

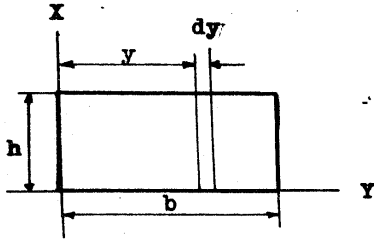
VI.- ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

El presente apartado de actividades de aprendizaje, no son en realidad mas que una combinación de problemas resueltos y propuestos.

Con la generalidad se sugiere que los problemas resueltos sean actividades del maestro en clase y los propuestos en general, actividades del estudiante que podrán ser resueltos en clase o como actividades complementarias a las horas de clase en si.

Fueron seleccionados con la intención de que se cumplieran con mayor amplitud con los objetivos específicos establecidos.

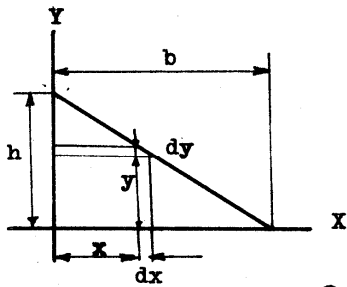
1.1.1. Obtener las coordenadas del centro de gravedad de la sección rectangular mostrada en la figura:



$$M_x = \frac{1}{2} h b^2 \quad M_y = \frac{1}{2} h^2 b$$

$$\bar{X} = \frac{1}{2} b \quad \bar{Y} = \frac{1}{2} h$$

1.1.2. Obtener las coordenadas del centro de gravedad de la sección triangular mostrada en la figura:



$$\frac{h}{b} = \frac{y}{b-x}$$

$$y = \frac{b-x}{b} h$$

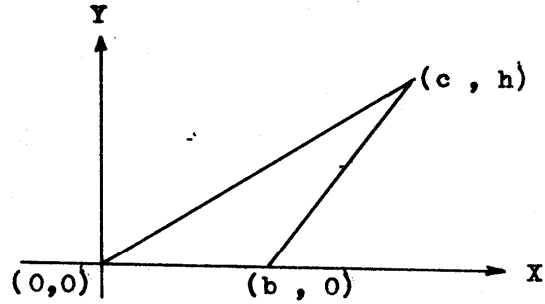
$$x = b \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$$M_x = \int_A y \, dA$$

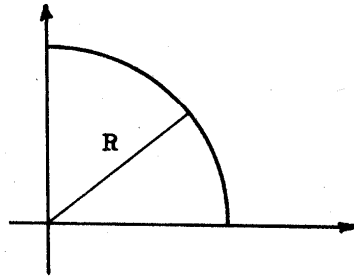
$$M_x = \int_0^h yx \, dy = \int_0^h b \left(1 - \frac{y}{h}\right) y \, dy \quad \dots \quad M_x = \frac{bh^2}{6}$$

$$M_y = \int_A x \, dA \quad \dots \quad M_y = \frac{hb^2}{6}$$

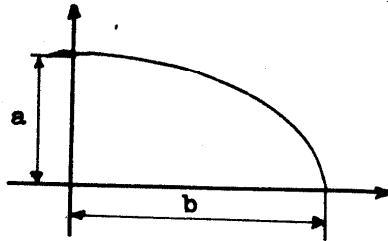
1.1.3. Obtener las coordenadas del centro de gravedad de la sección triangular mostrada en la figura:



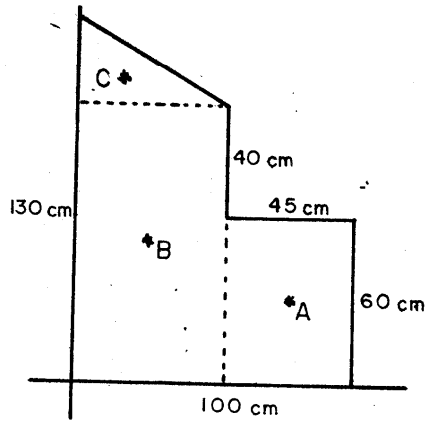
1.1.4. Obtener las coordenadas del centro de gravedad del sector circular mostrado en la figura.



1.1.5. Obtener las coordenadas del centro de gravedad del sector parabólico mostrado en la figura:



1.1.6. Obtener las coordenadas del centro de gravedad del Area mostrada:



$$M_x = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

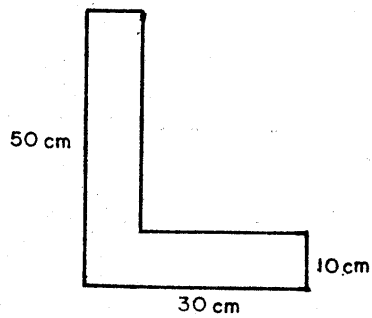
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{377700}{9025} = 41.7$$

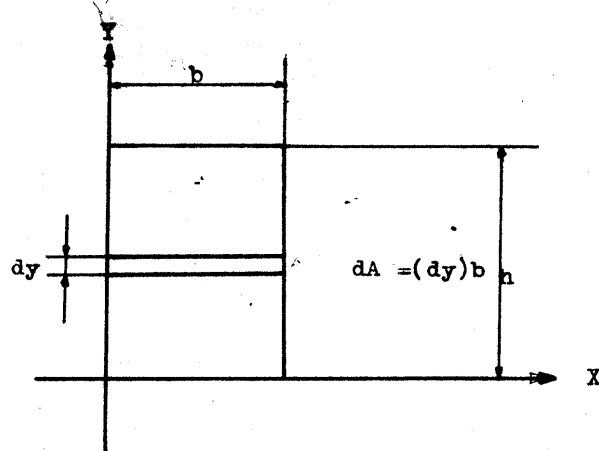
$$\bar{x} = \frac{446750}{9025} = 49.5$$

	Area	\bar{x}	\bar{y}	M_x	M_y
A	2700	77.5	30	81000	210000
B	5500	27.5	50	275000	152500
C	825	18.3	110	90750	15200
Σ	9025	—	—	446,750	377 700

1.1.7. Obtener las coordenadas del centro de gravedad de la Sección mostrada eligiendo 2 sistemas diferentes de ejes:



1.2.1. Obtener los momentos de inercia de la sección rectangular respecto de los ejes coordenados que pasan por los lados como - se muestra en la figura, y el producto de inercia.



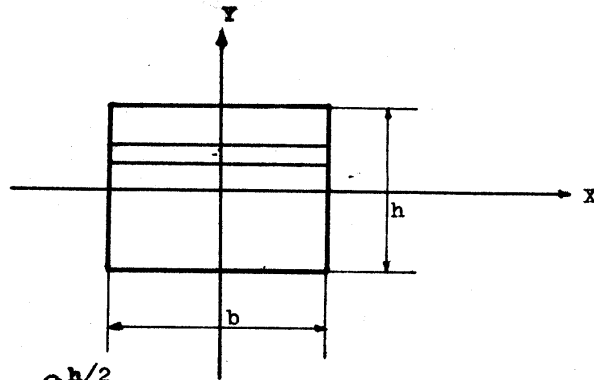
$$I_x = \int_0^h y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = 1/3 by^3$$

$$I_x = 1/3 bh^3 \quad \text{por analogía:} \quad I_y = 1/3 hb^3$$

$$I_{xy} = \int xy dA = \int_0^b \int_0^h xy dx dy = \int_0^b 1/2 h^2 x dx$$

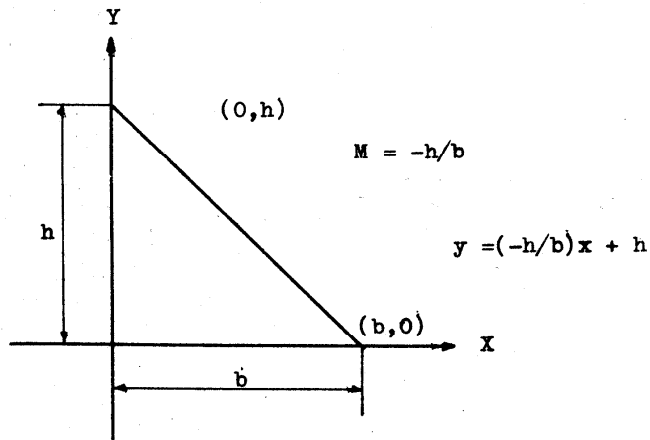
$$\underline{I_{xy} = 1/4 h^2 b^2}$$

1.2.2. Obtener los momentos y el producto de inercia de la sección rectangular respecto de los ejes centroidales como se muestra en la figura:



$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = 1/12 bh^3 \qquad I_y = 1/12 b^3 h$$

1.2.3. Obtener los momentos de inercia de la sección triangular que se muestra en la figura respecto los ejes mostrados. y el producto de inercia.



$$I_x = \int_0^h y^2 c dy \quad c/b = (h-y)/h \quad \dots \quad c = b(h-y)/h$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{Bh - by}{h} dy = 1/h \left[\frac{bhy^3}{3} - \frac{by^4}{4} \right]_0^h$$

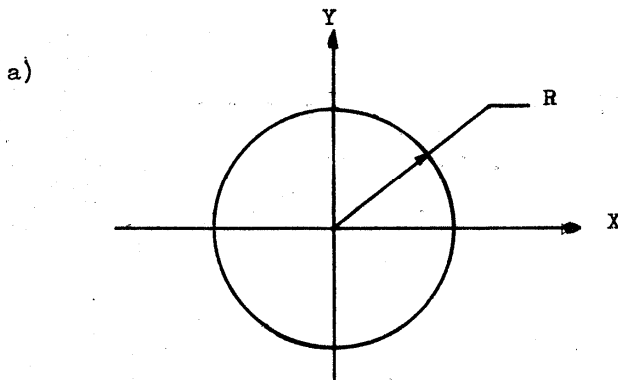
$$I_x = (1/12) bh^3$$

$$I_y = (1/12) b^3 h$$

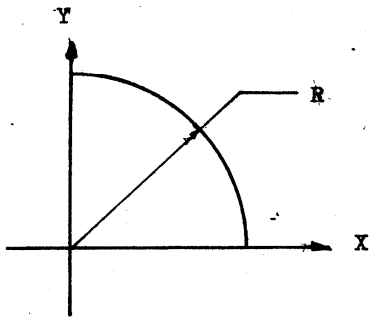
$$I_{xy} = \int_0^b \int_0^{-\frac{h}{b}x + h} xy \, dx \, dy = (1/24) b^2 h^2$$

$$I_{xy} = (1/24) b^2 h^2$$

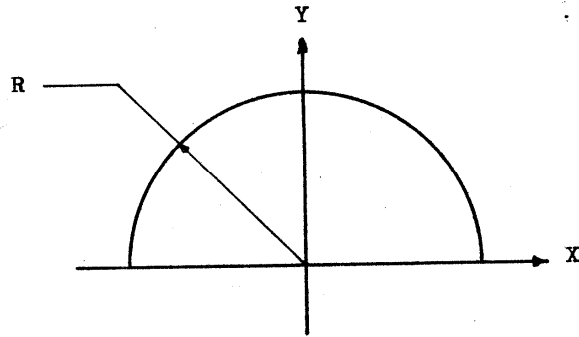
1.2.4. Determinar los momentos de inercia y el producto de inercia de las secciones mostradas, respecto de los ejes indicados.



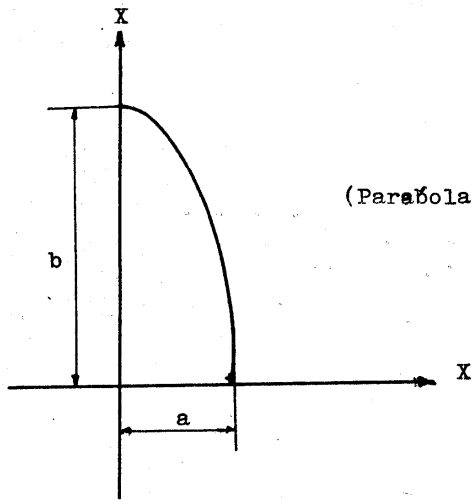
b)



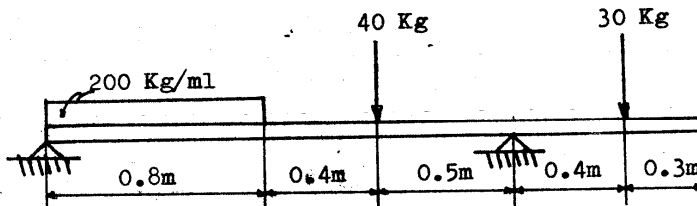
c)



d)

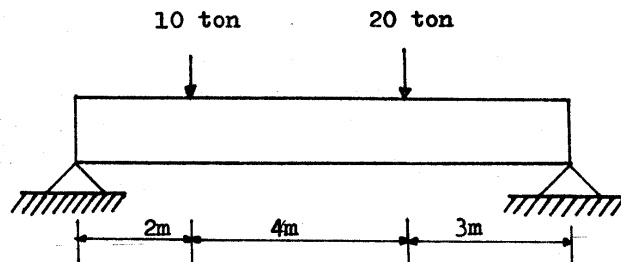


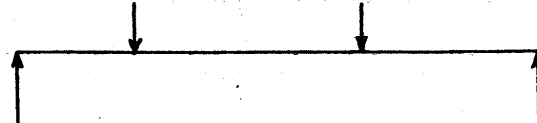
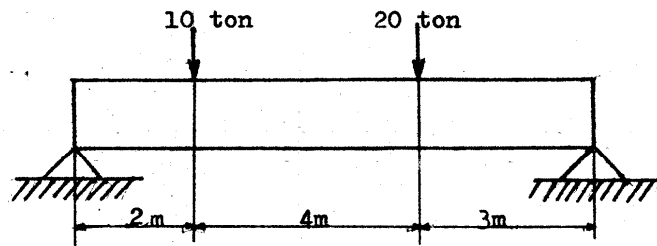
2.4.1. Estableciendo que la fuerza cortante en una sección de una viga es igual a la suma de las componentes verticales de las fuerzas exteriores que actúan a la izquierda de la sección. Determinése la fuerza cortante existente en secciones a cada .3 mts en la viga mostrada.



2.5.1. Considerando al momento flector como la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan en la porción de la viga a la izquierda o a la derecha de una sección, respecto al eje perpendicular al plano de las fuerzas y que pasa por el centro de gravedad de la sección considerada; Determinar el momento flector existente a cada .3m en la viga mostrada en 2.4.1.

