

CAPÍTULO V

Resultados y Análisis

Introducción

La obtención de información en los estudiantes que apoye nuestro trabajo de investigación ha sido uno de los objetivos que nos hemos propuesto a lo largo del desarrollo de la misma. En ese sentido y como anteriormente lo hemos señalado, adoptamos el uso de un cuestionario como estrategia de indagación en los estudiantes. El diseño y los aspectos más relevantes de dicho cuestionario se han dejado asentados en el capítulo precedente.

Lo que constituye el presente capítulo es precisamente la presentación y el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de dicho cuestionario. La primera de las tres secciones que integran este capítulo, tiene como principal propósito hacer la presentación de los resultados obtenidos y con ello dar inicio al análisis, por lo cual en esta primera sección se destacará principalmente lo referente a la presentación.

La continuación del análisis de la información tomando en consideración los resultados obtenidos en cada uno de los problemas que integran el cuestionario, es el objetivo principal de la segunda sección del presente capítulo, el cual finaliza con una sección dedicada al análisis general de los resultados obtenidos.

V.1 Respuestas de los estudiantes

La aplicación del cuestionario se realizó en cuatro de los planteles del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, a un total de 166 estudiantes de segundo semestre y 135 del sexto, distribuidos los primeros en cuatro grupos de 43, 49, 41 y 33 estudiantes, mientras que los últimos en grupos de 28, 43, 29, 35 estudiantes, que corresponden a los planteles Magdalena, Obregón 1, Reforma y Ernesto López Riesgo respectivamente.

En la siguiente tabla aparece una primera clasificación de las respuestas obtenidas por semestre y por cada uno de los seis problemas contemplados en el cuestionario, de acuerdo a si las consideramos correctas (✓), erróneas (✗) o SR ("sin respuesta"). En la primera de estas tres categorías ubicamos a aquellos estudiantes que responden de acuerdo a cualquiera de las siguientes situaciones: dando la solución numérica correspondiente, escribiendo una operación indicada, exhibiendo el conjunto solución del que se desprende la respuesta numéricamente correcta o bien los que como respuesta muestran un diagrama de árbol, una tabla o algún esquema de solución completo. En otros casos, las clasificamos como erróneas (✗) y SR cuando el estudiante deja el espacio disponible para la respuesta en blanco o cuando proporciona una respuesta tal como "no se".

Un resumen de esta primera clasificación se muestra enseguida, en el entendido de que un desglose de resultados porcentuales por plantel se incluye en la parte final del trabajo como anexo 1.

Problema No.	✓	✗	SR
1	5 (3.01%)	161 (96.99%)	0 (0%)
2	9 (5.42%)	138 (83.13%)	19 (11.45%)
3	69 (41.57%)	96 (57.83%)	1 (0.60%)
4	16 (9.64%)	145 (87.35%)	5 (3.01%)
5	37 (22.29%)	123 (74.10%)	6 (3.61%)
6	86 (51.81%)	69 (41.57%)	11 (6.63%)
Totales	222 (22.29%)	732 (73.49%)	42 (4.22%)

Tabla V.1 Clasificación de respuestas de estudiantes del segundo semestre

Problema No.	✓	✗	SR
1	16 (11.85%)	117 (86.67%)	2 (1.48%)
2	17 (12.59%)	102 (75.56%)	16 (11.85%)
3	47 (34.81%)	87 (64.44%)	1 (0.74%)
4	43 (31.85%)	84 (62.22%)	8 (5.93%)
5	32 (23.7%)	98(72.6%)	5 (3.70%)
6	86(63.70%)	42 (31.11%)	7 (5.19%)
Totales	241 (29.75%)	530 (65.43%)	39 (4.81%)

Tabla V.2 Clasificación de respuestas de estudiantes del sexto semestre

Como podemos observar, en las tablas V.1 y V.2, los problemas uno y dos son los que presentan el índice más bajo de respuestas correctas en ambos semestres, mientras que los índices más altos en respuestas de este tipo correspondieron en ambos semestres a los problemas tres y seis. Aquí es importante observar que el índice de respuestas correctas en

el problema tres fue mayor en el segundo semestre que en el sexto. En el caso de los problemas cuatro y cinco, los porcentajes de respuestas correctas correspondieron a los órdenes de magnitud tercero y cuarto en el segundo semestre, mientras que ese orden se invirtió para el sexto.

Otro aspecto que es importante observar son los índices de estudiantes que no dieron respuesta (SR). En ambos semestres el problema dos fue el que más estudiantes dejaron sin respuesta, mientras que los problemas que menos estudiantes dejaron sin respuesta fueron el uno y tres en ambos semestre.

Tal y como lo hemos venido manifestando a lo largo del presente trabajo, nuestro interés no sólo es tener información acerca del número de respuestas correctas, sino que también estamos interesados en observar cuáles son las distintas estrategias que los estudiantes ponen en juego en sus respuestas, además de observar los errores que se cometen en dichas resoluciones, para los cuales hemos establecido criterios de clasificación en el capítulo precedente.

Así, con respecto a la clasificación de estrategias y errores¹, los resultados obtenidos tocante a lo primero se han resumido en las tablas V.3 y V.4 y en relación a lo segundo en las tablas V.5 y V.6.

Es importante comentar que algunos de los estudiantes utilizaron más de una estrategia en la resolución de los problemas, sin embargo en la clasificación tomamos en consideración sólo una de ellas, ya que sus respuestas nos permitieron distinguir la estrategia primordial para su resolución. Por ejemplo, en aquellos en los que daban su respuesta utilizando la fórmula y enseguida mostraban el conjunto solución por enumeración, los clasificamos como “uso de fórmula”, o bien quienes construyeron un diagrama de árbol y concluyeron su respuesta por medio del principio multiplicativo, los clasificamos dentro del “uso del diagrama de ‘árbol’”.

Problema No.	Estrategias usadas en las respuestas correctas ²						Total
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	
1	2	0	1	1	1	0	5
2	7	1	0	0	1	0	9
3	51	4	0	1	3	10	69
4	12	2	0	0	0	2	16
5	17	0	0	0	11	9	37
6	74	2	0	1	0	9	86

V.3 Estrategias utilizadas en la resolución de los problemas (Segundo Semestre).

¹ Como hemos señalado en el capítulo IV, se distinguen seis tipos de estrategias (Pág. 42-43) y doce tipos de errores (Pág. 41-42).

² Las categorías de clasificación corresponden a: T1:Enumeración de las distintas posibilidades, T2:Uso de Diagrama de árbol, T3:Uso de fórmula, T4: Uso del Principio Multiplicativo, T5:Uso de Recursos icónicos distintos al diagrama de árbol, T6: Respuesta intuitiva.

Problema No.	Estrategias usadas en las respuestas correctas						Total
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	
1	9	1	1	4	0	1	16
2	10	0	5	0	0	2	17
3	37	2	4	1	0	3	47
4	30	5	0	5	0	3	43
5	17	0	9	0	3	3	32
6	63	8	2	7	0	6	86

V.4 Estrategias utilizadas en la resolución de los problemas (Sexto Semestre).

