclet (transf. de masa)	VL / D_{AB}
E_c	N° de Eckert	$V^2 / C_p \Delta T$	Pr	N° de Prandtl	$\mu C_p / k$
E_I	N° de Elsasser	$\rho / \mu \tau_0 \mu_0$	Re	N° de Reynolds	$VL \rho / \mu$
E_{Lu}	N° de Euler	$\rho / \rho V^2$	R_m	N° de Reynolds (Magnético)	$\tau_0 \mu_0 L V$
Fe_h	N° de Fourier (transf. calor)	$kT / \rho C_p L^2$	S	N° de Presión magnética	$\mu_0 H_0^2 / \rho V^2$
Fo_m	N° de Fourier (transf. masa)	$D_{AB} t / L^2$	S_c	N° de Schmidt	$\mu / \rho D_{AB}$
Fr	N° de Froude	V^2 / Lg	Si	N° de Sherwood	$k_L L / D_{AB}$
Gr	N° de Grashof	$\rho g L \Delta \rho / \mu^2$	St	N° de Stanton	$h' / \rho C_p V$
J	N° de Joule	$\rho C_p \Delta T / \mu_0 H_0^2$	Th	N° de Thompson	$V t / L$
Le	N° de Lewis	$k / \rho C_p D_{AB}$	We	N° de Weber	$V^2 \rho L / \sigma$

$V =$ VELOCIDAD GENERAL ; $L =$ DIMENSION DE LONGITUD GENERAL