2.8.1. Establecer las expresiones que calculan la fuerza cortante en la viga mostrada.





$$R1 = 14.44$$

$$R2 = 15.56$$

$$R1 + R2 = 30 \text{ ton}$$

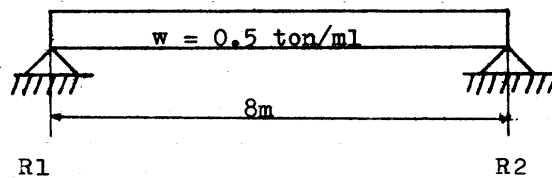
$$(10 \text{ ton})(20 \text{ m}) + (20 \text{ ton})(6.0 \text{ m}) = (9)(R2)$$

$$R2 = 15.56$$

$$R1 = 14.44$$

$$V = \begin{cases} 14.44 & 0 < x < 2 \\ 4.44 & 2 < x < 4 \\ -15.56 & 4 < x < 9 \end{cases}$$

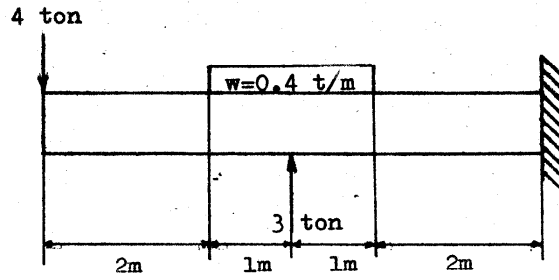
2.8.2. Establecer las expresiones que calculan la fuerza cortante en cualquier punto de la viga mostrada:



$$R1 = R2 = 2 \text{ ton}$$

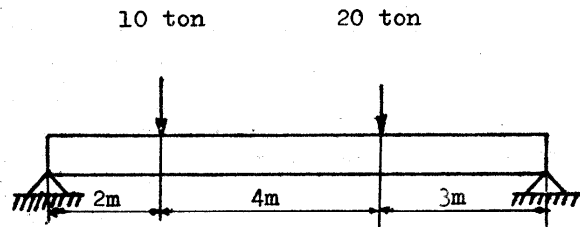
$$V = 2 - 0.5X \quad 0 < X < 8$$

2.8.3. Establecer las expresiones que calculan la fuerza cortante para cualquier sección de la viga mostrada.



$$V = \begin{cases} -4 & \dots\dots\dots 0 < X < 2 \\ -4 - 0.4(X-2) & \dots\dots\dots 2 < X < 4 \\ -4 - 0.4(X-2) + 3 & \dots\dots\dots 4 < X < 6 \\ 1.8 & \dots\dots\dots 6 < X < 8 \end{cases}$$

2.8.4. Establecer las expresiones que calculan el momento flector en cualquier sección de la viga mostrada en 2.8.1.

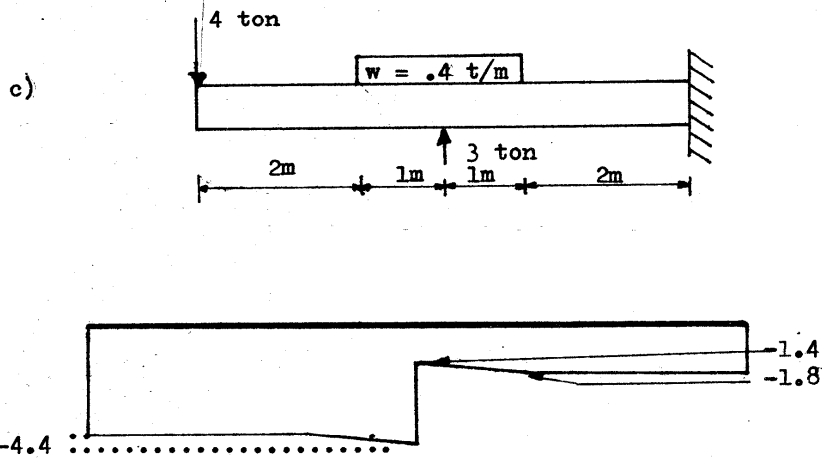


$$V = \begin{cases} 14.44 & \dots\dots\dots 0 < X < 2 \\ 4.44 & \dots\dots\dots 2 < X < 4 \\ -15.56 & \dots\dots\dots 4 < X < 9 \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} 14.44X & \dots\dots\dots 0 < X < 2 \\ 14.44 X - 10(X-2) & \dots\dots\dots 2 < X < 6 \\ 14.44 X - 10(X-2) - 20(X-6) & \dots\dots 6 < X < 9 \end{cases}$$

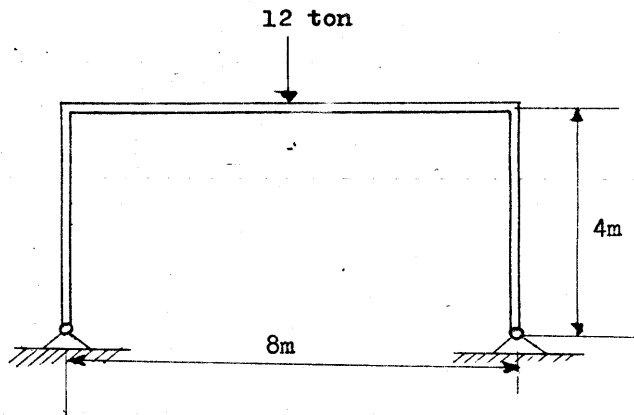
2.8.5. Establecer las expresiones que calculan el momento flector de las vigas mostradas en 2.4.1, 2.8.1, 2.8.2, y 2.8.3.

2.9.1. Construir los diagramas de fuerza cortante de las vigas mostradas en: a) 2.8.1, b) 2.8.2 y c) 2.8.3.

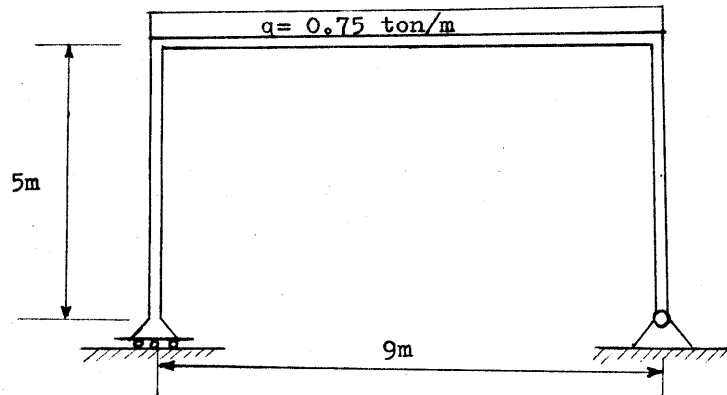


2.9.2. Construir los diagramas de fuerza cortante de cada uno de los miembros de los pórticos mostrados:

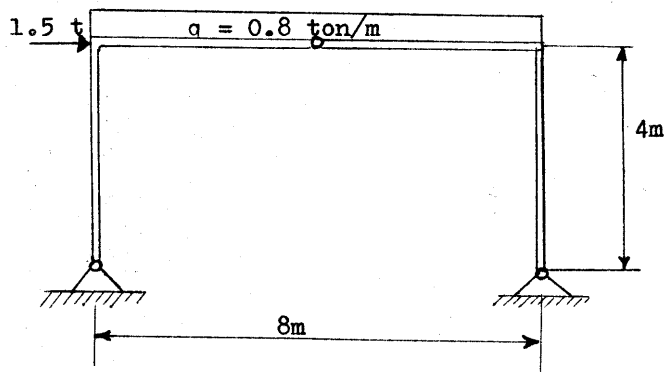
a)



b)



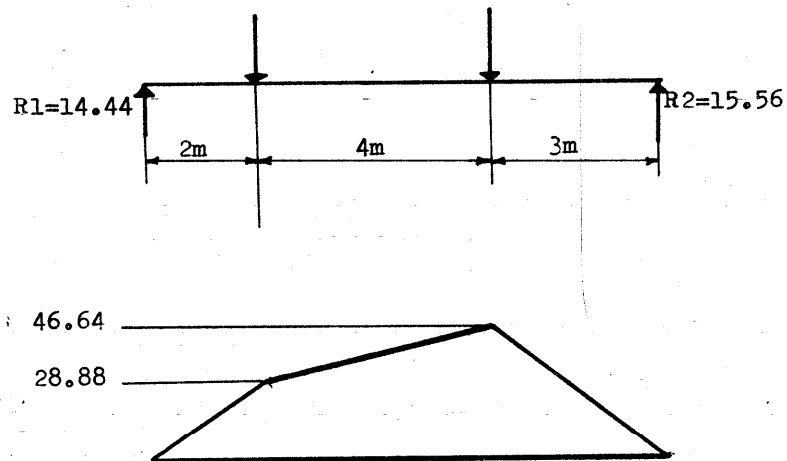
c)



2.9.3. Construir el diagrama de fuerza cortante de la viga mostrada en 2.4.1.

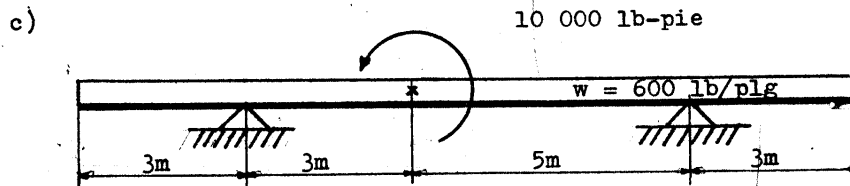
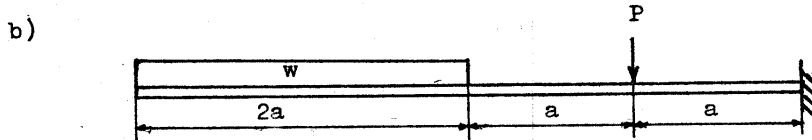
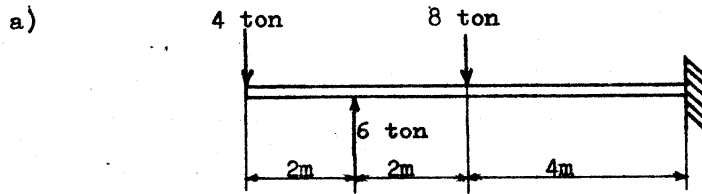
2.9.4. Construir los diagramas de momento flector de cada una de las vigas mostradas en: a) 2.8.1 , b) 2.8.2 y c) 2.8.3.

a)



2.9.5. Construir los diagramas de momento flector de las vigas mostradas en: a) 2.4.1 , b) 2.10.1. y c) 2.9.2.

2.10.1. Construir los diagramas de fuerza cortante de cada una de las vigas mostradas, determinar además, la sección donde se presenta la máxima fuerza cortante y la sección donde se presenta el máximo momento flexionante. Calcúlese también el momento flector en los tercios de las vigas y en el centro de ellas. Todo a partir únicamente de los diagramas de fuerza cortante.



3.1.1. Definir los esfuerzos normal y tangencial para una sección cualquiera en una viga.

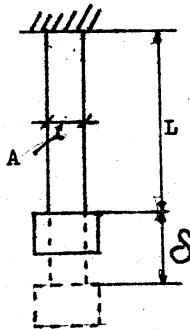
3.1.2. Definir el concepto de deformación en base a los esfuerzos.

3.1.3. Explicar la ley de Hooke y dar los módulos de elasticidad de distintos materiales.:

Ley de Hooke: En un gran número de materiales, las deformaciones son función lineal de los esfuerzos. Robert Hooke 1678 "Ut tensio sic vis" (Como la deformación, así la fuerza)

Robert Hooke explicó su ley en 1678 sin establecer limitaciones de ninguna especie, en la actualidad, se sabe que no todos los materiales son elásticos y además, que los materiales elásticos se deforman en forma proporcional hasta cierto límite, al que se le denomina, de proporcionalidad, el diagrama esfuerzo deformación que aparece en la página siguiente, muestra el límite elástico, (B), el límite de proporcionalidad (A). A partir del límite elástico, el material sufre deformaciones permanentes por lo que deja de ser prácticamente elástico. El diagrama es típico de una barra de acero sometida a esfuerzos hasta la rotura.

Considérese, una barra de un material elástico suspendida de un extremo, de sección A y sometida a la acción de una fuerza uniformemente repartida sobre el otro extremo "F" de tal manera que se desprecie el peso propio de la barra, entonces, la deformación según Hooke será:



Sea

δ : Deformación total

F : Fuerza total

A : Area de la sección.

$$\delta \propto \frac{F L}{A}$$

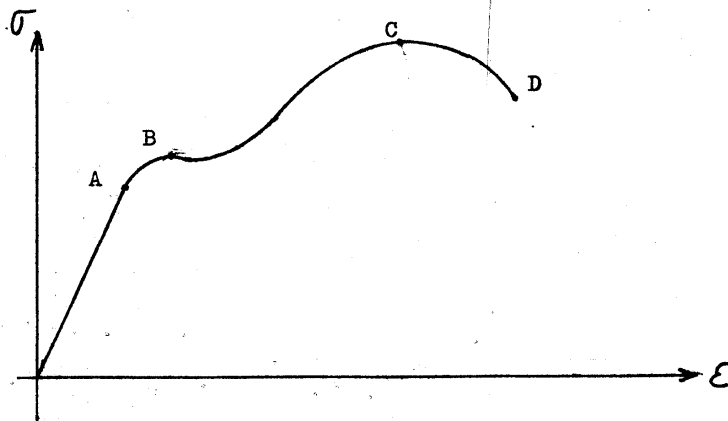
$$\delta = k \frac{F L}{A}$$

$$k = \frac{\delta A}{F L}$$

$$E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\delta}{L}} = k^{-1} = \frac{\sigma}{\epsilon} = E$$

MODULO DE ELASTICIDAD PARA DISTINTOS
MATERIALES :

MATERIAL	E (Kg/cm ²)
ACERO:	2 X 10 ⁶
ALUMINIO:	7 X 10 ⁵
COBRE:	1.1 X 10 ⁶
VIDRIO;	7 X 10 ⁵
MADERA;	1 X 10 ⁵
CONCRETO:	2.8 X 10 ⁵
BRONCE:	8.4 X 10 ⁵



σ_B Fatiga de fluencia.

σ_C Fatiga de rotura.

σ_D Rotura del material

3.2.1. Calcular el alargamiento máximo que experimentan las barras de acero de la máquina mostrada en la figura. -
Cálculé además el diámetro de las barras.

$$\sigma_t = 1\ 000\ \text{Kg/cm}^2$$

$$d = ?$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

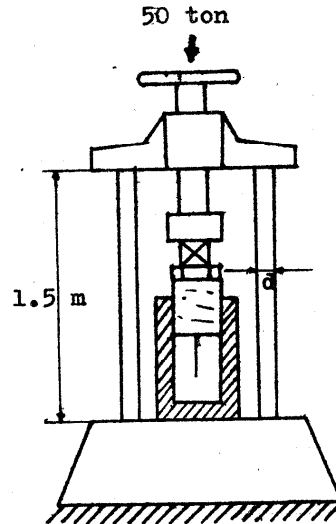
$$A = \frac{F}{\sigma}$$

$$A = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$d^2 = \frac{4 F}{\pi \sigma}$$

$$d^2 = \frac{4 \times 25000}{\pi \times 1000}$$

$$d = 5.68\ \text{cm}$$



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad \Delta L = \frac{\sigma}{E} L = \frac{1000 \times 150}{2 \times 10^6} = 0.75\ \text{mm}$$

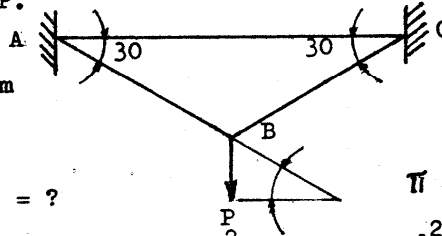
3.2.2. Determinar el descenso del punto B de la figura producido por la carga P.

$$AB = BC = 4.5\ \text{m}$$

$$\text{Sección} = ?$$

$$\text{Descenso de B} = ?$$

$$P = 2500\ \text{Kg y } \sigma_r = 800\ \text{Kg/cm}^2$$



$$\text{Esfuerzo } BC=BA=2500\ \text{K}$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

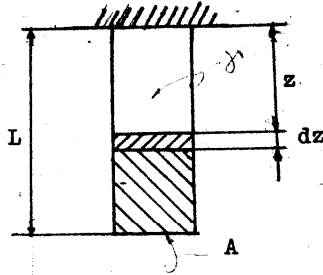
$$\pi \frac{d^2}{4} = \frac{F}{\sigma}$$

$$d^2 = \frac{4 F}{\sigma \pi} = \frac{4 \times 2500}{800 \pi}$$

$$A = 25/8\ \text{cm}^2$$

$$\Delta L = \frac{\sigma L}{E} = \frac{800 \times 450}{2000000} = 0.18\ \text{cm}$$

3.2.3. Determinar el alargamiento total sufrido por la barra debido a su propio peso.



A sección prismática
 L longitud original
 γ peso específico
 δ deformación

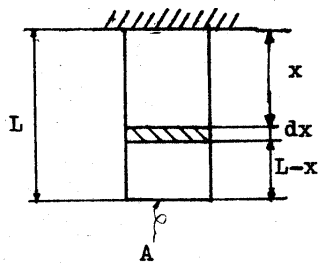
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F/A}{\delta/L} \quad \delta = \frac{F L}{E A}$$

$$\delta = d\delta \quad y \quad F = dP = \gamma A dz$$

$$d\delta = \frac{\gamma A dz L}{E A} \quad \text{integrando:}$$

$$\delta = \frac{\gamma L}{E} \int_0^L dz = \frac{\gamma L}{E} L = \frac{\gamma}{E} L^2$$

$$\delta = \frac{\gamma}{E} L^2$$



$$d\delta = \frac{dP L}{E A}$$

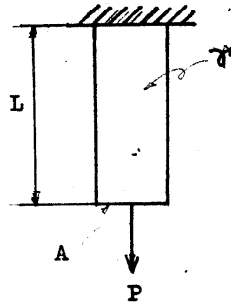
$$d\delta = \frac{\gamma A(L-x) dx}{E A}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{E} \int_0^L (L-x) dx = \frac{\gamma}{E} \left[LX - \frac{x^2}{2} \right]_0^L$$