En una revisión global de estas dos últimas tablas, observamos que la estrategia a la que mayormente se recurrió en las respuestas correctas, en ambos semestres y en todos los problemas, fue la “enumeración de las distintas posibilidades” (T1) (en el 71% del total de casos). En el segundo semestre solo los problemas uno y cinco tuvieron un índice de uso de esta estrategia por debajo del 50% entre las respuestas correctas, mientras que en el sexto semestres en todos los problemas se superó este porcentaje (correspondiendo los índices menores también a los problemas uno y cinco).

Revisando esta información por estrategias, encontramos que la “enumeración de las distintas posibilidades” (T1), fue la estrategia que más se puso en juego en el problema seis en ambos semestres (86% y 73% del total de respuestas correctas).

El “uso del diagrama de árbol” (T2), fue la estrategia que mayormente pusieron en juego en el problema cuatro en ambos semestres (un 12.5% en segundo semestre y un 11.4% en el sexto de quienes respondieron correctamente), mientras que la “resolución vía el empleo de alguna fórmula” (T3) fue utilizada sólo en una ocasión por estudiantes del segundo semestre (un 20% de quienes respondieron correctamente ese problema). En el sexto semestre los mayores índices de uso de esta estrategia correspondieron a los problemas dos y cinco (de quienes respondieron correctamente representaron un 29.4% en el problema dos y un 28.1% en el cinco).

En cuanto al “uso del principio multiplicativo”(T4), como una estrategia para determinar la solución al problema, pudimos observar que el porcentaje de uso mayor en ambos semestres se obtuvo en el problema uno (del total de respuestas correctas un 20% y un 25% para segundo y sexto semestre, respectivamente), los problemas cuatro y seis obtuvieron los siguientes órdenes de uso en el sexto semestre, mientras que en el segundo semestre lo obtuvieron los problemas tres y seis.

Respecto al “uso de recursos icónicos distintos al diagrama de árbol” (T5), pudimos apreciar que quienes mayormente pusieron en juego este recurso fueron los estudiantes del segundo semestre, de hecho en el problema cinco dichos estudiantes recurrieron a esta estrategia principalmente (un 29.7% del total de quienes respondieron correctamente), mientras que en el sexto semestre este fue el único problema en el que emplearon este recurso como estrategia de resolución (un 9.4% del total de respuestas correctas).

Regresando a los estudiantes del segundo semestre esta estrategia no fue puesta en juego en los problemas cuatro y cinco.

Finalmente, nos referiremos a otro tipo de respuesta que hemos denominado “respuesta intuitiva” (T6) y que también clasificamos como una de las estrategias posibles. En este aspecto, los porcentajes de respuestas obtenidos son muy similares en ambos semestres, con diferencias mayores en el segundo semestre. El problema que obtuvo el índice mayor de empleo de esta estrategia fue el problema dos en el sexto semestre (un 11.8%) y el problema cinco en el segundo (24.3%).

Enseguida hacemos la presentación de la información obtenida en el caso de la clasificación de los errores que se presentaron en ambos semestres. Para esta clasificación, consideramos posible la aparición de más de un error en cada respuesta, por ejemplo el “error de orden” (E2) y el “error de repetición” (E3) se presentaron en una misma respuesta lo que consideramos en cada una de las categorías correspondientes.

Problema No.	Errores ³											
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
1	13	2	0	1	50	64	0	0	7	0	0	19
2	0	11	0	0	54	49	0	0	3	0	0	8
3	19	3	0	0	18	17	0	0	1	21	9	2
4	0	0	8	0	95	20	0	0	3	0	0	4
5	5	0	0	8	8	35	0	0	8	0	0	21
6	0	0	16	0	24	11	0	0	0	0	0	3
Totales	37	16	24	9	249	196	0	0	22	21	7	57

V.5 Frecuencia de aparición de cada tipo de error (Segundo Semestre)

Problema No.	Errores											
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
1	6	13	3	0	21	15	0	0	20	0	0	40
2	0	21	2	0	27	14	7	0	10	0	0	21
3	32	22	1	0	9	4	2	0	13	14	6	11
4	0	5	11	0	39	7	1	0	7	0	0	16
5	7	6	7	22	2	18	4	0	22	0	0	21
6	0	0	9	0	6	9	0	0	2	0	0	7
Totales	45	67	33	22	104	67	14	0	74	14	6	116

V.6 Frecuencia de aparición de cada tipo de error (Sexto Semestre).

³ Las categorías de clasificación corresponden a: E1: cambiar el modelo matemático del problema, E2: error de orden, E3: error de repetición, E4: confundir el tipo de objeto, E5: enumeración no sistemática, E6: respuesta intuitiva errónea, E7: no recordar la fórmula correcta; E8: no recordar el significado de los parámetros, E9: interpretación errónea del diagrama de árbol, E10: confusión en el tipo de celda, E11: error en las particiones formadas, E12: manipulación de la información numérica dada en el problema.

En una revisión global por errores podemos observar que en ambos semestres los errores que más se presentaron fueron el de “enumeración no sistemática” (E5) y la “respuesta intuitiva errónea” (E6). En menor proporción también tuvo presencia en ambos semestres la “manipulación de la información numérica dada en el problema” (E12). Estos tres últimos tipos de error se presentaron en todos los problemas.

En sexto semestre se presentaron en todos los problemas los errores denominados “interpretación errónea del diagrama de árbol”(E9), “error de orden” (E2) y de “error de repetición” (E3), mientras que en el segundo semestre estas tres categorías se presentaron parcialmente. El “no recordar el valor de los parámetros” (E8), no se presentó en ambos semestres, mientras que “no recordar la fórmula correcta” (E7) apareció en el sexto, situación que de antemano esperábamos.

El resto de errores corresponde a observaciones específicas que pretendíamos observar, por ejemplo el “cambiar el modelo matemático del problema” (E1) se presentó en ambos semestres en los problemas uno, tres y cinco. Lo mismo ocurre con el error de “confusión en el tipo de celda” (E10) y el “error en las particiones formadas” (E11), que son específicos al problema tres y en el caso de “confundir el tipo de objetos” (E4), que se presentó en el problema cinco.

V.2 Análisis local

Esta sección está dedicada a realizar el análisis de las respuestas proporcionadas a cada uno de los problemas que hemos utilizado en el cuestionario. En cada caso iniciamos el análisis considerando las estrategias puestas en juego, para posteriormente concentrarnos en el análisis de los errores que presentaron los estudiantes en su resolución.

Problema No. 1

De acuerdo a las tablas VI y V.2, este problema fue el que obtuvo el menor porcentaje de respuestas correctas en ambos semestres (3.01% en el segundo semestre y 11.85% en el sexto), también fue el único al que dieron alguna respuesta la totalidad de estudiantes en el segundo semestre y en el sexto fue el segundo problema que un menor número de estudiantes dejaron sin respuesta.

La estrategia que mayormente utilizaron quienes respondieron correctamente fue la enumeración. En particular, en segundo semestre dos de las cinco respuestas correctas utilizaron esta vía, mientras que el resto emplearon fórmula, principio multiplicativo y construcción de tabla (un estudiante en cada caso). En el sexto semestre además de las opciones antes señaladas también se presentaron respuestas que utilizaron diagrama de árbol y, en una ocasión, respuesta intuitiva. En ningún caso dieron respuesta recurriendo a más de una estrategia.