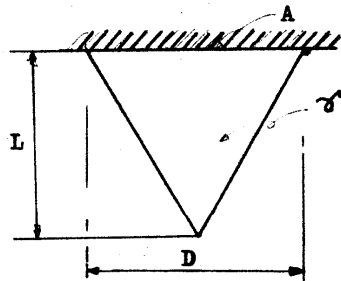
$$= \frac{\gamma}{E} \left[L^2 - \frac{L^2}{2} \right]$$

alargamiento real $\delta = \frac{\gamma L^2}{2E}$ debido a su propio peso

3.2.4. Hallar el alargamiento total de la barra, debido a la fuerza P y a su propio peso.

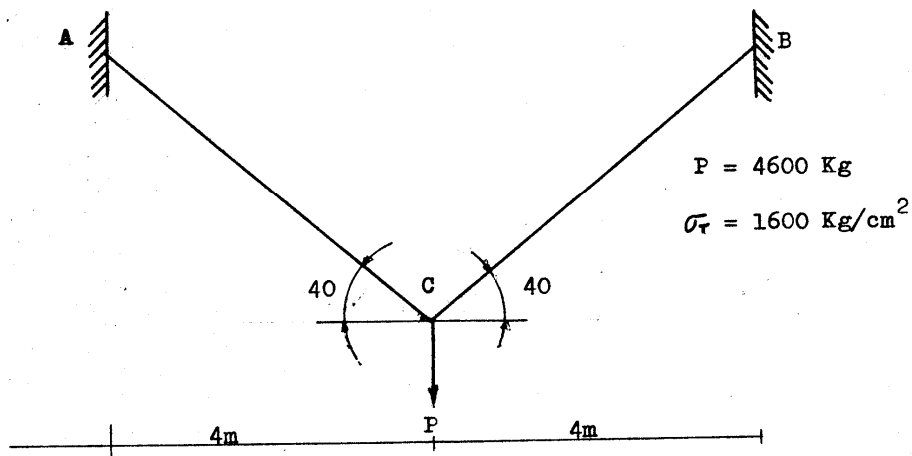


3.2.5. Hallar el alargamiento total del cono debido a su propio peso.



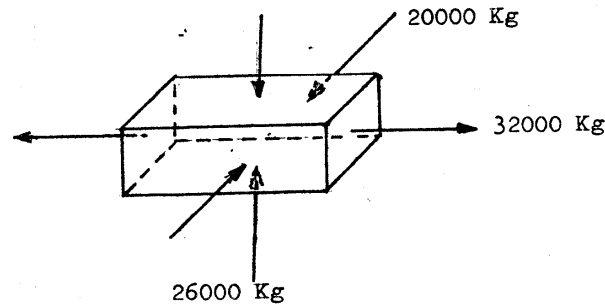
$\delta =$

3.2.6. Hallar el descenso del punto C mostrado en la figura:



3.4.1. Determinar la variación del diámetro de un cilindro macizo de diámetro "d" que soporta una carga axial P.

3.5.1. Determinar la deformación en el sentido X, Y y Z, de la barra rectangular que se muestra en la figura; las fuerzas se consideran uniformemente distribuidas.



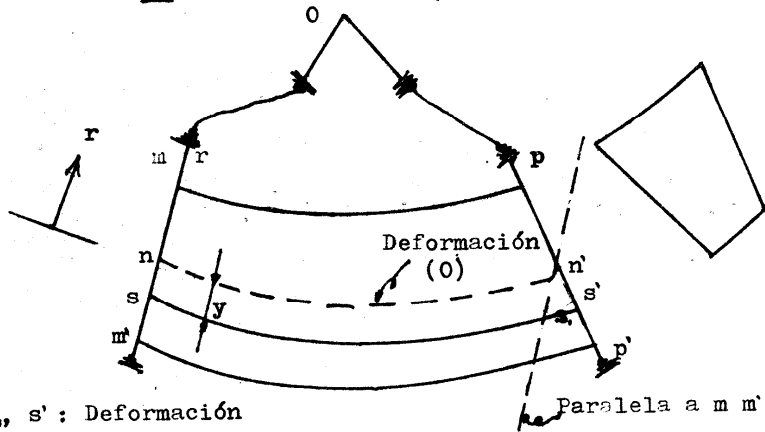
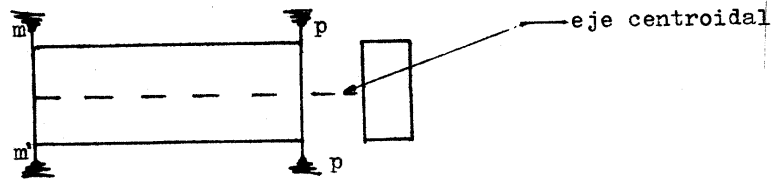
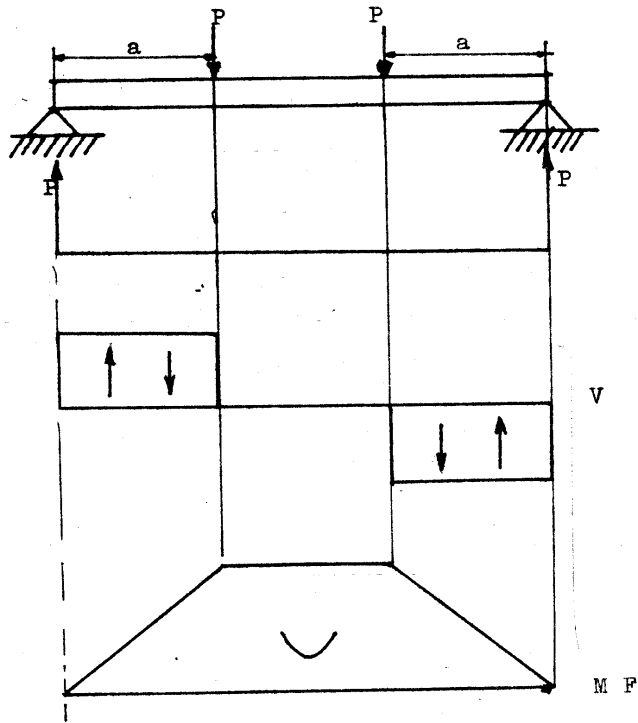
4.1.1. Calcular las tensiones en el concreto y en el acero de una columna cuadrada de concreto armado con 4 varillas de 1/2 ". La columna es de 30 X 30 cm y soporta una fuerza axial de 80 ton.

4.2.1. Determinar la máxima fuerza axial que puede soportar la columna descrita en 4.1.1 si el concreto soporta 100 Kg/cm² y el acero 1400 Kg/cm².

4.3.1. Determinar el esfuerzo que aparece en una varilla de acero sujeta en sus extremos cuando hay un aumento de temperatura de 26 a 54 grados Centígrados, si estando a 26 no aparecían tensiones.

5.2.1. Obtener la fórmula del esfuerzo longitudinal que aparece en una viga sometida a flexión.

Considerando una viga simplemente apoyada, con cargas iguales (P) a los tercios;.....



s, s' : Deformación

Paralela a $m m'$

Por semejanza de triángulos, n o n' y $s'n's$.

$$Y/r = \frac{s, s'}{n n'}$$

$$s, s' = \frac{Y}{r} n n' \quad : \text{deformación}$$

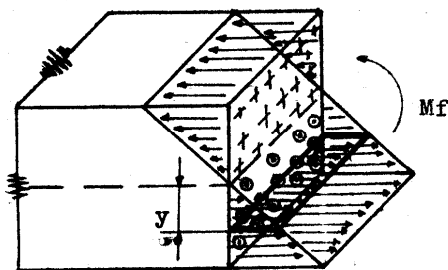
$$\text{deformación unitaria de } s s' = \frac{s, s'}{n n'} = \frac{Y}{r} = \xi \quad (\text{De la geometría de la de-}$$

$$\text{formación})$$

De la relación esfuerzo deformación: $E = \frac{\sigma}{\xi}$

$$\text{y } \sigma = \xi E$$

$$\sigma = \frac{EY}{r}$$



$$\sigma = \frac{E y}{r} = \left(\frac{E}{r}\right)y$$

$$\sigma = \left(\frac{E}{r}\right)y$$

por $\sum FH = 0 \quad dF = \sigma dA = \frac{E y}{r} dA \quad \dots \text{Integrando:}$

$$\int dF = F = \frac{E}{r} \int y dA = 0$$

esfuerzos = cero, en el eje centroidal

$$M_{\text{ext}} = M_{\text{flex}} = M_{\text{int}}$$

$$dM_{\text{int}} = y dF = y \sigma dA = y \frac{E}{r} dA y = \frac{E}{r} y^2 dA$$

$$M_{\text{flex}} = \frac{E}{r} \int y^2 dA = \frac{E}{r} I \quad (I \text{ se toma con el eje perpendicular al plano del dibujo})$$

$$M_f = \frac{E}{r} I \quad \text{pero; } \dots r = EI/M_f \quad \text{y } \sigma = (E y/EI) M_f = M_f y/I$$

$$\sigma = \frac{Mf y}{I}$$

5.3.1. Calcular el módulo resistente de las secciones mostradas en 1.2.1., 1.2.2 y 1.2.3.

5.4.1. Calcular el máximo esfuerzo axial que se presenta por flexión en la viga mostrada y el diagrama de esfuerzos axiales en la sección D.

Por suma de momentos respecto de B: $R_A = 1.8$

Por suma de fuerzas en el sentido vertical: $R_B = 5.4$

$$(0.8)(9) \times (6 - 4.5) = (R_A)(6) :$$

$$R_A = 1.8$$

$$(0.8)(9) = 1.8 + R_B$$

$$R_B = 5.4$$

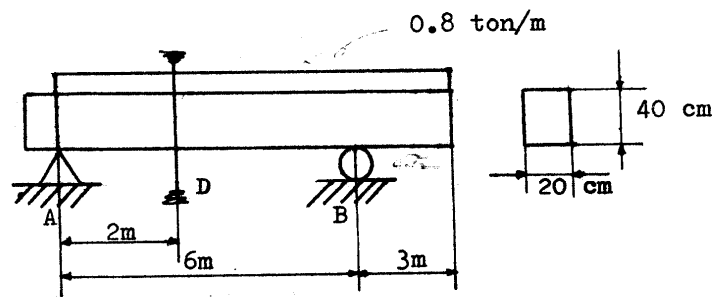
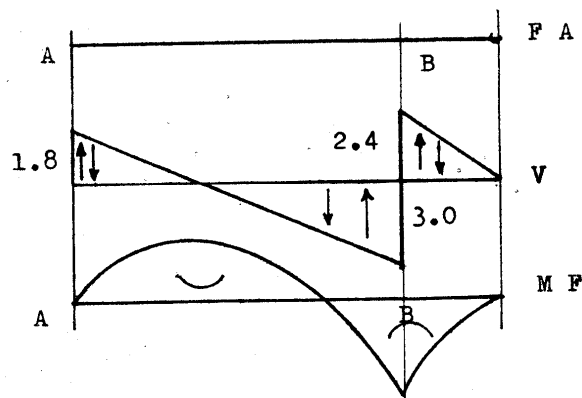


Diagrama de esfuerzos normales en la sección D:



$$M_{AB} = 1.8X - (0.8)(X^2/2) \dots \text{por } \frac{dM}{dX} = 0, X = 2.25 \dots y$$

$$M = 2.02$$

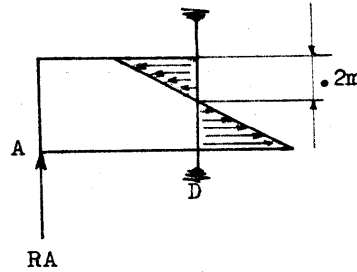
$$M_D = (1.8)(2) - (0.8)(2) = 3.6 - 1.6 = 2 \text{ ton-m}$$

$$\sigma_D = \frac{M y}{I}$$

$$\sigma_D = \frac{(2)(0.2)}{(1/12)(0.2)(0.4)^3} = 375 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_D = 375 \frac{1000}{10^4} \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_D = 37.5 \text{ Kg/cm}^2$$



Esfuerzo máximo normal:

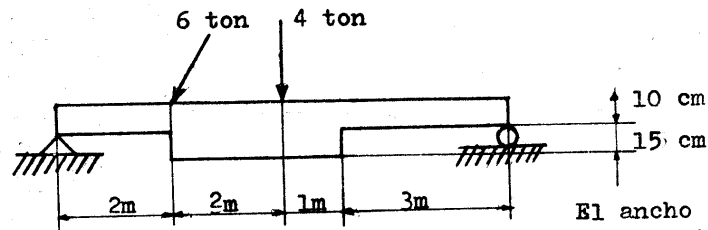
El momento máximo está en B, y $M_B = 3.6 \dots$ por lo tanto:

$$\sigma_m = \frac{(3.6)(0.2)}{(1/12)(0.2)(0.4)^3} =$$

$$\sigma_m = \frac{(360)(12)}{6.4} = 675 \text{ ton/m}^2 = 67.5 \text{ Kg/cm}^2$$

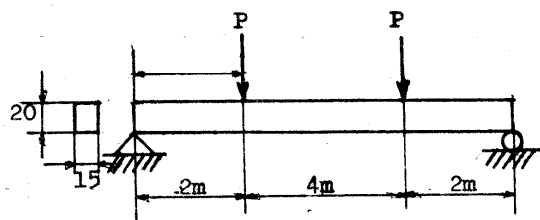
$$\sigma_m = 67.5 \text{ Kg/cm}^2$$

5.4.2. Calcular el máximo esfuerzo axial que se presenta por flexión en la viga mostrada;



El ancho de la viga es uniforme de: 10 cm.

5.4.3. Calcular la máxima carga "P" que puede soportar la viga - mostrada, si $\sigma_m = 1.5 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^2$



$P_{max} = ?$ si $\sigma_{max} = 1.5 \times 10^3$



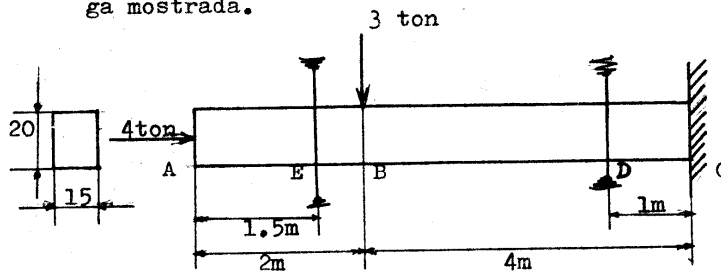
$$\sigma = \frac{M y}{I}$$

$$1500 = \frac{(2P)(10)(10)^2}{(1/12)(15)(20)^3}$$

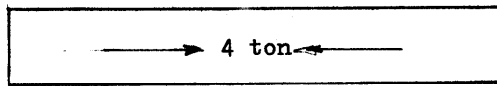
$$P = \frac{(1500)(15)(8000)}{(12)(2)(10)(10)^2}$$

$P = 7500 \text{ Kg}$

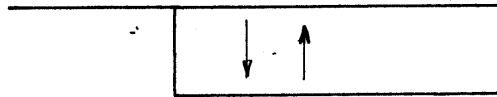
5.4.4. Calcular el máximo esfuerzo axial que se presenta en la viga mostrada.



Calcule además, los esfuerzos maximos en las secciones E y D



F.A.