En las respuestas dadas por enumeración, algunos responden estableciendo explícitamente una correspondencia uno-a-uno entre las personas y los elementos de una terna posible (cocheras), proporcionándonos con ello mayor información respecto a su interpretación del problema. Otras situaciones simplemente exhiben las distintas opciones tomando en

consideración los números de cada una de las cocheras. Un ejemplo de cada una de estas situaciones se da a continuación.

<i>Angel</i>	<i>Beatriz</i>	<i>Carmen</i>
1	2	3
1	2	4
1	2	5
1	3	2
1	3	4
1	3	5
1	4	2
1	4	3
1	4	5
1	5	2
1	5	3
1	5	4

"12x5=60. 60 formas diferentes".

"123, 124, 125, 213, 214, 215, 231, 241, 251, 312, 314, 315; 132, 142, 152, 321, 324, 325, 341, 342, 345, 351, 352; 354, 412, 413, 415, 421, 423, 425, 431, 532, 435, 451, 452, 453; 512, 513, 514, 521, 523, 524, 531, 531, 534, 541, 541, 543; 60 formas, son formas diferentes ∴ 12x5=60"

Aunque ambos casos responden vía la enumeración de las opciones posibles, existen diferencias en cuanto a su razonamiento. Una de esas diferencias es que el primer estudiante no requiere escribir todas las opciones posibles para dar respuesta, mostrando que a partir del "caso" analizado puede obtener la solución por generalización hacia el resto. Por otra parte es sistemático al elaborar la lista, lo que no ocurre en el segundo ejemplo, aunque en este caso tampoco escribe el total de opciones.

Entre los estudiantes que clasificamos dentro del uso de fórmula, se obtuvieron respuestas que exhiben la expresión que incluye el valor de los parámetros: " ${}_5P_3 = 60$ formas posibles. Se puede mezclar de varias formas" y en otros, junto a esto, el desarrollo del algoritmo combinatorio.

En cuanto al "uso del principio multiplicativo", esta estrategia se obtuvo mayormente en el sexto semestre presentándose respuestas en las que únicamente escriben " $\underline{5} \underline{4} \underline{3} = 60$ ", otras justifican ese producto como en la siguiente situación.

“Ángel tiene 5 formas al escoger le quedan 4 a Beatriz y cuando esta escoja una quedarán 3 a Carmen por lo que $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (son 60 formas posibles)”.

Tomando ahora el análisis de este problema en cuanto a la presencia de errores, los que principalmente se presentaron en segundo semestre fueron el de “enumeración no sistemática” (E5) y el de “respuesta intuitiva errónea” (E6). En el primer tipo de situación, aunque los estudiantes podían identificar plenamente la respuesta requerida no lograron exhibir el conjunto solución completo, presentándose en algunos casos la construcción incompleta de tablas.

Respecto a la “respuesta intuitiva errónea” (E6), clasificamos en ella a quienes dieron como respuesta un número erróneo sin mayor explicación y también a quienes agregaban algún comentario a su respuesta que no nos permitía ubicarlo dentro de las categorías previstas, como la siguiente respuesta.

“De 5 formas diferentes cada uno, pero no pueden aparcar sus coches dos personas en la misma plaza”.

Estos últimos dos errores se presentaron también en el sexto semestre, sin embargo el que principalmente se presentó en este semestre fue el que denominamos “manipulación de la información numérica dada en el problema” (E12). Aquí es importante enfatizar que hemos distinguido a este grupo del de “respuesta intuitiva errónea” (E6) por dar una justificación en términos de alguna operación entre los datos dados en el problema, como se muestra enseguida.

“De 15 Formas.

Datos

3 coches

5 estacionamientos

$3 \times 5 = 15$ ”

Una respuesta similar dieron quienes utilizaron el “diagrama de árbol”, aunque en esta categoría sólo ubicamos a quienes exhibieron la construcción de tal diagrama de árbol, presentando error en el 14.8% de los casos en el sexto semestre y del 4.2% en el segundo.

Otro de los errores que aparecieron en este problema es el denominado “error de orden” (E2). Este error se presentó en el segundo semestre en un 1.20% del total de estudiantes y en el sexto en un 9.63%. Una de las formas en que se manifestó fue en que utilizaban para dar la respuesta la expresión notacional del algoritmo para combinaciones, como ocurre en el siguiente ejemplo.

“ $C_3^5 =$ de 10 formas”,

o quienes mostraron la lista de opciones sin considerar el orden:

“De 10 formas diferentes, por turnarse en todos los números y con combinaciones diferentes: 123, 451, 234, 512, 345, 135, 241, 352, 524, 413”.

En cuanto al “error de repetición” (E3), lo presentaron únicamente estudiantes del sexto semestre, uno de los casos es la respuesta proporcionada por este estudiante “ $(5)^3=125$ formas posibles” aunque no da mayor explicación su justificación puede interpretarse en términos de que considera para cada caso cinco opciones posibles y posteriormente aplica el principio multiplicativo para dar el número de opciones.

Un caso más explícito en cuanto a la presencia de este error es la respuesta proporcionada por el siguiente estudiante:

“ $R=75$ combinaciones porque creo que es lo correcto.

<i>111</i>	<i>121</i>	<i>131</i>
<i>112</i>	<i>122</i>	<i>132</i>
<i>113</i>	<i>123</i>	<i>133</i>
<i>114</i>	<i>124</i>	<i>134</i>
<i>115</i>	<i>125</i>	<i>135</i>

25x3=75”

Finalmente, hacemos referencia al error que hemos denominado “confundir el tipo de objeto” (E4) y que se presentó en el caso que mostramos enseguida.

“De 5 formas c/u. Cada quien que vaya cambiando su coche cada día x_x_x , $_xxx$, $xxx_$; $_xxx$, x_xx ”.

Esta respuesta es ilustrativa de esta situación, ya que la colocación los objetos (coches) en las urnas (cocheras), lo realiza considerando los objetos como indistinguibles, cuando en realidad ocurre lo contrario. Además del citado error, no considera todas las opciones posibles presentándose, con ello, también el error de enumeración no sistemática.

Problema No. 2

Este problema al igual que el anterior, llama la atención por su bajo índice de respuestas correctas (un 5.42% en el segundo semestre y un 12.59% en el sexto del total de estudiantes, de hecho ocupa el segundo orden de magnitud de respuestas correctas en ambos semestres), aunque otro aspecto por el que también llama la atención es que es el problema que menos estudiantes dieron respuestas (un 11.45% de segundo semestre y un 11.85% del sexto, dejaron sin respuesta este problema).

En este caso la mayoría de quienes respondieron correctamente lo hicieron enumerando las distintas opciones que se pueden obtener, mostrando una lista completa y escrita en una forma sistemática. En segundo semestre, el 4.2% del total de estudiantes respondieron con éxito vía esta estrategia, mientras que en el sexto semestre lo hicieron un 7.4%.