V

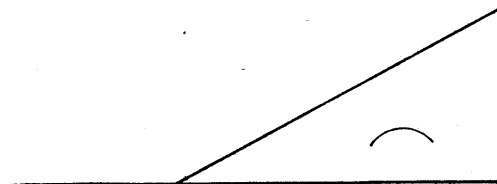
$$\sigma_s = \frac{4000}{300}$$

$$= 13.33 \text{ Kg/cm}^2$$

$$MD = 9 \text{ ton-m}$$

$$\sigma_i = \frac{M y}{I}$$

$$= \frac{(9)(0.1)}{(1/12)(.15)(.2)^3} = 9000 \text{ ton/m}^2 = 900 \text{ Kg/cm}^2$$

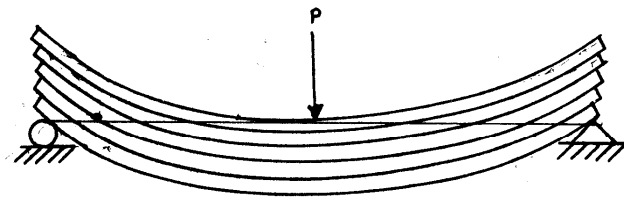


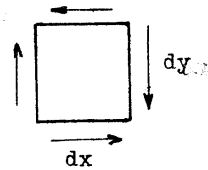
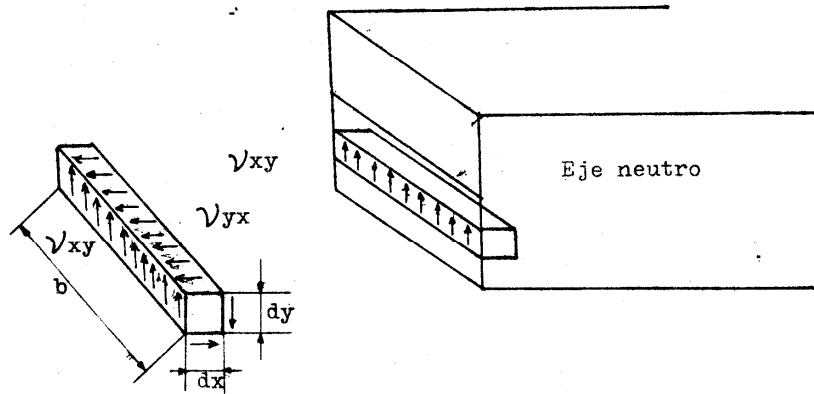
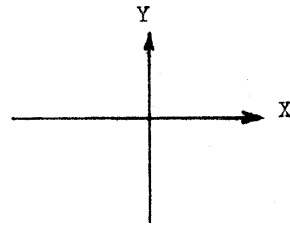
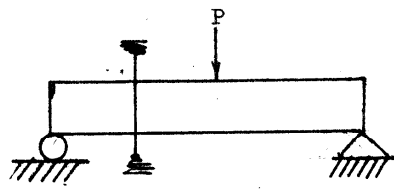
M.F.

$$\text{en la sección D: } 900 \text{ Kg/cm}^2 + 13.33 \text{ Kg/cm}^2 = 913.33 \text{ Kg/cm}^2$$

5.4.5. Diseñar vigas de madera y acero que resistan los esfuerzos que soportan las vigas mostradas en: 2.4.1, 2.8.1, 2.8.2 y 2.8.3. (Al menos 3 secciones).

5.7.1. Deducir la fórmula del esfuerzo cortante horizontal producido por flexión. (Cortante máximo en una sección rectangular.)



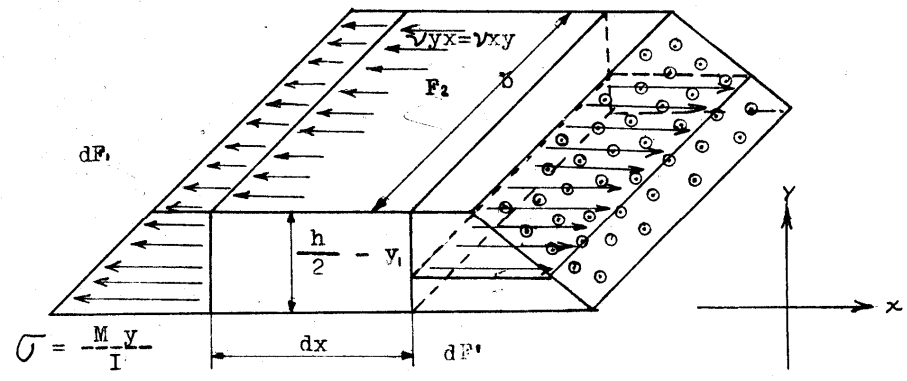
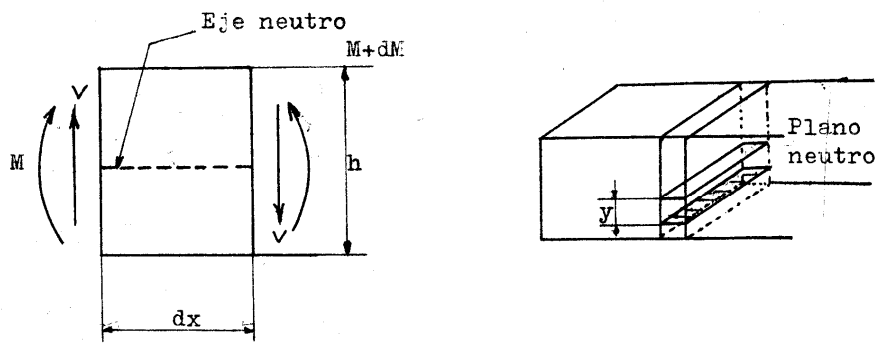
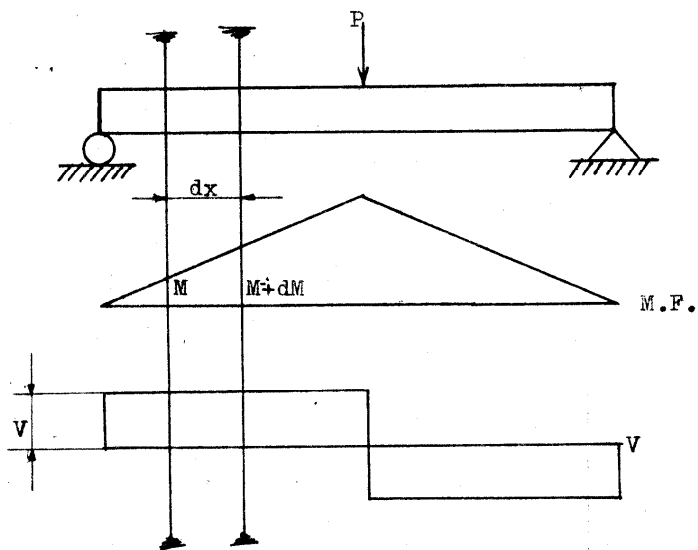


$$M_e = 0 = (\nu_{xy} b dy)dx - (\nu_{yx} b dx)dy$$

$$\nu_{xy} b dx dy = \nu_{yx} b dx dy$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx}$$

o sea, que el esfuerzo cortante que aparece por flexión, en el sentido horizontal, es igual en magnitud al esfuerzo cortante vertical.



$$\sum F_x = 0 \quad F_1 = \int_{y_1}^{h/2} dF_1 = \int_{y_1}^{h/2} \sigma dA = \int_{y_1}^{h/2} \frac{M y_1}{I} dA$$

$$F_1' = \int_{y_1}^{h/2} dF_1' = \int_{y_1}^{h/2} \sigma dA = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+dM) y_1}{I} dA$$

$$F_2 = \int_{xy} b dx$$

$$F_2 = F_1' - F_1$$

$$\int_{xy} b dx = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+dM) y_1}{I} dA - \int_{y_1}^{h/2} \frac{M y_1}{I} dA$$

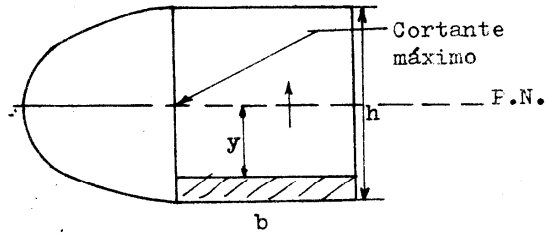
$$\int_{xy} b dx = \int_{y_1}^{h/2} \frac{dM y_1}{I} dA = \frac{dM}{I} \int_{y_1}^{h/2} dA y_1 = Q$$

$$\int_{xy} b dx = \frac{dM}{I} Q = \frac{dM Q}{I b dx}$$

$$\int_{xy} = \frac{(dM/dx) Q}{I b} = \frac{V Q}{I b}$$

$$\underline{\int_{xy} = (VQ)/(Ib)}$$

5.8.1. Deducir la fórmula de la distribución del esfuerzo cortante horizontal en una viga de sección rectangular:



$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right)/2$$

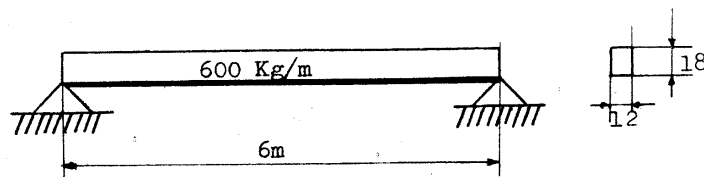
$$Q = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \dots \text{variación parabólica para una sección rectangular. El cortante máximo :...}$$

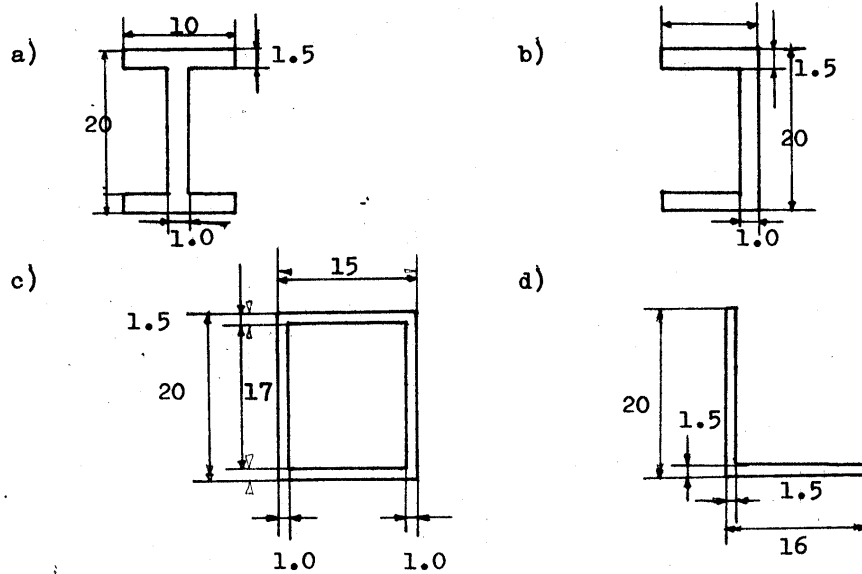
$$\tau_{xy \text{ max}} = \frac{Vh^2}{8I} \dots \text{cuando } y = 0$$

$$\tau_{xy \text{ max}} = \frac{3}{2}\bar{\tau}_{xy} \dots \text{donde: } \bar{\tau}_{xy} = \frac{V}{4I}$$

5.10.1. Calcular la fuerza cortante que se presenta en una viga de 6 m de longitud que soporta una carga uniforme de 600 Kg/m en los tercios de la viga. Y además el máximo esfuerzo cortante - que se presenta. La viga es de sección rectangular de 12 X 18 cm.

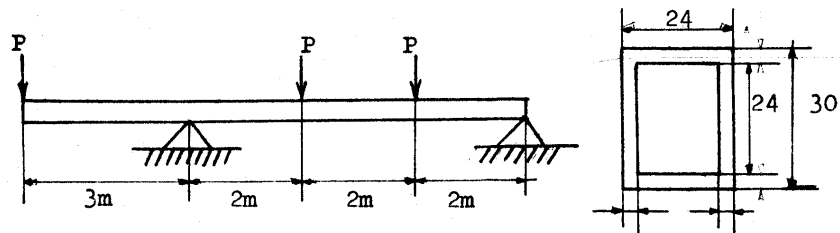


5.11.1. Calcular el esfuerzo cortante máximo que se presenta en la viga mostrada en 5.10.1 para cada una de las siguientes secciones: (Todas las medidas en centímetros.)

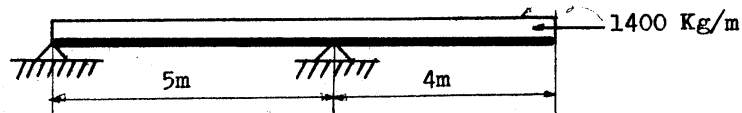


5.12.1. Determinar las dimensiones de una viga de acero "I" que soporte una carga uniformemente repartida de 1200 Kg/cm en un claro de 8 m, simplemente apoyada; si el máximo esfuerzo por flexión es de 1500 Kg/cm² y el máximo cortante permisible es de 750 Kg/cm²

5.12.2. Determinar la máxima carga "P" que soporta la viga de la figura, si $\sigma_{max} = 80 \text{ Kg/cm}^2$... y $\tau = 8 \text{ Kg/cm}^2$.



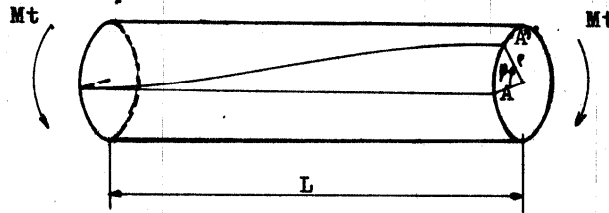
5.12.3. Diseñar una viga "I" con 24cm de ala y 30cm de peralte que soporte las cargas que se muestran en la figura.



6.2.1. Demostrar que el esfuerzo cortante producido por torsión - en una sección circular del cilindro sólido, a una distancia ρ del centro, viene dada por:

$$v = \frac{Mt \rho}{I_p} \dots$$

Dado un árbol con momento torsor en sus extremos:



El punto A se desplaza hacia A', marcando un ángulo φ sobre el centro de la sección. UN punto P a una distancia ρ del - centro marca el mismo ángulo φ pero un distinto arco δ que depende de ρ , así:

$$\delta = \rho \varphi$$

La distorsión (deformación lineal) es: $\gamma = \frac{\delta}{L} = \frac{\rho \varphi}{L}$

La tensión cortante según Hooke es:...

$$v = G \gamma$$

$$v = G \left(\frac{\rho \varphi}{L} \right) = \left(\frac{G \varphi}{L} \right) \rho$$

La fuerza que produce el momento torsor resistente es $v(dA)$ y en una sección cualquiera el momento torsor resistente debe rá ser igual al momento torsor aplicado Mt .

$$M_{tr} = \int \rho (v \, dA) = \int \rho \frac{G \varphi}{L} \rho \, dA$$

$$M_{tr} = \frac{G \varphi}{L} \int \rho^2 \, dA \dots \text{donde } \int \rho^2 \, dA = I_p$$

$$M_t = \frac{G \varphi}{L} I_p \dots \text{de donde:}$$

$$M_t/I_p = G \varphi/L \dots \text{y como } v = \left(\frac{G \varphi}{L}\right) \rho$$

$$v = \frac{M_t}{I_p} \rho$$

6.3.1. Demostrar que el esfuerzo cortante producido por torsión en un tubo de pared delgada está dado por:

$$v = \frac{M_t}{2At}$$

6.4.1. Determinar el esfuerzo cortante máximo, y la deformación máxima que se presenta en una barra de hierro macizo de sección circular de 5 cm de diámetro y longitud de 2.5m sometida a un momento torsor de 185 Kg-m. $G = 800000 \text{ Kg/cm}^2$.

$$v = \frac{18500 \text{ Kg cm}}{61.36 \text{ cm}^4} (2.5)$$

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$I_p = 61.36 \text{ cm}^4$$

$$v = 753.75 \text{ Kg/cm}^2$$

El ángulo girado por una sección de extremo, debido al momento torsor, será de:...

$$\varphi = \frac{(18500 \text{ Kg cm})(250 \text{ cm})}{(61.36 \text{ cm}^4)(800000 \text{ Kg/cm}^2)} = 0.094 \text{ rad.}$$

$$\varphi = 5^\circ 24'$$

6.4.2. Un hierro redondo de 1 cm de diámetro será sometido a un momento torsor. Si $G = 800000 \text{ Kg/cm}^2$ y el ángulo de deformación deberá ser un máximo de 45° . ¿Cual deberá ser la longitud del hierro y cual la magnitud del momento torsor máximo que podrá aplicarse sin que el esfuerzo cortante de trabajo supere el valor de 925 Kg/cm^2 ?

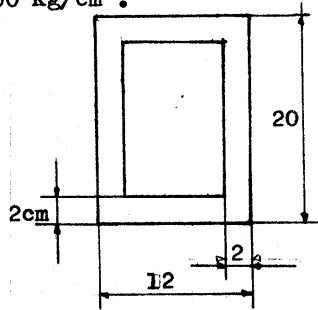
$$\text{de } v = \frac{M_t \rho}{I_p} \dots M_t = \frac{v I_p}{\rho} = \frac{925 \text{ Kg/cm}^2 I_p}{0.5}$$

$$I_p = \pi \frac{(.5)^4}{2} = .098 \dots \quad M_t \text{ max} = 181.62 \text{ Kg cm}$$

$$\text{de } v = \frac{G \phi}{L} \rho \dots \quad L = \frac{G \phi}{v} \rho \dots \quad L = \frac{(800000 \text{ Kg/cm}^2)(.785).5}{925 \text{ Kg/cm}^2}$$

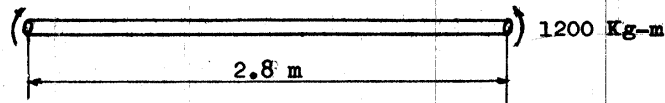
$$L = 339.46 \text{ cm} = 3.39 \text{ mts.}$$

6.4.3. Calcular el momento torsor admisible en una viga de 2.5m de longitud cuya sección se muestra en la figura, si $G=800000 \text{ Kg/cm}^2$ por cm^2 y $v = 750 \text{ Kg/cm}^2$.