Otra de las estrategias que pusieron en juego en este problema es la resolución vía el empleo de la fórmula para combinaciones (T3). Cabe mencionar que esta estrategia sólo la utilizaron estudiantes de sexto semestre, de ellos un 3.7% resolvieron correctamente mediante esta vía. Tal recurso junto al de enumeración constituyen las principales estrategias en que se apoyaron los estudiantes de este semestre, aunque como podemos observar los porcentajes de éxito resultan muy bajos.

Aunque en menor proporción, otras estrategias usadas por quienes respondieron acertadamente son, el empleo del diagrama de árbol (T2) y la construcción de tablas u otros recursos en los que obtenían las distintas opciones a través de algún símbolo como por ejemplo |, tipo de estrategia para la que hemos dispuesto una categoría denominada “uso de recursos icónicos distintos al diagrama de árbol” (T5). Un ejemplo de empleo de este tipo se muestra a continuación.

“10 formas”

1	2	3	4	5

Este ejemplo se destaca por la particularidad con que logra la construcción de las distintas posibilidades en el problema. Además en un momento posterior la observación de las limitaciones de este recurso para resolver situaciones similares podría servir como un

antecedente hacia la construcción de formas más elaboradas, que posiblemente no incluyan esquemas de este estilo pero en cuyo descubrimiento esta estrategia jugó un papel determinante.

Una observación adicional es que estas dos últimas estrategias fueron puestas en juego únicamente por estudiantes del segundo semestre.

Un tipo de respuesta que se presentó únicamente en los grupos de sexto semestre fue la “respuesta intuitiva” (T6). Agrupamos en esta categoría, como antes lo señalamos, a quienes dan como respuesta la solución numérica del problema, sin algún argumento, por lo que aquí se agrupan a aquellos estudiantes que no sintieron la necesidad de poner por escrito sus ideas aún habiendo claridad en ellas, pero también quienes no teniendo un panorama tan claro pudieron responder acertadamente. Por ejemplo en el siguiente caso: “*En 10 maneras se puede asignar la tarea*”. Este tipo de respuesta se obtuvo en un 1.48% del total de estudiantes de este semestre.

En cuanto a la presencia de errores, obtuvimos como principal fuente a la asistematicidad de los procedimientos de enumeración (E5). Un 32.53% del total de estudiantes del segundo semestre y un 20.0% del total de estudiantes de sexto semestre presentaron este tipo de error. Aunado a que la principal estrategia usada para arribar a respuestas correctas fue la enumeración, resulta sobresaliente que los estudiantes recurran a un procedimiento tan simple, más aún que frecuentemente llevan a cabo una enumeración insatisfactoria y no acceden a un procedimiento de sofisticación acorde a su nivel de estudio. Un ejemplo de respuesta en la que se presenta este error es el siguiente.

*“Los problemas pares
El primero y el quinto, tercero
El segundo y el cuarto, primero
El primero y el cuarto, tercero
El segundo y el quinto, primero.”*

El análisis de la respuesta de este estudiante, en principio, nos permite mostrar la ausencia de un procedimiento sistemático de enumeración, pues no agota todas las opciones posibles que se pueden obtener, ni emprende alguna táctica como sería el fijar uno de los elementos intervinientes (como podría ser “primero”). Adicionalmente, la respuesta de este estudiante nos da un ejemplo de aquellos que no son capaces de elegir una notación “apropiada” (en términos operativos) para los elementos que están manejándose en el problema (como podría ser números 1, 2, 3, 4, 5 para los problemas), lo que en alguna forma refleja la existencia de dificultades para elegir una notación que sintetice una característica de los elementos a combinar (ser el primero, segundo etc.) que simplifique el manejo de las distintas opciones. Además de lo anterior, da como respuesta “los problemas pares” en lo que muestra la ausencia de un mecanismo de “validación” de su respuesta, al no tomar en cuenta que ésta no forma parte del espectro de opciones posibles.

Continuando con el análisis de los errores que se presentaron en este problema, nos referimos ahora al “error de orden” (E2), que se manifestó en un número considerable de estudiantes, ocurriendo en un mayor porcentaje en los estudiantes del sexto semestre (6.63% en segundo semestre y 15.56% en el sexto). Un ejemplo de la presencia del mismo sería la siguiente respuesta, misma que exhibe dos esquemas en los que aparentemente se apoya el estudiante para resolver la situación planteada (aunque únicamente mostramos la parte correspondiente al conjunto de opciones posibles y en los que nos basamos para clasificar el error cometido en la categoría a la que se hace referencia).

“33 formas en las que se pueden hacer los 3 problemas teniendo una lista de 5 problemas. Se puede hacer eligiendo el problemas 123, 345, 234, 154, 425, 543, 432, 145, 154, 132, 142, 135, 134, 243, 235, 215, 214, 213, 354, 321, 324, 342, 312, 313, 314, 315, 432,423, 452, 415, 413, 412, 453, (treinta tres casos).”

Aunque hemos utilizado la respuesta de este estudiante para ejemplificar el “error de orden”, puesto que esto es lo que sobresale por las características del problema, se hace también evidente la ausencia de un procedimiento de enumeración sistemático, en cuyo caso le llevaría a obtener la lista completa bajo la consideración de que el orden es importante.

El “error de repetición” (E3), se presentó en un estudiante del sexto semestre, respuesta que reproducimos inmediatamente después de este párrafo, y que pone en evidencia la ausencia de la consideración de que no es posible repetir los elementos (problemas en este caso).

*“ $5^3 = 125$ formas (5)(5)(5)
111, 112, 113, 114, 115, 211, 212, 213, 214, 215; 121, 122, 123, 124, 125, 221, 222, 223, 224, 225; 131, 132, 133, 134, 135, 231, 232, 233, 234, 235; 141, 142, 143, 145, 241, 242, 243, 244, 245; 151, 152, 153, 154, 155, 251, 252, 253, 254, 255, ... etc.”*

Aparentemente hay una manipulación sin sentido de datos del problema. Lo curioso es que al enumerar casos es consistente con dicha manipulación, lo que manifiesta que la dificultad esencial está en identificar la invalidez de repetir elementos.

En cuanto a la “respuesta intuitiva errónea” (E6), este tipo de respuesta se presentó en un 29.52% en el segundo semestre constituyendo junto con el de enumeración no sistemática lo que mas frecuentemente se presentó para el problema dos. En el sexto semestre un 10.37% se ubicaron en esta categoría. Clasificamos aquí aquellas respuestas numéricas erróneas sin argumento alguno de por medio, que nos permita su clasificación en alguna de las otras categorías aquí consideradas, como por ejemplo: “40”, que es insuficiente para un análisis más detallado.

Otros errores que tuvieron presencia en el sexto semestre son: “el uso del diagrama de árbol” (E9) y el de “manipulación de los datos numéricos dados en el problema (E12)”. En el primer caso los índices de aparición son del 1.81% y 7.41% para segundo y sexto semestre respectivamente, mientras que en el segundo caso son de 4.82% y 15.56% en cada caso. En el sexto semestre el error denotado como E12, tuvo el segundo orden de aparición, mientras que en el segundo le correspondió al penúltimo.

Nos parece pertinente aclarar que las respuestas ubicadas en estas dos últimas categorías se distinguen en cuanto a que, algunos estudiantes dieron como respuesta “ $3x5=15$ formas o maneras” después de mostrar la construcción de un diagrama de árbol en el que señalaban por ejemplo, que cada uno de los problemas puede aparecer como el problema 1, 2 o 3, produciendo la operación $5X3=15$ o $3x5=15$. Cuando ocurre esta situación los ubicamos dentro de la categoría E9, mientras que a quienes exhibieron simplemente la respuesta “ $3x5=15$ formas o maneras”, se les ubicó en la categoría E12.

Un ejemplo más característico del tipo de error que hemos denominado E12 y que además se distingue del que antes hemos señalado es el siguiente “3-problemas 5- de 8 formas” y en el cual nuestra interpretación es que su respuesta la obtiene a través de la suma de los dos datos numéricos del problema.

Problema No. 3

Este problema fue resuelto correctamente por un 41.57% de los estudiantes del segundo semestre mientras que en el sexto semestre lo respondieron correctamente un 34.81%, siendo el único problema del cuestionario en que el índice de respuestas correctas en sexto semestre fue menor que en el segundo. En cuanto al orden de magnitud de respuestas correctas, le correspondió el quinto lugar en ambos semestres, y fue también en ambos semestres el que obtuvo el segundo orden en cuanto a los problema que dejaron sin respuesta.

La estrategia mayormente utilizada en este problema fue la “enumeración” (T1), en un 73.9% de quienes respondieron correctamente en segundo semestre y en un 78.7% de las respuestas correctas del sexto. Sin embargo, aunque los estudiantes recurrían a esta estrategia, que es válida a fin de lograr la distribución de las tareas, en muchos de los casos sus respuestas no hicieron explícita la asignación de cada una de las tareas a los equipos, por lo que no tenemos una evidencia completa sobre la interpretación de la distribución de tareas en si, como se ejemplifica a continuación.

*Andrés-Benito
Andrés-Clara
Andrés-Daniel
Benito-Clara
Benito-Daniel
Clara-Daniel*

6 grupos diferentes”.

En esta respuesta, se proporciona como estarían conformados los seis equipos, pero no se hace explícita la asignación o colocación de la tarea que le correspondería realizar a cada uno de ellos, con lo que en nuestra interpretación podría corresponder a un cambio en el modelo matemático del problema, ya que en su respuesta pareciera estar respondiendo a las formas en que se pueden seleccionar dos personas de un total de cuatro y no de las distintas formas en que puede lograrse la partición del grupo y asignar las dos tareas distintas, que correspondería al modelo matemático de partición. Una respuesta que contrasta con la anterior en cuanto a que hace evidente el modelo matemático en juego, aunque la argumentación no resulte completa, es la siguiente:

“De 6 diferentes formas.

<i>Mat</i>	<i>Lengua</i>
<i>Andrés- Benito</i>	<i>Clara-Daniel</i>
<i>Andrés-Clara</i>	<i>Benito-Daniel</i>
<i>Andrés-Daniel</i>	<i>Clara-Benito”</i>

Las estrategias de “uso del diagrama de árbol” (T2), “uso del principio multiplicativo” (T4), y “respuesta intuitiva” (T6) se presentaron en ambos semestres. Representando respectivamente el 5.8%, 1.4%, 14.5% de las respuestas correctas en segundo semestre, mientras que en el sexto fueron del 4.3%, 2.1% y 6.4% de las respuestas correctas respectivamente. El “uso de recursos icónicos distintos al diagrama de árbol”(T5) sólo se utilizó por estudiantes del segundo semestre en un 4.3% de las respuestas correctas, mientras que el “uso de fórmula” (T3) sólo se utilizó por un 8.5% de quienes respondieron correctamente en el sexto semestre, lo que es una característica similar en este semestre en el resto de los problemas.

Quienes dieron respuesta usando el “diagrama de árbol”, lo hicieron para encontrar las distintas parejas que se pueden formar, mostrando la elaboración por separado para cada una de las personas y el resto con quien podría formar el equipo. Posteriormente tachan las parejas que se repiten y a partir de aquí dan la respuestas, aunque frecuentemente no hacen referencia a las tareas asignadas a cada equipo.

En cuanto al “uso del principio multiplicativo”, también fue puesta en juego con la finalidad de determinar las parejas, como se muestra en el siguiente ejemplo, en el que lo que aparece subrayado fue lo que el estudiante tachó.

“Cada persona lo puede hacer con 3 distintas, serían 12 maneras de dividirse el trabajo, pero como se repiten y se quitarían quedan 6 formas para dividirse el trabajo sin repetir A-B, A-C, A-D, B-A, B-C, B-D, C-A, C-B, C-D, D-A D-B, D-C”.

En cuanto a la “respuesta intuitiva”, la mayoría no dio más explicaciones, simplemente responden “*6 formas pueden dividirse*”.

Quienes hicieron “uso de la fórmula” dieron sólo eso como respuesta, en ningún caso se acompañó por la lista de opciones u otra argumentación. En cuanto al “uso de recursos icónicos distintos al diagrama de árbol”, lo que utilizaron fue un diagrama como especie de “gráfica” en la que relacionaban a las personas a través de flechas, utilizando esto para formar los seis equipos.

Además de ocupar el segundo en el orden de mayor número de respuestas correctas en ambos semestres, este problema también fue el que tuvo mayor diversidad en cuanto a la presencia de errores en las respuestas dadas por los estudiantes. En el segundo semestre, sólo cuatro de los doce errores no se presentaron, dos de ellos tampoco se presentaron en el resto de los problemas, mientras que en el sexto solo dos tipos de error no ocurrieron, siendo uno de ellos una característica común con el resto de los problemas.

En segundo semestre, el error que mayormente se presentó fue el de “confusión en el tipo de celda” (E10), presentándose en un 12.65% del total de estudiantes de este semestre, mientras que en el sexto semestre este error se presentó en un 10.37% de los casos analizados. En este caso, los estudiantes muestran las particiones posibles del conjunto, pero no distinguen la tarea que le corresponde realizar a cada uno de ellos, como ocurre en el siguiente ejemplo.

“Se puede realizar de 3 formas

- 1.- Clara – Daniel Andrés- Benito,*
- 2.- Clara – Benito Andrés – Daniel,*
- 3.- Clara – Andrés Benito – Daniel”.*

Después del error ya citado, en segundo semestre otros errores que tuvieron una frecuencia de aparición muy similar, son el de “enumeración no sistemática” (E5) que se presentó en un 10.84%, el de “cambiar el modelo matemático del problema” (E1) en un 11.45% y la “respuesta intuitiva errónea” (E6) un 10.24%. Estos resultados contrastan con lo obtenido en sexto semestre pues los índices de aparición fueron del 6.67%, 23.7% y 2.96% respectivamente.

Clasificamos dentro de “enumeración no sistemática” a quienes daban la solución por medio de la elaboración de la lista de opciones posibles, pero no lo hacían en forma completa, por ejemplo:

“4 formas A-C M, B-D L, A-D M, B-C L” .

En este caso se hace explícita la asignación de la tarea a cada partición del conjunto, mostrando con ello la interpretación como un problema de partición, lo que no se presentó en casos como el siguiente:

“Andrés-Benito, Clara-Daniel, Daniel-Andrés, Andrés-Clara, creo que son todas las posibilidades posibles”

en el que no se hace explícita la asignación de la tarea a los equipos. Esta última situación la clasificamos dentro del error de “enumeración no sistemática” y también en el de “cambiar el modelo matemático del problema”.