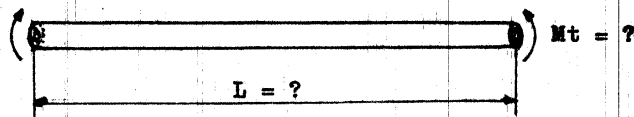


6.4.4. Una barra de 2.8 m de longitud deberá transmitir un momento torsor de 1200 Kg-m. La deformación no deberá ser mayor de 8° . Determine la sección circular resistente si:

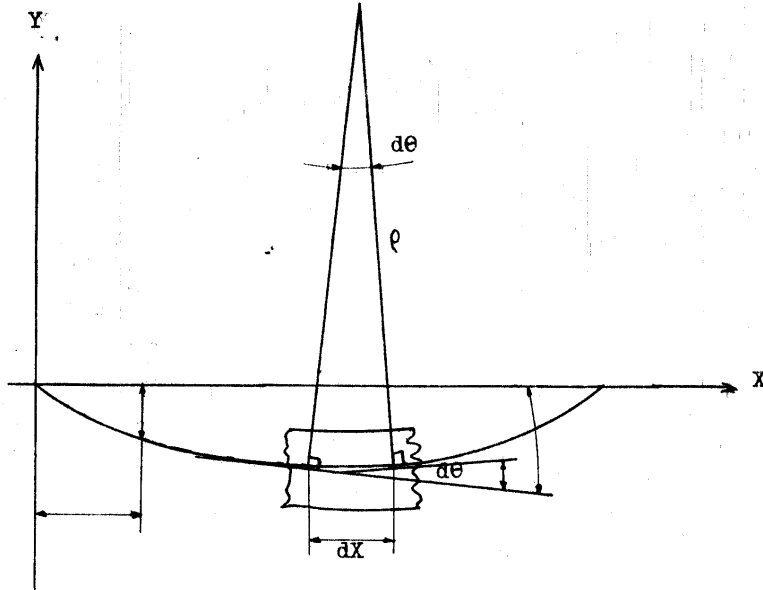
$$G = 800000 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{y} \quad v \text{ adm} = 950 \text{ Kg/cm}^2$$



6.4.5. Una barra hueca de 12 cm de diámetro exterior y 10 cm de diámetro interior está construida con un material cuya $G = 800000 \text{ Kg/cm}^2$ y el esfuerzo cortante admisible es de 1250 Kg/cm^2 . Determine el máximo momento torsor que se puede aplicar y la longitud que deberá tener para que la deformación producida no rebase 5° .



7.2.1. Deducir la ecuación de la elástica de una viga.



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dY}{dX}$$

$$\theta = \frac{dY}{dX}$$

$$\frac{d\theta}{dX} = \frac{d^2Y}{dX^2} \quad \dots \quad \text{Además:} \dots \quad dS = \rho d\theta$$

$$dS = dX$$

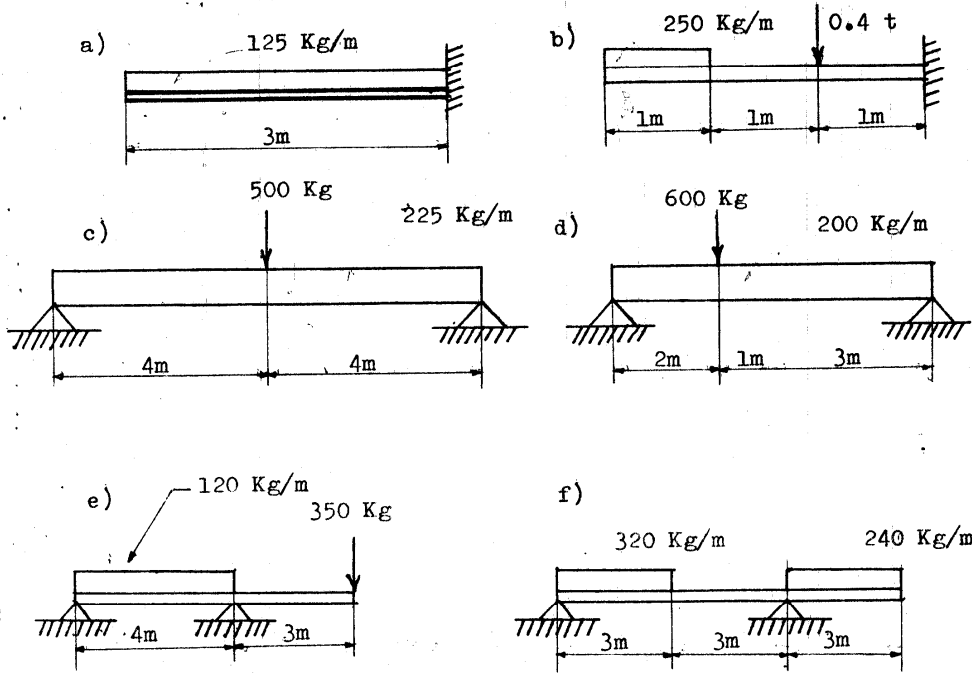
$$1/\rho = \frac{d\theta}{dS} = \frac{d\theta}{dX} \quad \dots \quad \text{por lo tanto:}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2Y}{dX^2} \quad \dots \quad \text{de} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

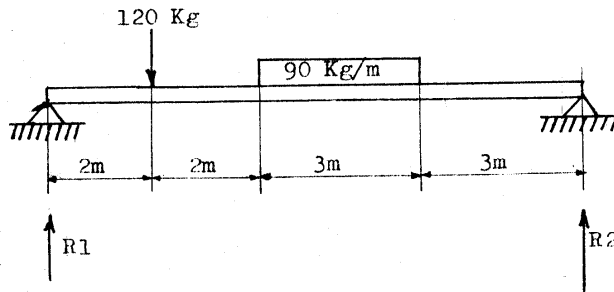
$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{M}{EI}$$

$EI \frac{d^2Y}{dX^2} = M \quad \dots \quad \text{Ecuación diferencial de la elástica de una viga.}$

7.3.1. Hallar una ecuación de momentos válida para toda la viga en cada uno de los casos:



7.4.1. Hallar la ecuación de la elástica de la viga mostrada en la figura:



$$10(R_2) = (120)(2) + (90)(3)(5.5)$$

$$R_2 = 172.5 \text{ Kg}$$

$$R_1 = 217.5 \text{ Kg}$$

$$M = 217.5 X \quad \dots\dots\dots 0 < X < 2$$

$$M = 217.5 X - 120(X-2) \quad \dots\dots\dots 2 < X < 4$$

$$M = 217.5 X - 120(X-2) - (90/2)(X-4)^2 \quad \dots\dots\dots 4 < X < 7$$

$$M = 217.5 X - 120(X-2) - (90/2)(X-4)^2 + \frac{90}{2}(X-7)^2 \quad 7 < X < 10$$

$$EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = 217.5 X - 120(X-2) - 45(X-4)^2 + 45(X-7)^2$$

$$EI \frac{dY}{dx} = \frac{217.5}{2} X^2 - 60(X-2)^2 - 15(X-4)^3 + 15(X-7)^3 + C$$

$$EI Y = \frac{217.5}{6} X^3 - 20(X-2)^3 - \frac{90}{24}(X-4)^4 + \frac{90}{24}(X-7)^4 + CX + C'$$

Si $X = 0$, $Y = 0$ y entonces, $C' = 0$

Además: si $X = 10$, $Y = 0$, entonces:

$$\frac{217500}{6} - 20(8)^3 - \frac{90}{24}(6)^4 + \frac{90}{24}(3)^4 + 10 C = 0$$

de donde $C = 2145.4$

$$EI Y = \frac{217.5}{6} X^3 - 20(X-2)^3 - \frac{90}{24}(X-4)^4 + \frac{90}{24}(X-7)^4 + 2145.4 X$$

7.4.2. Hallar la ecuación de la elástica de cada una de las vigas mostradas en 7.3.1.

7.5.1. Demostrar:

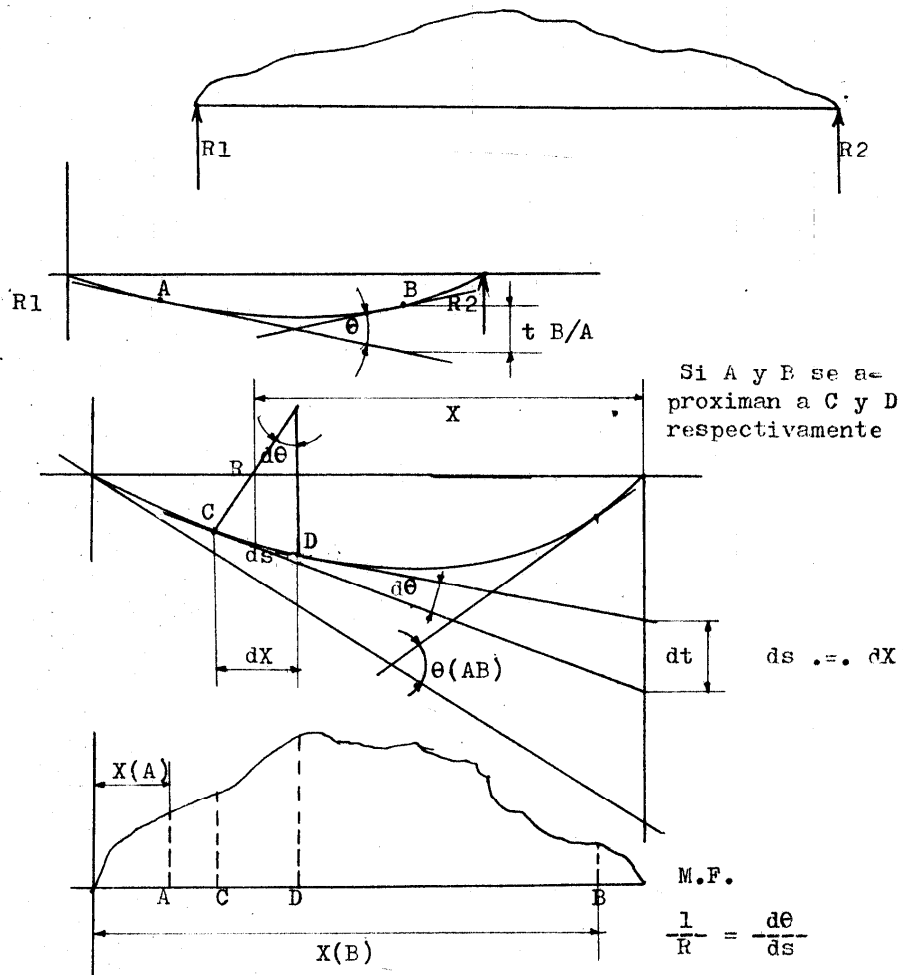
A)- Que la variación de la pendiente de la elástica desde un punto A hasta un punto B, es igual en magnitud al producto de $1/EI$ por el área comprendida en el diagrama de momentos entre las secciones A y B.

B)- Que la desviación de un punto B respecto de la tangente del punto A de la elástica, es igual en magnitud al producto de $1/EI$ por el momento estático con respecto de B del area del diagrama de momentos comprendida entre las secciones A y B.

A)- Considérese una viga sometida a un sistema cualquiera - de cargas:

La viga se supone de sección constante.

$t_{B/A}$ es la desviación de B respecto de A.



$$d\theta = \frac{M}{EI} ds \dots \text{Integrando:} \dots$$

$$\theta_{A,B} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} M dx$$

Primer teorema del Area de momentos:

$$\theta(AB) = (1/EI)(\text{Area del diagrama de M.F. desde A a B})$$

B)-

$$dt = X d\theta \quad \text{y} \dots \quad d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

$$dt = \frac{XM}{EI} dx$$

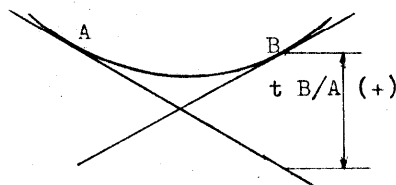
$$t_{B/A} = \int_{x_A}^{x_B} dt$$

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} \bar{x} M dx$$

Segundo teorema de Area de momentos:

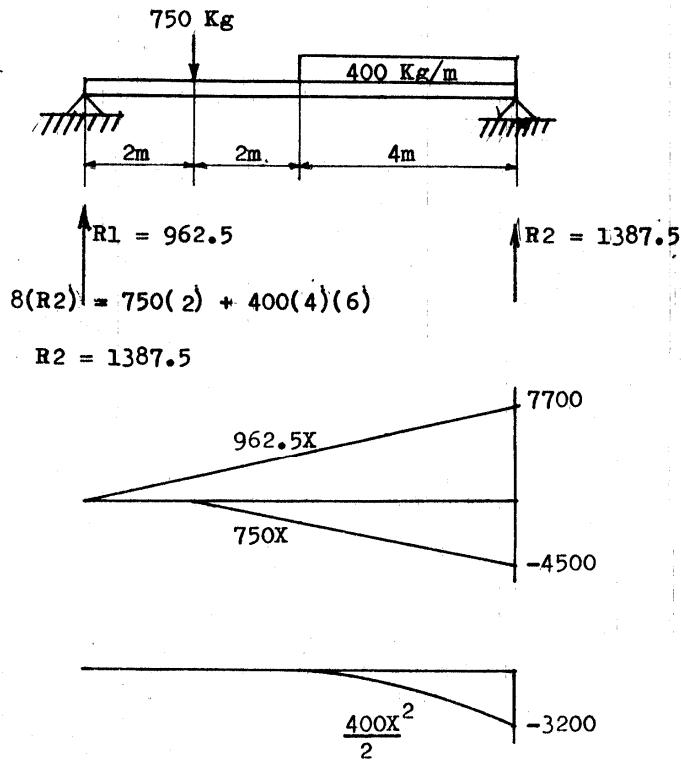
$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} (\text{Momento estático con respecto de B del area del diagrama de momentos desde A hasta B})$$

Convención de signos:

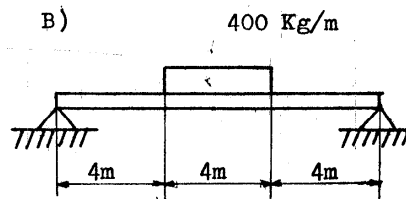
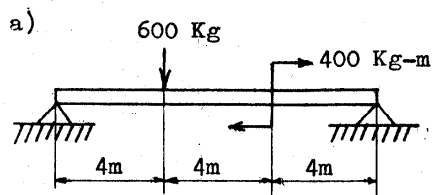


$t_{B/A}$ será positivo si el punto B está arriba de la tangente de referencia, y será negativo en el caso contrario.

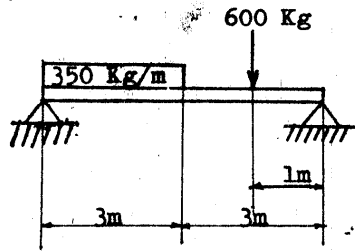
7.6.1. Construir un diagrama de momentos por partes, de la viga mostrada.



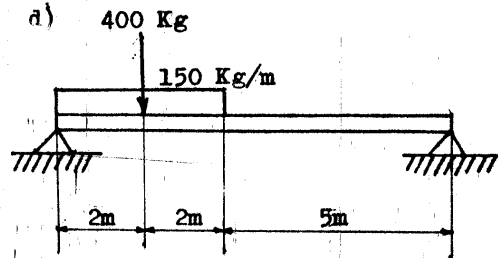
7.6.2. Construir Diagramas de momentos por partes para cada una de las vigas mostradas.



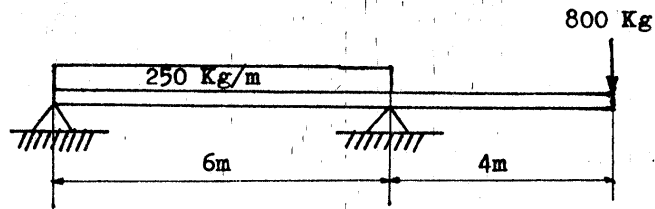
c)



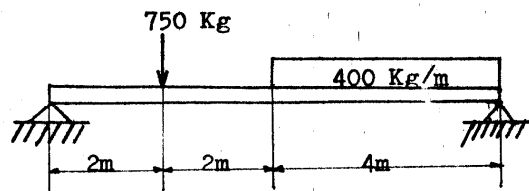
d)

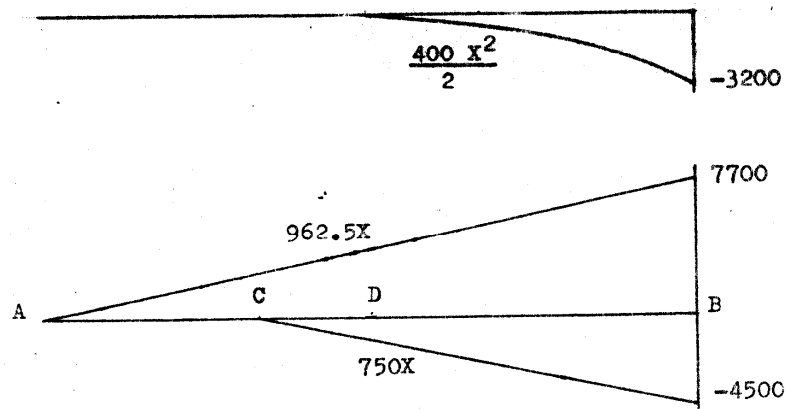


e)



7.7.1. Calcular los momentos del area del diagrama de momentos respecto del apoyo izquierdo y respecto del centro de la viga - mostrada en 7.6.1 e indicar lo que representan.





$$\sum A \bar{X} = (7700 \frac{8}{2}) (\frac{2}{3} 8) - (4500 \frac{6}{2}) (\frac{2}{3} 6 + 2) - (\frac{1}{4}) (3200) (\frac{3}{4} 4 + 4)$$

$$\sum A \bar{X} = 53400 \text{ Kg-m}^3$$

Indica que la desviación del apoyo izquierdo respecto de la -
tangente al apoyo derecho es:

$$t_{A/B} = \frac{53400}{EI}$$

$$\sum A \bar{X} = (3850 \frac{4}{2}) (\frac{2}{3} 4) - (1500 \frac{2}{2}) (\frac{2}{3} 2 + 2)$$

$$\sum A \bar{X} = 15533.33 \text{ Kg-m}^3$$

Indica que la desviación del apoyo izquierdo respecto de la -
tangente del punto central de la viga es:

$$t_{A/D} = \frac{15533.33}{EI}$$

7.7.2. Calcular los momentos del Area del diagrama de momentos - respecto del apoyo izquierdo y respecto del centro de las vigas mostradas en 7.6.2, e indicar lo que representan.

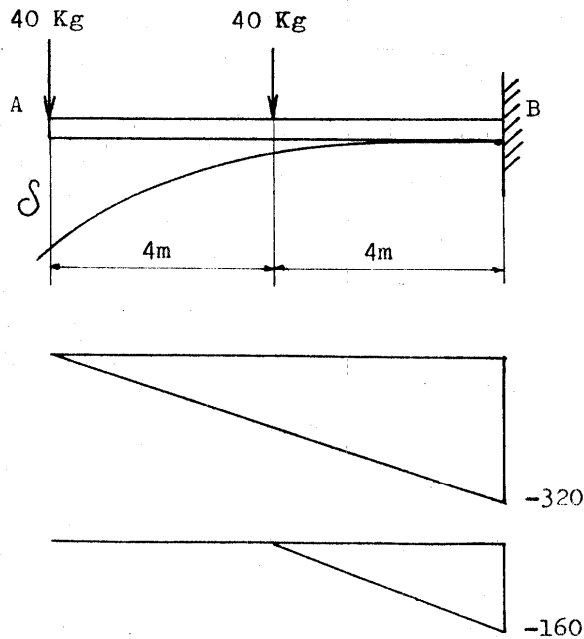
7.8.1. Calcular la deformación producida en el extremo izquierdo de la viga mostrada:

considérese $E = 2.1 \times 10^6 \dots$ y

$$I = 600 \text{ cm}^4$$

En este caso, la deformación en el extremo izquierdo viene siendo exactamente igual a la desviación del extremo izquierdo respecto del extremo derecho, pues si se considera el extremo derecho empotrado perfectamente, la tangente al punto de dicho extremo de la elástica es horizontal y coincide exactamente con la posición inicial de la viga.

entonces: ... $\delta = t_{A/B}$

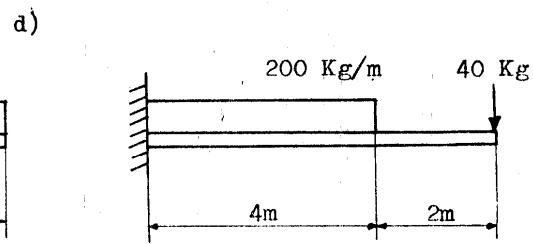
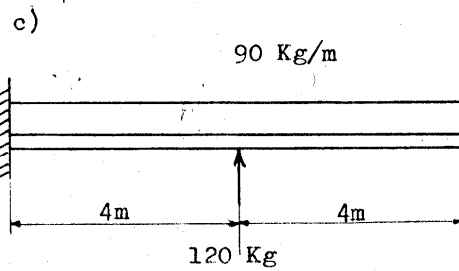
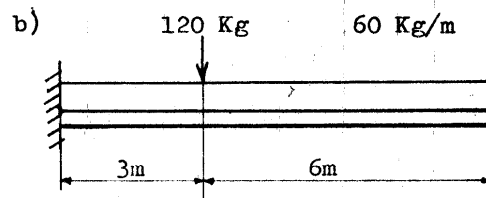
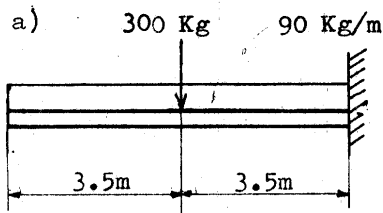


$$- t_{A/B} = -\frac{1}{EI} \left[-320 \frac{8}{2} \left(\frac{8}{3} \right)^2 - (160 \frac{4}{2}) \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \right) \right]$$

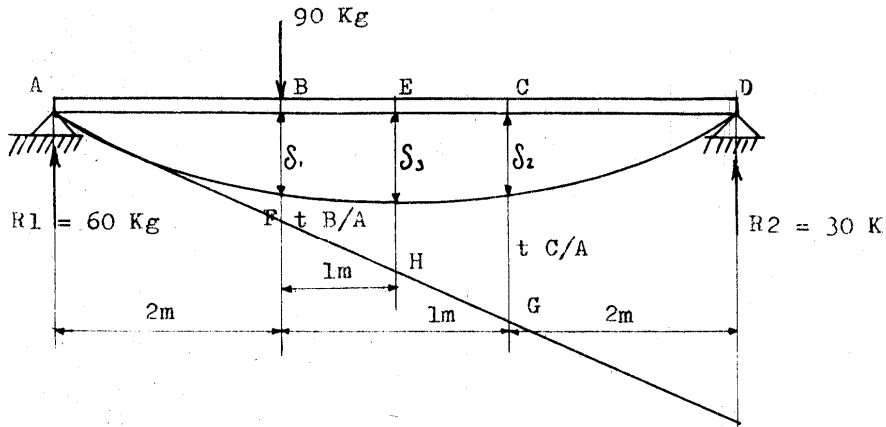
$$- t_{A/B} = -\frac{1}{EI} (-8960 \text{ Kg m}^3)$$

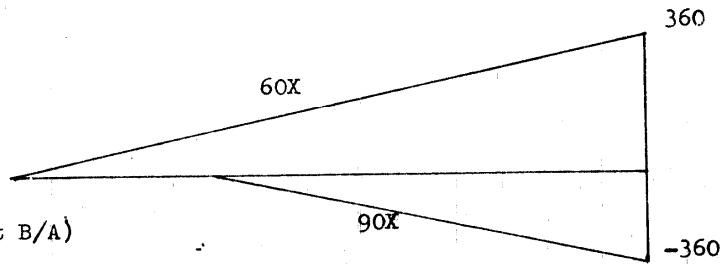
$$- t_{A/B} = -\frac{8960 \times 10^6 \text{ Kg cm}^3}{2.1 \times 10^5 \times 600 \text{ cm}^4} = 7.1 \text{ cm} \dots t_{A/B} = 7.1 \text{ cm}$$

7.8.2. Calcular la deformación producida en el extremo libre de cada una de las vigas mostradas. (En función de EI).



7.9.1. Calcular la deformación en los tercios y en el centro de la viga mostrada. (En función de EI).





$$BF = \int_1 + (t B/A)$$

$$S_1 = BF - (t B/A)$$

$$BF = 2\left(\frac{t D/A}{6}\right)$$

$$EI(t D/A) = \left(\frac{360 \times 6}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 6\right) - \left(\frac{360 \times 4}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 4\right)$$

$$t D/A = \frac{1200}{EI} \dots$$

$$BF = \frac{2 \times 1200}{6 EI}$$

$$BF = \frac{400}{EI}$$

$$EI(t B/A) = 120\left(\frac{1}{3} \times 2\right)$$

$$t B/A = \frac{80}{EI}$$

$$S_1 = \frac{400}{EI} - \frac{80}{EI}$$

$$S_1 = \frac{320}{EI}$$

$$CG = \int_2 + (t C/A)$$

$$S_2 = CG - (t C/A)$$

$$CG = 4\left(\frac{t D/A}{6}\right)$$

$$CG = \frac{4 \times 1200}{6 EI} = \frac{800}{EI}$$

$$EI(t C/A) = \frac{240 \times 4}{2}\left(\frac{1}{3} \times 4\right) - \left(\frac{180 \times 2}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$t C/A = \frac{520}{EI}$$

$$S_2 = \frac{800}{EI} - \frac{520}{EI}$$

$$S_2 = \frac{280}{EI}$$

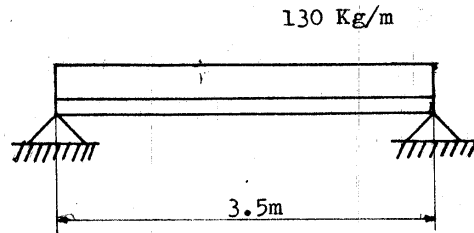
En el centro:

$$EH = 3\left(\frac{t D/A}{6}\right) \dots S_3 = EH - (t E/A) \dots EH = \frac{600}{EI} \dots$$

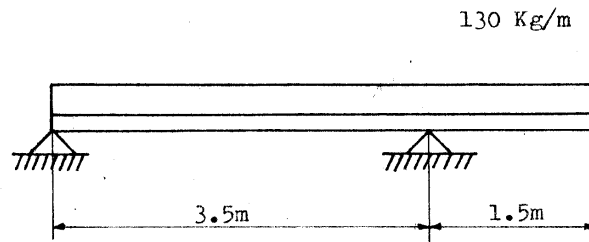
$$EI(t E/A) = 255 \dots S_3 = \frac{600}{EI} - \frac{255}{EI} \dots S_3 = \frac{345}{EI}$$

7.9.2. Calcular la deformación en los tercios, en el centro y la máxima que se presente en cada una de las vigas mostradas, utilizando el método del área de momentos. (En función de EI)

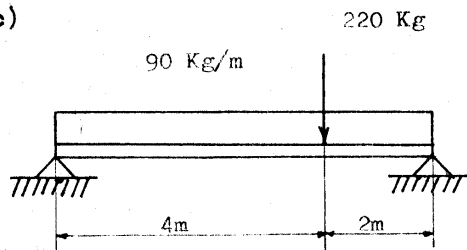
a)



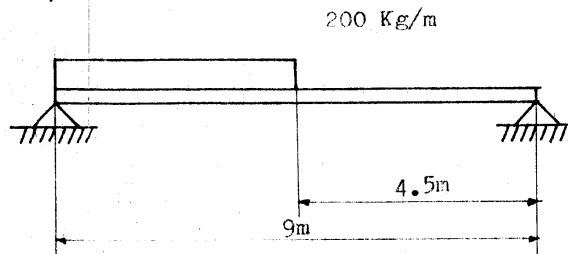
b)



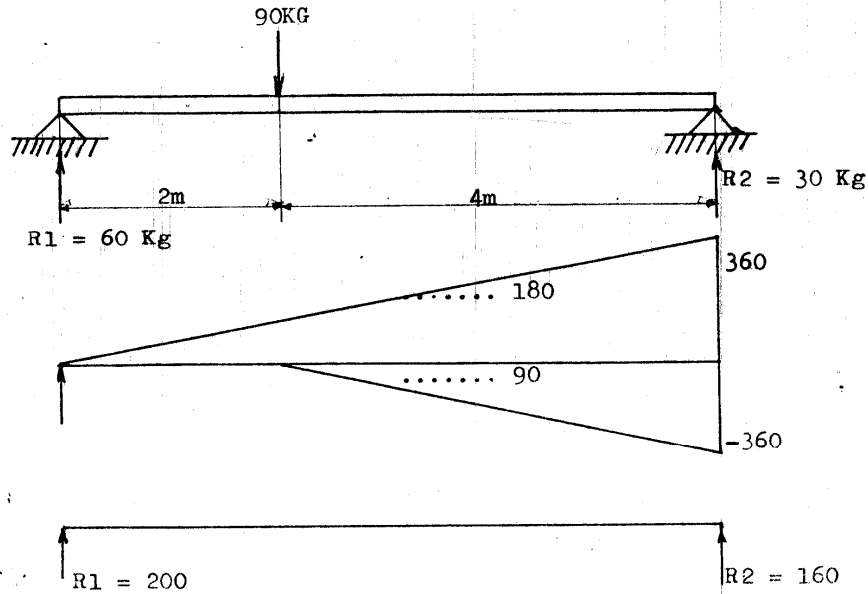
c)



d)



7.10.1 Calcular la deformación en el centro y en los tercios de la viga mostrada por el método de la viga conjugada:



$$6(R_2) = (360 \times \frac{6}{2}) (\frac{2}{3} \times 6) - (\frac{360 \times 4}{2}) (\frac{2}{3} \times 4 + 2)$$

$$R_2 = 160$$

$$V(\text{centro}) = \frac{200 \times 3}{2} - 160 + 45$$

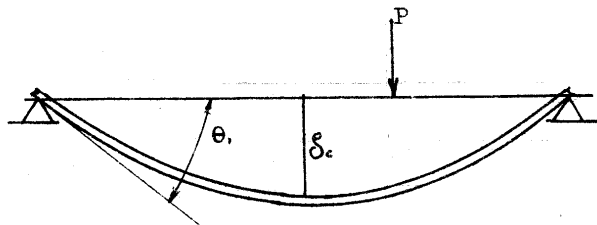
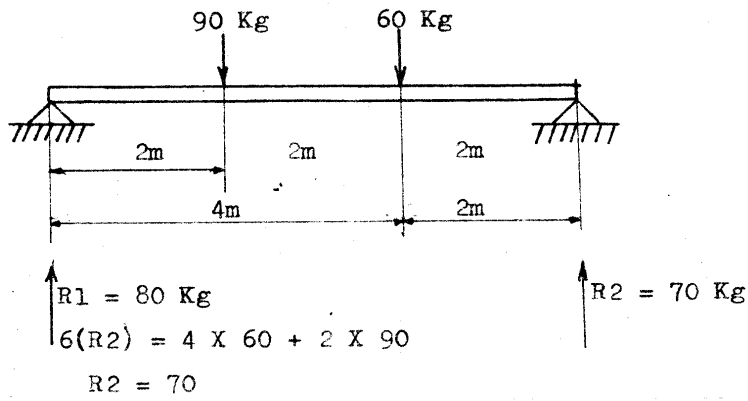
$$V(\text{centro}) = 185$$

$$M(\text{centro}) = (200)(3) - (\frac{180 \times 3}{2}) (\frac{1}{3} \times 3) + (\frac{90 \times 1}{2}) (\frac{1}{3} \times 1)$$

$$M(\text{centro}) = 345 = \delta EI.$$

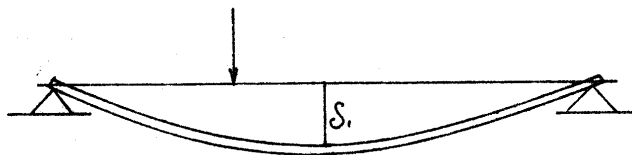
7.10.2. Calcular la deformación en los tercios y en el centro de los claros de las vigas mostradas en 7.9.2, por el método de la viga conjugada. (En función de EI).