Además del ejemplo citado, otras respuestas que también clasificamos dentro de “cambiar el modelo matemático del problema” son aquellas que presentan todas las opciones posibles en cuanto a los equipos que se pueden formar, pero que no toman en consideración las distintas particiones del conjunto que se tienen al formar esas parejas, dando respuestas como las siguientes:

<i>“Matemáticas</i>	<i>Lengua</i>	
<i>Andrés-Benito</i>	<i>Clara-Daniel</i>	
<i>Clara-Daniel</i>	<i>Daniel-Benito</i>	<i>12 porque son 6 formas en cada materia y se multi-</i>
<i>Daniel-Andrés</i>	<i>Daniel-Andrés</i>	<i>plican por 2 o se hacen las otras combinaciones</i>
<i>Benito-Clara</i>	<i>Clara-Benito</i>	<i>el resultado es el mismo.</i>
<i>Clara-Andrés</i>	<i>Clara-Andrés</i>	
<i>Benito-Daniel</i>	<i>Benito-Andrés</i>	

En cuanto a la “respuesta intuitiva errónea” (E6), otro de los errores que más predominaron en el segundo semestre, se obtuvieron respuestas como “*R= de 8 formas*” o “*Serian 12 formas diferentes*”.

Otro error que se presentó en ambos semestres pero en menor proporción respecto a los anteriores es el “error en las particiones formadas” (E11), que tuvo un índice del 5.42% en segundo semestre y del 4.44% del sexto. En este tipo de error clasificamos algunos casos que al formar las particiones ocurrían repeticiones en las parejas, dejando sin considerar a un elemento como el caso siguiente:

“Benito y Clara = Mat, Andrés y Clara= lengua Andrés y Daniel = Mat, Benito y Daniel = lengua Son dos maneras”

a quienes no tomaban en cuenta la condición dada en el problema respecto a la forma en que se formaban los equipos como en el siguiente ejemplo:

"1.- Andrés, Benito= Lengua, 2.-Clara, Daniela = MATEMÁTICAS, 3.- Andrés, Benito y Clara =MATEMÁTICAS, 4.-Daniela =LENGUA, 5.-O los 4 amigos hacen los 2 TRABAJOS "

La "manipulación de los datos numéricos dados en el problemas" (E12) , en el segundo semestre se presentó en dos estudiantes y en el sexto en un total de once estudiantes, correspondiendo al 1.2% en segundo semestre y al 8.15% en sexto. En el segundo semestre dos respuestas que clasificamos dentro de esta categoría son las siguientes:

"De 16 formas.

Datos

4 amigos $4 \times 2 \times 2 = 16$

2 trabajos

se dividen en 2"

y

"4 formas. Porque son 4 individuos y son 2 trabajos por realizar los multipliqué $2 \times 4 = 8$ entre 2 que son los trabajos y me dio a 4 formas de dividirse".

Mientras que en el sexto, se tuvo una respuesta parecida a esta última " $4 \times 2 = 8$ de 8 formas". En todos los casos ponen en juego los números que representan datos dados en el problema, a través del producto, sin mayor análisis de la situación planteada.

En lo que se refiere al error de orden, el cual se presentó mayormente en sexto semestre (un 1.81% del segundo y un 16.3% en sexto), las respuestas que aquí se clasificaron en la mayoría de los casos proporcionan un conjunto de parejas en las que no tomaban en cuenta el orden al formarlas, como en el siguiente ejemplo, que además presenta "error en las particiones formadas" (E11).

"16 formas diferentes

AB CD DA CB

AC DC DB AC

AD BC DC BA

BA DC

BC DA BC DA,

BD AC AB CD

$CA\ BD$ $CD\ BA,$
 $CB\ AD$
 $CD\ BA$ $CA\ BD.$

Similarmente a lo que ocurrió con el “error de orden” (E2), el “error de interpretación del diagrama de árbol” (E9), se presentó en segundo semestre sólo en un 0.6%, mientras que en el sexto ocurrió en un 9.6% del total de respuestas. Los errores que se presentaron en cuanto al diagrama de árbol, fueron tanto en la elaboración como en la interpretación del mismo. Un ejemplo es quienes consideraron cuatro árboles por separado contruidos a partir de cada una de las personas, y posteriormente no reflexionaron en cuanto a la duplicidad de las parejas formadas. Otra situación de este estilo en cuya elaboración del diagrama consideraron repetición, dando como respuesta “ $4x4=16$ ”, siendo este caso la única respuesta que presentó el “error de repetición”.

Finalmente, el error denominado “no recordar la fórmula correcta” (E7) sólo se presentó en dos estudiantes del sexto semestre. Las respuestas proporcionadas por estos estudiantes fueron:

$${}^4C_2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12 \text{ formas}$$

y

“ ${}^2C_4 =$ de 4 formas diferentes”.

Problema No. 4

Este problema fue resuelto correctamente por un 9.64% de los estudiantes del segundo semestre, ocupando el tercer orden de magnitud de respuestas correctas en ese semestre. En el sexto semestre un 31.85% lo resolvieron correctamente, ocupando en este caso el cuarto orden de magnitud de respuestas correctas. En el segundo semestre fue uno de los problemas al que dieron respuesta casi la totalidad de estudiantes (3.6% fue dejado sin respuesta) y en sexto este porcentaje resultó mayor (5.93%), convirtiéndose en el segundo problema que más estudiantes dejaron sin respuesta.

El recurso al que principalmente recurrieron los estudiantes al tratar de responder al problema que ahora estamos analizando fue la “enumeración” (T1). En el caso de respuestas correctas un 75% de los estudiantes optaron por el uso de esta vía, mientras que en el sexto lo hicieron un 69.8%

Las diferencias en las respuestas correctas en este caso se presentan en que algunos estudiantes exhiben el conjunto solución completamente, mientras que otros sólo elaboran

la lista parcialmente pero de modo que sirva de apoyo para concluir su respuesta, por ejemplo:

"222,224,227, 229, 242, 244,247,249,272,274,277,279,292,294,297,299. $16 \times 4 = 64$. 64 formas posibles".

Estos dos tipos de respuestas exhiben niveles distintos en su elaboración, pues aunque ambos siguen la misma estrategia, en el segundo de los casos el que el estudiante no complete la lista y concluya a partir de un subconjunto de las opciones posibles muestra su capacidad para llevar un "control" de las opciones restantes, lo que quizá no fue posible en el estudiante que optó por mostrar la lista completa.

Otra de las estrategias que utilizaron en ambos semestres es la "elaboración del diagrama de árbol" (T2), con diferencias en cuanto a que algunos presentan sólo un árbol en el que consideran las 64 ramificaciones, mientras que otros construyen cuatro árboles por separado, considerando como inicio cada uno de los cuatro números dados en el problema.

En otras respuestas que se dieron correctamente en ambos semestres el tipo de estrategia fue la "respuesta intuitiva" (T6), presentándose en un 12.5% en segundo semestre y un 6.8% en el sexto.

Para finalizar lo correspondiente al análisis por estrategias en las respuestas correctas, nos referiremos al "uso del principio multiplicativo" (T4) que únicamente se presentó en estudiantes de sexto semestre, (11.6% de quienes respondieron correctamente). En este aspecto, las respuestas simplemente exhiben una operación, sin mayor argumentación, como: " $4 \times 4 \times 4 = 64$ ", lo que de acuerdo a nuestra interpretación corresponde a la puesta en juego de este tipo de estrategia.

Respecto a la presencia de errores, el principal error que presentaron en ambos semestres fue el de enumeración no sistemática. En el segundo semestre un 57.23% del total de estudiantes no dieron la respuesta correcta debido a que, según interpretamos, no pudieron completar la lista de opciones posibles, manifestando la falta de un procedimiento sistemático de enumeración para ello. El porcentaje de aparición de este error fue del 28.89% en el sexto semestre.

En el segundo semestre la enumeración no sistemática junto con la "respuesta intuitiva errónea" (E6), fueron los errores que más se presentaron, mientras que en el sexto semestre el "error de manipulación numérica de los datos dados en el problema" (11.85%), seguido del "error de repetición (E3)" fueron los de mayor aparición después de la enumeración no sistemática. Un caso en que se presentó el "error de repetición" consistió en no considerar la repetición de los elementos cuando la situación si lo requiere. Un ejemplo es el siguiente.

“ $6 \times 4 = 24$ porque cada número se puede conjugar 6 veces y lo multiplique por los 4 números 247, 274, 279, 297, 294, 249”.

En cuanto al error denominado “manipulación numérica de los datos” (E12)” mostramos dos respuestas que, aunque con distinta presentación, las podemos considerar como equivalentes en términos de su interpretación. En ambos casos se da como repuesta el mismo valor numérico aunque explican de manera distinta como obtuvieron ese valor, en la primera de ellas:

*“12 cifras diferentes.
 Datos
 4 bolas $4 \times 3 = 12$
 3 veces”*

mientras que en la segunda:

*“ $R = 12$ combinaciones distintas.
 Multiplicamos el número de veces que podemos sacar la bola por las 4 bolas numeradas”.*

Como podemos observar el argumento es similar aunque la presentación es distinta. Lo que consideramos se privilegia por parte de los estudiantes son los datos dados en el problema, que luego ponen en juego a través de una operación, mostrando con ello una tendencia a la resolución de los problemas sin realizar un análisis previo de la situación a la que se pretende dar respuesta.

Finalmente, hacemos referencia al “error de orden” (E2) que se presentó únicamente en sexto semestre y a la “interpretación del diagrama de árbol” (E9) que se presentó en mayor proporción en sexto semestre.

En el primero de los casos, las respuestas fueron equivalentes excepto por su escritura, ya que en un caso respondieron “ $\frac{4!}{3!}$ ”, mientras que otros estudiantes daban como respuesta: C_3^4 . Respecto al diagrama de árbol, los errores se presentaron tanto en su elaboración como en su interpretación.

Problema No. 5

De acuerdo a las tablas V.1 y V.2, este problema fue resuelto correctamente por un 22.29% de los estudiantes del segundo semestre, colocándose en el cuarto orden de magnitud de respuestas correctas en ese semestre, mientras que en el sexto semestre lo resolvieron correctamente un 23.7% en este caso el tercer orden de magnitud de respuestas correctas.

Este problema presenta en ambos semestres índices muy similares en cuanto a la clasificación inicial que incluye respuestas correctas, erróneas y “sin respuesta”. En cuanto al análisis de las estrategias puestas en juego en la resolución encontramos que la

“enumeración” (T1) fue utilizada por un 46% de los estudiantes que respondieron correctamente en segundo semestre, mientras que en el sexto lo hicieron un 53.1%.

En este caso, la diferencia en quienes dan este tipo de respuesta se presenta en que algunos identifican cada sobre con la letra inicial del color, mientras que otros escriben completamente la palabra que indica el color, como en los siguientes ejemplos:

“De 4 formas. ABC, ACD, ABD, BCD”.

En este caso, el estudiante elige una notación mediante la cual indica cada color del sobre, y procede a escribir la lista de opciones que se tendrían. Observando mas detenidamente podemos ver que aunque tiene la lista completa, no fue sistemático en su elaboración, lo que ocurre también con el siguiente estudiante:

“Contando el ejemplo de 4 formas porque los colores no se van a repetir porque solo hay un sobre de cada color.

3 cartas 4 sobres

Amarillo Blanco Crema

Amarillo Blanco Dorado

Blanco Crema Dorado

Crema amarillo Dorado ”

Analizando el resto de las estrategias puestas en juego observamos que en el segundo semestre la resolución mediante el uso de tablas o representaciones de otro estilo, en donde inclusive dibujaron los sobres y cartas, fue la estrategia a la que más estudiantes recurrieron después de la enumeración, 29.7% de las respuestas correctas, mientras que en el sexto semestre sólo la utilizaron 9.4% de los estudiantes. Un ejemplo de este tipo es el siguiente.

4 Formas.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
✓	✓	✓	
✓	✓		✓
✓		✓	✓
	✓	✓	✓

Adicionalmente, en este caso, aunque su recurso fue la construcción de esta tabla, podemos observar que en ello se procedió en forma sistemática.

Contrario a lo que ocurrió con la estrategia que acabamos de analizar, cuando revisamos el “uso de la fórmula” (T3), observamos que un 28.1% de estudiantes de sexto semestre

hicieron uso de este recurso, mientras que en el segundo semestre no se presentó el uso de esta estrategia, lo cual es explicable pues quienes han tenido instrucción en el manejo de tales procedimientos son precisamente los estudiantes del sexto semestre. Por otra parte En segundo semestre obtuvimos un alto porcentaje de “respuestas intuitivas” (T6) (24.3%), mientras que hubo un 9.4% respuestas de este tipo en el sexto semestre.

Tomando en consideración lo que respecta al análisis de errores, observamos que la “respuesta intuitiva errónea” (E6) fue lo que más se presentó en el segundo semestre (21.08% del total de estudiantes), seguida del de “manipulación numérica de los datos” (E12)”, que se presentó en un 12.65% . En este último caso las respuestas que obtuvimos involucraron el producto de la cantidad de sobres por el de el de cartas, como en el caso siguiente.

*“12 formas diferentes Porque con sólo aplicar matemáticas, 3 cartas 4 sobres $3*4=12$ ”.*

En sexto semestre estos dos errores se presentaron en un 13.3% y 15.6% respectivamente.

En igual proporción se presentaron en el segundo semestre los errores de “enumeración no sistemática” (E5), “confundir el tipo de objeto” (E4) y el de “interpretación errónea del diagrama de árbol” (E9) (4.8% del total de estudiantes). En el primer caso se presentaron como respuesta una lista incompleta de los sobres seleccionados, por ejemplo:

“Una en el dorado, blanco, crema; - amarillo, blanco, dorado; - blanco, crema, amarillo; se pueden colocar las cartas de tres formas diferentes”

Como se puede observar, este estudiante además de mostrar una lista incompleta, no es sistemático en la elaboración de la misma. En el sexto semestre este error sólo se presentó en un 1.48%.