7.11.1. Calcular la deformación en el centro de la viga mostrada por el método de superposición.



$$\delta_c = \frac{Pb}{48EI} (3L^2 - 4b^2)$$

90 Kg



$$a = 4 \dots b = 2 \dots L = 6$$

$$\delta_1 = \frac{90(2)}{48EI} (3 \times 36 - 4 \times 4) = \frac{345}{EI}$$



$$a = 4 \dots b = 2 \dots L = 6$$

$$\delta_2 = \frac{(60)2}{48EI} (3 \times 36 - 4 \times 4) = \frac{230}{EI} \dots = \frac{345}{EI} + \frac{230}{EI}$$

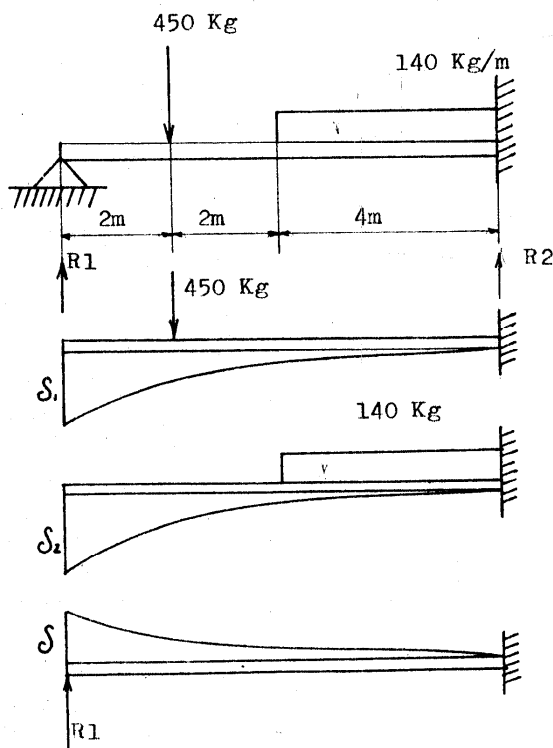
$$\delta_c = \frac{575}{EI}$$

7.11.2. Calcular la deformación en los tercios y en el centro de los claros de las vigas mostradas en 7.9.2, por el método de superposición.

7.12.1. Escribir una serie de ventajas y desventajas en la utilización de cada uno de los cuatro métodos utilizados para la obtención de la deformación de una viga.

7.12.2. Establecer, analizando ventajas y desventajas, cual de los cuatro métodos es el que utilizarían profesionalmente con más ventaja, en la obtención de la deformación en un punto de la viga, sometida a esfuerzos de flexión.

8.3.1. Calcular las reacciones en los apoyos de la viga mostrada por el método de superposición;



$$EI \delta_1 = \frac{6(450 \times 6^2)}{3} + \frac{450 \times 6}{2}(2) = 48600$$

$$EI \delta_2 = \frac{(140)(4)(2)(4)}{4} + \frac{(140)(4)(2)(4)}{3}(4) = 10453.33$$

$$EI \delta = EI \delta_1 + EI \delta_2$$

$$170.67(R1) = 48600 + 10453.33$$

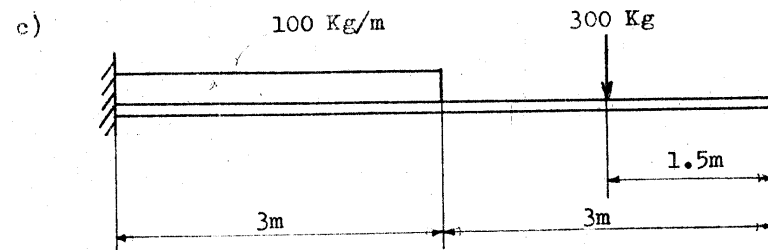
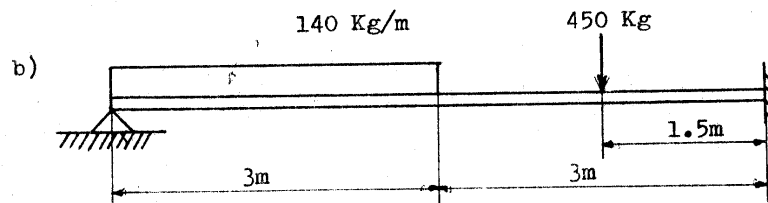
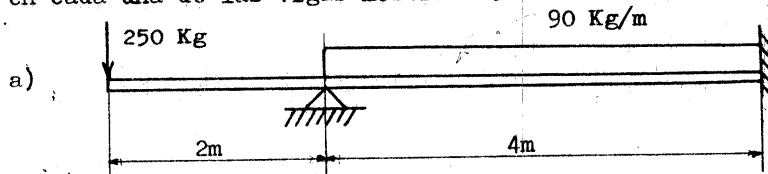
$$R1 = 346 \text{ Kg}$$

$$450 + 140(4) = 346 + (R2)$$

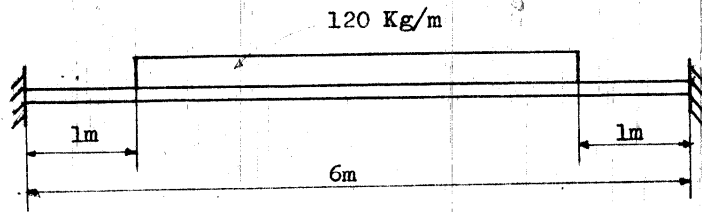
$$R2 = 664 \text{ Kg}$$

$$M = 346(8) - 450(6) - (140)(4)(2) = -1052 \text{ Kg-m}$$

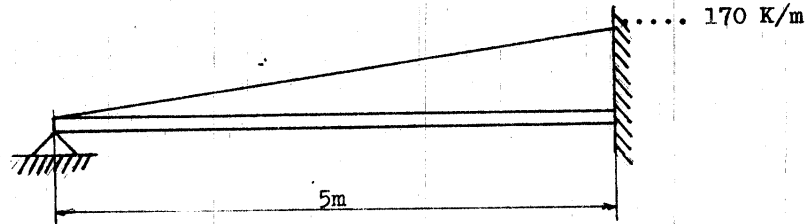
8.3.2. Calcular las reacciones en los apoyos por superposición en cada una de las vigas mostradas.



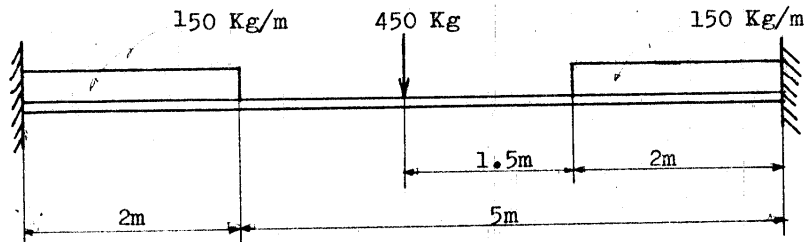
d)



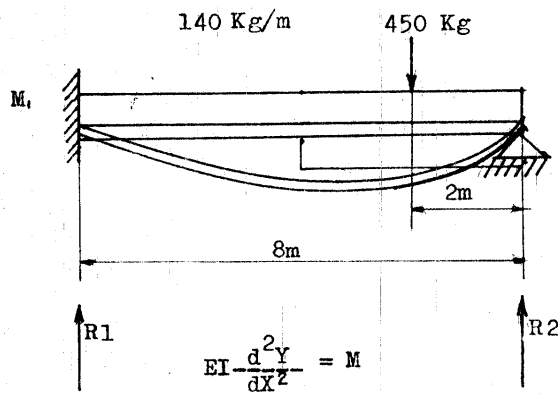
e)



f)



8.4.1. Calcular las reacciones en los apoyo de la viga mostrada en 8.3.1, por el método de la doble integración.



$$M = \begin{cases} M_1 + (R_1)X - \frac{140}{2} X^2 & \dots\dots\dots 0 < X < 4 \\ M_1 + (R_1)X - \frac{140}{2} X^2 + \frac{140}{2} (X-4)^2 & \dots\dots\dots 4 < X < 6 \\ M_1 + (R_1)X - 70 X^2 + 70(X-4)^2 - 450(X-6) & \dots\dots\dots 6 < X < 8 \end{cases}$$

$$EI \frac{d^2Y}{dX^2} = M_1 + (R_1)X - 70 X^2 + 70(X-4)^2 - 450(X-6)$$

$$EI \frac{dY}{dX} = M_1 X + \frac{(R_1)}{2} X^2 - \frac{70}{3} X^3 + \frac{70}{3} (X-4)^3 - \frac{450}{2} (X-6)^2 + C$$

$$\text{para } X = 0 \dots \frac{dY}{dX} = 0 \dots C = 0$$

$$EI Y = \frac{M_1}{2} X^2 + \frac{R_1}{6} X^3 - \frac{70}{12} X^4 + \frac{70}{12} (X-4)^4 - \frac{225}{3} (X-6)^3 + C'$$

$$\text{Para } X = 0 \dots Y = 0 \dots C' = 0$$

$$\text{En B } \dots M = 0 \dots \text{para } X = 8$$

$$M_1 + 8(R_1) - 70(8)^2 + 70(4)^2 - 450(2) = 0$$

$$M_1 + 8(R_1) - 4260 = 0$$

$$\text{Para } X = 8 \dots Y = 0$$

$$\frac{M_1}{2} (8)^2 + \frac{R_1}{6} (8)^3 - \frac{70}{12} (8)^4 + \frac{70}{12} (4)^4 - \frac{225}{3} (2)^3 = 0$$

$$32M_1 + \frac{256}{3}(R_1) - 23000 = 0$$

$$M_1 + 8(R_1) - 4260 = 0$$

$$32 M_1 + \frac{256}{3}(R_1) - 23000 = 0$$

$$- 32 M_1 - 256(R_1) + 136320 = 0$$

$$32 M_1 + \frac{256}{3}(R_1) + 136320 = 0$$

$$(R_1)\left(\frac{256}{3} - 256\right) + 113320 = 0$$

$$- \frac{2}{3}(256)(R_1) + 113320 = 0$$

$$R_1 = -\frac{113320 \times 3}{2 \times 256}$$

$$R_1 = 664 \text{ Kg}$$

$$M_1 + 8(664) - 4260 = 0$$

$$M_1 = -1052 \text{ Kg-m}$$

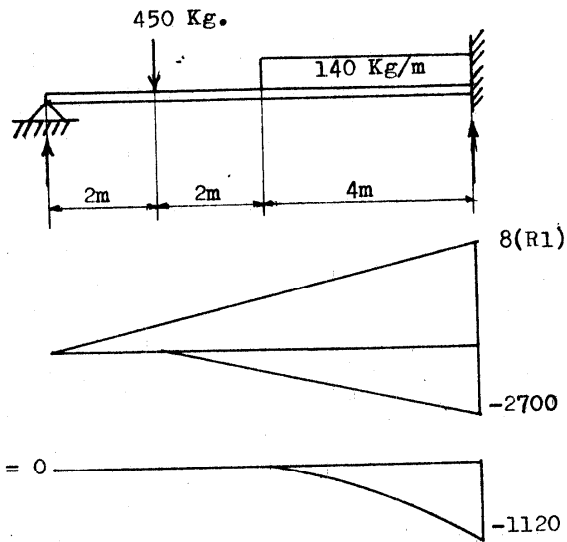
$$(R_1) + (R_2) = (140)(4) + 450$$

$$R_2 = 346 \text{ Kg}$$

8.4.2. Calcular las reacciones en los apoyos de las vigas mostradas en 8.3.2, por el método de la doble integración.

Resolviendo simultaneamente:

8.5.1. Calcular las reacciones en los apoyos de la viga hiperestática mostrada en 8.3.1, por el método del área de momentos.



$$EI (\text{t A/B}) = 0$$

$$EI (\text{t A/B}) = 0$$

$$EI (\text{t A/B}) = \left(\frac{8R_1 \times 8}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \times 8 \right) - \left(\frac{2700 \times 6}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \times 6 + 2 \right) - \left(\frac{1120 \times 4}{3} \right) \left(\frac{3}{4} \times 4 + 4 \right)$$

$$-\frac{512}{3}(R_1) - 59053.33 = 0$$

$$R_1 = \frac{177160}{512}$$

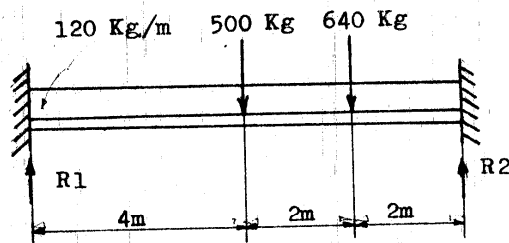
$$R_1 = 346 \quad \dots \quad 346 + (R_2) = 450 + 140 \times 4$$

$$R_2 = 664 \quad \dots \quad 8(346) - 6(450) - (140)(4)(2) = M_1$$

$$M_1 = -1052$$

8.5.2. Calcular las reacciones en los apoyos de las vigas hiperestáticas mostradas en 8.3.2, por el método del área de momentos.

8.6.1. Determinar las secciones I.I, y L para la viga hiperestática que soporten las cargas considerando una $\sigma_{\max} = 1520 \text{ K/cm}^2$ y una flecha máxima de $1/360$.



$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = M_1 + (R_1)X - \frac{120}{2}X^2 - 500(X-4) - 640(X-6)$$

$$EI \frac{dY}{dx} = M_1 X + \frac{R_1}{2}X^2 - 20X^3 - 250(X-4)^2 - 320(X-6)^2 + C$$

$$\text{Para } X = 0, \frac{dY}{dx} = 0 \dots C = 0$$

$$EI Y = \frac{X^2}{2}M_1 + \frac{R_1}{6}X^3 - 5X^4 - \frac{250}{3}(X-4)^3 - \frac{320}{3}(X-6)^3 + C'$$

$$\text{Para } X = 0, \dots Y = 0 \dots C' = 0$$

$$\text{Para } X = 8 \dots \frac{dY}{dx} = 0$$

$$8M_1 + 32(R_1) - 20(8)^3 - 250(4)^2 - 320(2)^2 = 0$$

$$8M_1 + 32(R_1) = 15520$$

Para $X = 8 \dots Y = 0$

$$4M_1 + \frac{256}{3}(R_1) - 5(8)^4 - \frac{250}{3}(4)^3 - \frac{320}{3}(2)^3 = 0$$

$$32 M_1 + \frac{256}{3}(R_1) = \frac{80000}{3}$$

Resolviendo simultaneamente:

$$8 M_1 + 32(R_1) = 15520$$

$$32 M_1 + \frac{256}{3}(R_1) = \frac{80000}{3}$$

Resultan: $R_1 = 8300 \dots R_2 = 1270 \dots M_1 = -1380$ y

$$M_2 = -1860-$$

El módulo resistente requerido: $Z = \frac{M}{\sigma_{\max}} = \frac{186000 \text{ Kg-cm}}{1520 \text{ Kg/cm}^2}$

$$Z = 122.36 \text{ cm}^3 \dots \text{perfil } \dots 6 \text{ I } 17 \frac{1}{4} \dots Z = 8.7 \text{ in}^3$$

tiene una $I = 26 \text{ in}^4 \dots I = 1082.2 \text{ cm}^4$

$$E = 2.1 \times 10^6$$

Flecha en el centro:

$$EI Y = 8(-1380) + \frac{830}{6}(64) - 5(4)^4$$

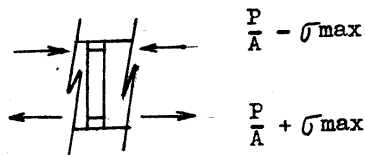
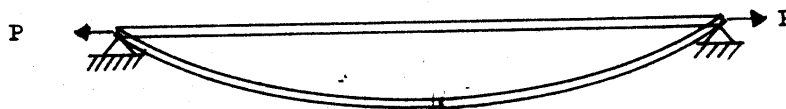
$$EI Y = -3466.67 \text{ Kg-m}^3$$

$$Y = \frac{-3466.67 \times 10^6 \text{ Kg-cm}^3}{2.1 \times 10^6 \times 1082.2} = 1.52 \text{ cm}$$

$$\frac{1.52}{800} < \frac{1}{360}$$

8.6.2. Determinar secciones I, [. y L que soporten las cargas y no produzcan una flecha mayor de 1/360 para cada una de las vigas hiperestáticas mostradas en 8.3.2.

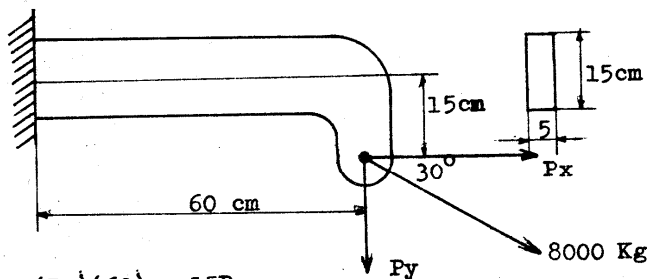
9.1.1. Deducir la fórmula del esfuerzo máximo que se presentará en una viga sometida a una combinación de esfuerzos axial y de flexión.



$$\sigma = \sigma_{axial} + \sigma_{flex}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \sigma_f \quad \text{Pero } \sigma_f = \frac{M y}{I} \quad \dots \sigma = \frac{P}{A} + \frac{M y}{I}$$

9.2.1. Calcular las tensiones normales máximas que se presentan en la viga mostrada en la figura:



$$M(A) = (P_y)(60) - 15P_x$$

$$M(A) = (4000)(60) - 6928.2(15)$$

$$M(A) = 136076.95 \text{ Kg-cm}$$

$$\sigma = \frac{P_x}{5(15)} + \frac{136076.95(7.5)}{1406.25}$$

$$\sigma = 818.12 \text{ Kg/cm}^2$$

$$P_y = 8000(\text{sen } 30^\circ)$$

$$= 4000 \text{ Kg}$$

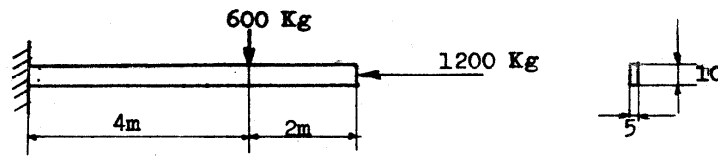
$$P_x = 8000(\text{cos } 30^\circ)$$

$$= 6928.2$$

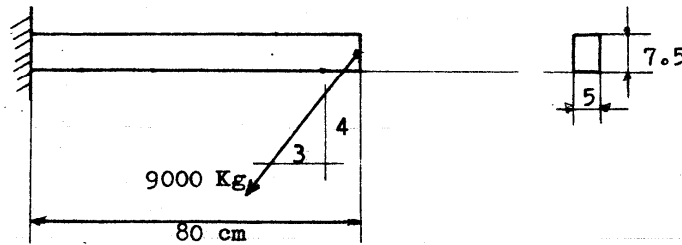
$$I = \frac{5(15)^3}{12} = 1406.25$$

9.2.2. Calcular las tensiones normales máximas que aparecen en las vigas mostradas:

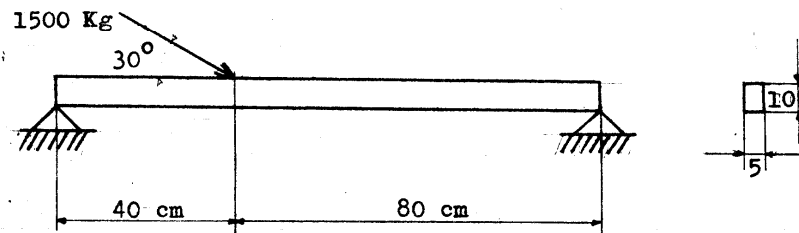
a)



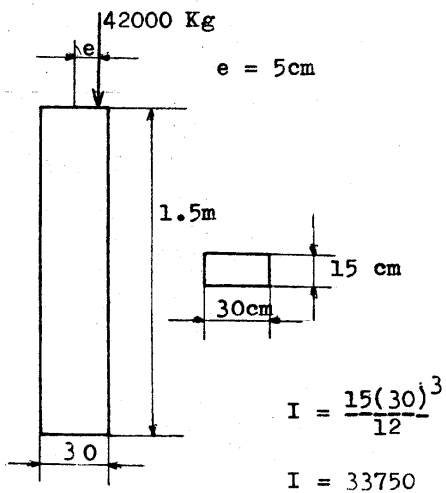
b)



c)



9.3.1. Calcular las tensiones normales máximas que se presentan en la columna mostrada en la figura:



$$M = (42000)(5)$$

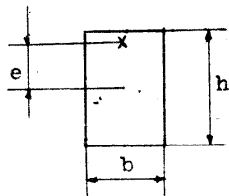
$$M = 210000 \text{ Kg-cm}$$

$$\sigma = \frac{42000}{30(15)} + \frac{210000(15)}{33750}$$

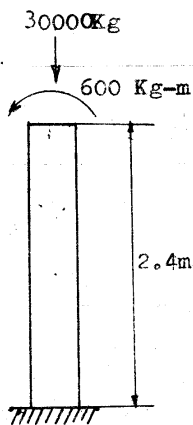
$$\sigma = 93.33 \text{ Kg/cm}^2 + 93.33 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma = 186.67 \text{ Kg/cm}^2$$

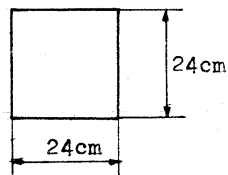
9.3.2. Determinar la excentricidad máxima con que se puede aplicar una carga P en una columna de sección rectangular para que no trabaje a tracción.



9.4.1. Determinar la sección rectangular de madera que soporte las cargas mostradas en la figura sin que haya problemas de pandeo. El esfuerzo permisible es de 60 Kg/cm^2 .



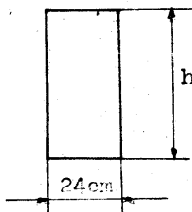
Para evitar pandeo, $\frac{b}{L} < \frac{1}{10}$



$$I = 27648$$

$$\sigma = \frac{30000}{24(24)} + \frac{60000(12)}{27648}$$

$$\sigma = 52 + 26.04 = 78 \text{ Kg/cm}^2 \text{ mayor que el permisible.}$$



$$\sigma = \frac{30000}{24h} + \frac{60000(h/2)}{2h^3}$$

$$\sigma = (1250/h) + (15000/h^2)$$

$$60 \text{ Kg/cm}^2 = (1250/h) + (15000/h^2) \dots$$

$$h = 29.35 \text{ cm}$$

9.4.2. Determinar la sección circular de madera que soporte las mismas cargas de la columna mostrada en 9.4.1 con las mismas condiciones.

9.5.1. Deducir las fórmulas que calculan la tensión en un punto cuando varía la orientación de los planos. (En dos dimensiones)

$$a) \sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \nu_{xy} \operatorname{Sen} 2\theta$$

$$b) \nu = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{Sen} 2\theta + \nu_{xy} \cos 2\theta$$

9.6.1. Determinar los valores máximos de la función dada en el inciso a) de 9.5.1.

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \nu_{xy} \operatorname{Sen} 2\theta$$

$$\frac{d\sigma_n}{d\theta} = 0 - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{Sen} 2\theta \right) (2) - \nu_{xy} (\cos 2\theta) (2) = 0$$

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{Sen} 2\theta}{\cos 2\theta} + \frac{2\nu_{xy} \cos 2\theta}{\cos 2\theta} = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{tg} 2\theta + 2\nu_{xy} = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = - \frac{2\nu_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

9.7.1. Determinar el valor de θ para el cual aparecen los valores máximos de la función dada en el inciso b de 9.5.1.

$$\nu = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{Sen} 2\theta + \nu_{xy} \cos 2\theta$$

$$\frac{d\nu}{d\theta} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta \right) (2) - (\nu_{xy} \operatorname{Sen} 2\theta) (2)$$

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta}{\cos 2\theta} - \frac{2\nu_{xy} \operatorname{Sen} 2\theta}{\cos 2\theta} = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) - 2\nu_{xy} \operatorname{tg} 2\theta = 0 \quad \dots \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\nu_{xy}}$$

9.8.1. Determinar la expresión que calcula el valor máximo de σ_n

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \nu_{xy} \sin 2\theta$$

$$2\theta = \arctan\left(-\frac{2\nu_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

$$\sin 2\theta = \frac{-2\nu_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}} \quad \dots \quad \cos 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}}$$

Racionalizando el denominador en la segunda fracción

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}{2\left[\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}\right]} \cdot \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}}{1}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}}{2}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\nu_{xy})^2}$$

9.9.1. Determinar la expresión que calcula el valor máximo de ν

$$\nu = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \nu_{xy} \cos 2\theta$$

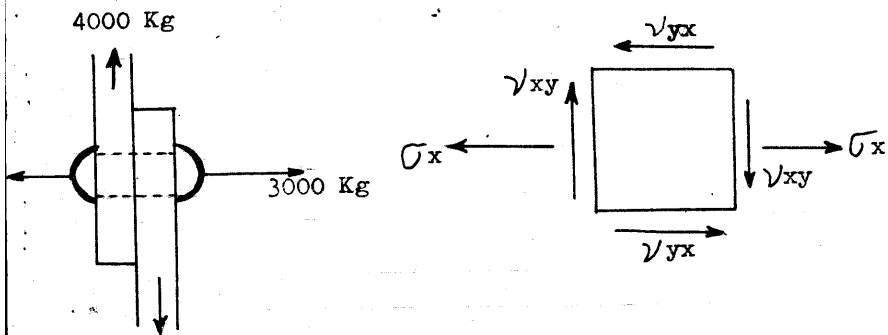
$$\tan 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\nu_{xy}} \quad \dots \quad \sin 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{2\nu_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}}$$

sustituyendo y racionalizando:

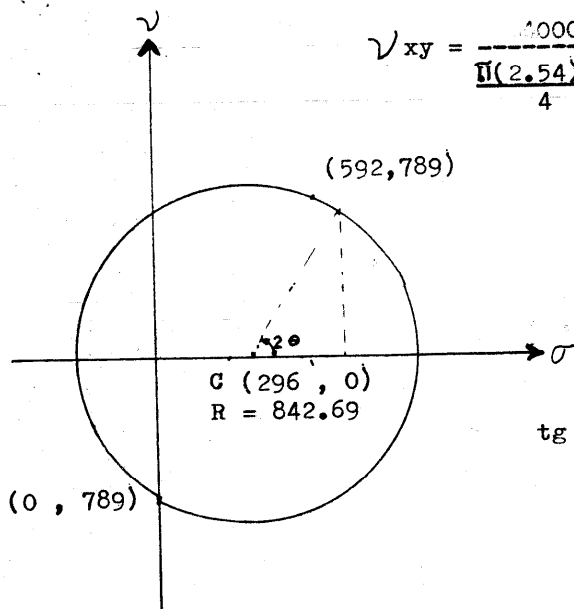
$$\nu = \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\nu_{xy})^2}}{2} = \dots \quad \nu = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\nu_{xy})^2}$$

9.11.1. Calcular las tensiones principales y sus direcciones, que se presentan en el roblón de hierro mostrado en la figura, de 25.4 mm de diámetro y sometido a una fuerza cortante de 3000 Kg.



$$\sigma_x = \frac{3000}{\frac{\pi (2.54)^2}{4}} = 592 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\nu_{xy} = \frac{4000}{\frac{\pi (2.54)^2}{4}} = 789.4 \text{ Kg/cm}^2$$



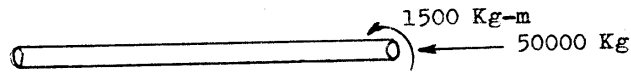
$$\sigma_{\max} = 1138.69$$

$$\nu_{\max} = 842.69 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{tg } 2\theta = \frac{789}{296} = 2.66$$

$$\theta = 34.72^\circ$$

9.11.2. El eje de una máquina está sometido a un esfuerzo de compresión de 50 ton, y a un momento torsor de 1500 Kg-m. Calcular las tensiones máximas que se presentan. el eje tiene un diámetro de 127 mm.

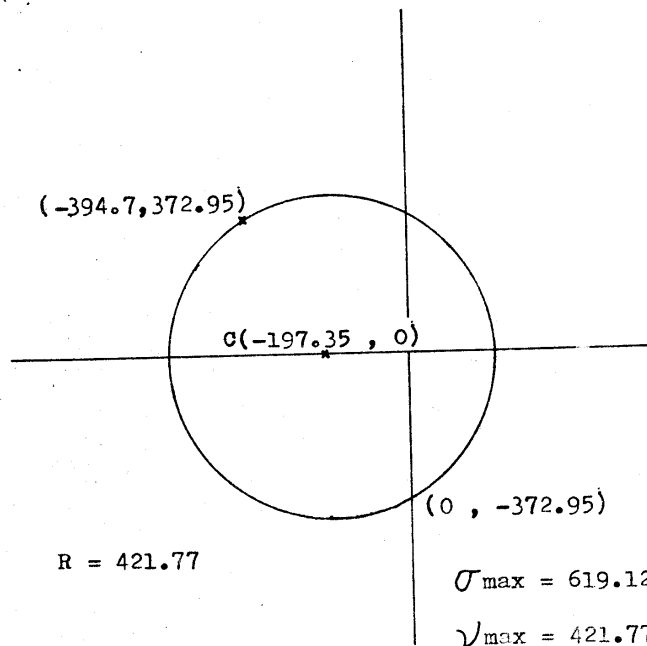
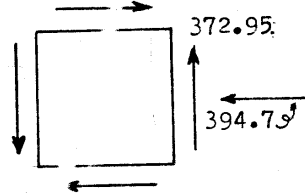


En las fibras extremas, la tensión normal:

$$\frac{50000}{\frac{\pi(12.7)^2}{4}} = 394.7 \text{ Kg/cm}^2$$

La tensión cortante provocada por el momento torsor:

$$\tau_{\max} = \frac{(150000 \text{ Kg-cm})(12.7/2)}{\frac{\pi(12.7/2)^4}{2}} = 372.95$$



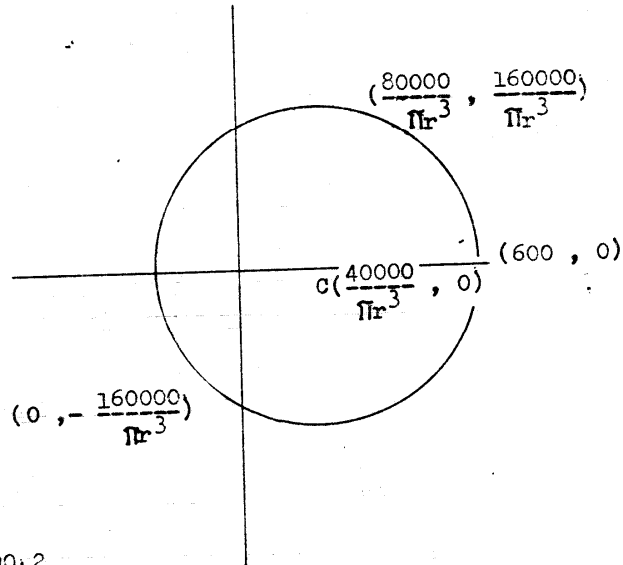
9.11.3. Determinar el diámetro de un árbol sometido a un momento torsor de 800 Kg-m y a un momento flector de 200 Kg-m, de tal manera que se respete una carga de seguridad de 600 Kg/cm² para σ y 500 Kg/cm² para γ .

$$\sigma = \frac{M y}{I}$$

$$\sigma = \frac{(20000)(4)}{\pi r^3}$$

$$\sigma = \frac{25464.79}{r^3}$$

$$\gamma = \frac{160000}{\pi r^3}$$



$$R = \left(\frac{40000}{\pi r^3} \right)^2 + \left(\frac{160000}{\pi r^3} \right)^2$$

$$R^2 = \frac{164924.23}{\pi r^3}$$

$$\frac{164924.23}{\pi r^3} + \frac{40000}{\pi r^3} = 600$$

$$\gamma = \frac{164924.23}{\pi (4.77)^3}$$

$$r^3 = 108.71 \text{ cm}^3$$

$$\gamma = 483.703 \text{ Kg/cm}^2$$

$$r = 4.77 \text{ cm}$$