Respecto al resto de estos últimos errores, E4 y E9, a los que hacemos referencia, también se presentaron en la misma proporción en sexto semestre (16.3%). En el error de “confundir el tipo de objeto”, clasificamos a quienes establecían una correspondencia entre el sobre seleccionado y cada una de las cartas, a las cuales les asociaban un número. Esto en nuestra interpretación corresponde a considerar las cartas como distintas, cuando el problema señala lo contrario. Otro ejemplo de esta situación es el siguiente.

*“una en el sobre amarillo,
-otra en el blanco
-y la última en el crema
-o al revés la primera en el crema
-la segunda en el blanco*

*-y la tercera en el amarillo
o una en el blanco, la otra en el crema y la última en el dorado"*

Este ejemplo muestra uno de los casos en que consideramos se da la confusión en el tipo de objeto, debido a que en sus primeras dos opciones considera la colocación de las cartas como objetos distinguibles, dando como resultado para la misma elección de sobres dos opciones distintas.

En lo que se refiere a al "interpretación errónea del diagrama de árbol" la mayoría de las situaciones dieron como respuesta la elaboración de cuatro diagramas de árbol por separado, tomando como raíz cada uno de los colores y como ramificación los números uno, dos y tres o a la inversa, de lo que concluían como respuestas doce formas.

Adicionalmente a los errores ya citados, en el sexto semestre se presentaron el "error de orden"(E2), el "error de repetición"(E3) y el de "no recordar la fórmula correcta"(E7). En cuanto al primero de ellos, clasificamos a quienes dieron como respuesta una lista de opciones en las que consideran importante tanto el orden, como en el siguiente ejemplo, que aunque responde 36 formas, solo enlista 24 que son el resultado de considerar el orden:

"36 formas

<i>ABC</i>	<i>BAD</i>	<i>CBA</i>	<i>DAB</i>
<i>ABD</i>	<i>BAC</i>	<i>CBD</i>	<i>DAC</i>
<i>ACB</i>	<i>BCD</i>	<i>CAB</i>	<i>DCB</i>
<i>ACD</i>	<i>BCA</i>	<i>CAD</i>	<i>DCA</i>
<i>ADB</i>	<i>BDC</i>	<i>CDA</i>	<i>DBA</i>
<i>ADC</i>	<i>BDA</i>	<i>CDB</i>	<i>DBC</i>

Otra situación de este estilo, son quienes simplemente responden: "4 3 2 = 24".

El "error de repetición" (E3) lo consideramos en respuestas como la que mostramos a continuación.

"4= sobres, 3= cartas. Se pueden dar combinaciones de 4 sobres y tres cartas $\rightarrow 4^3 = (4)(4)(4) = 64$, se podrían dar 64 combinaciones posibles entre las cartas y los sobres".

En este último ejemplo, interpretamos que en cada elección, está considerando como posible la elección de cualquiera de los cuatro sobres. Todos los casos que clasificamos dentro de este error dan como respuestas sesenta y cuatro, y lo argumentan ya sea como el ejemplo o considerando el problema anterior.

Finalmente, en cuanto al “error de fórmula” se presentaron respuestas en las que indican la operación combinatoria con un resultado erróneo, como: “ $3C4=36$ formas” o “ $C_3^4 = 24$ formas”.

Problema No. 6

El mayor porcentaje de respuestas correctas en ambos semestres ocurrió en este problema (un 51.81% en segundo semestre y un 63.70% en sexto semestre), siendo el único problema que rebasó el 50% de respuestas correctas en ambos semestres. Otro detalle que se presentó en este problema es que en ambos semestres un índice alto de estudiantes dejaron este problema sin respuesta, lo que puede explicarse en términos de que es el último que tuvieron que resolver los estudiantes y que probablemente no tuvieron el tiempo suficiente para hacerlo.

Este problema fue en el que mayormente se presentó la “enumeración” como estrategia de resolución (de las respuestas correctas un 86.1% en segundo semestre y un 73.3% del sexto usaron este recurso). En ambos semestres no se puso en juego la estrategia del “uso de recursos icónicos distintos al diagrama de árbol” (T5). En segundo semestre, además de esta última estrategia el otro recurso que no se utilizó fue la “fórmula”(T3), característica similar en el resto de los problemas para este semestre.

Una de las explicaciones que damos al resultado obtenido en este problema es que el valor de los parámetros involucrados, así como también el tipo de operación combinatoria, permiten que la respuesta pueda obtenerse fácilmente por medio de la elaboración de la lista de opciones posibles. Esto contrasta con lo ocurrido en el problema cuatro en el que los valores de los parámetros son similares, pero la operación combinatoria involucrada produce un valor en la respuesta cuya resolución vía esta estrategia requiere contar con procedimiento sistemático de enumeración que permita obtener la lista completa. Estos dos ejemplos constituyen una evidencia de las dificultades que tienen los estudiantes de este nivel para tratar con situaciones que involucren números que no sean “pequeños”.

En cuanto al análisis de los errores, a diferencia del resto de los problemas, en este problema uno de los principales errores que aparecieron fue el de repetición, presentándose en un 14.46% de las respuestas del segundo semestre y en un 6.67% en el sexto semestre. Este error en la mayoría de los casos consistió en exhibir una lista en la que tomaban en cuenta la repetición de los dígitos como en el siguiente ejemplo.

“222,444,777,224,227,242,272,422,424,427,442,472,477,722,744,724,727,742,772”.

Además de este último error, en el segundo semestre también se presentaron en un porcentaje considerable el error de “enumeración no sistemática” (E5), un 14.46% y el de “respuesta intuitiva errónea” (E6) en un 6.63%, mientras que en el sexto el primero de ellos se presentó en un 4.44%, y el segundo presentó en un 6.67%. En el primero de estas situaciones se mostró la lista incompleta como “247, 427, 742”, mientras que en el segundo se obtuvieron respuestas como “un número”.

Otro error común fue el de “manipulación numérica de los datos” (E12). En este caso, se proporcionaron respuestas como:

“(2)(4)(7)=56 Se pueden obtener dieciocho números de tres cifras”.

Únicamente en sexto semestre se presentó el error de “interpretación errónea del diagrama de árbol” en las dos respuestas que clasificamos dentro de este caso, el error consiste en que en la construcción del diagrama de árbol correspondiente consideran por separado tres diagramas tomando en la primera ramificación como posible la repetición de los dígitos, mientras que en la segunda no la consideran.

V.3 Análisis general

En términos generales, podemos señalar que la información obtenida en la parte experimental del trabajo pone en evidencia algunos señalamientos que hacemos mención con anterioridad y que particularmente hemos estado interesados en observar.

En lo que se refiere a las distintas estrategias que ponen en juego, podemos apreciar que en lo general, los estudiantes no logran sobrepasar la enumeración como una vía de resolución. Inclusive quienes optan por esta vía, la que podría ser una estrategia admisible dadas las características de los problemas planteados, presentan dificultades para conseguir el espectro de opciones posibles.

Este resultado en alguna forma se relaciona con los señalamientos vertidos por Hadar y Hadas (1981), en relación a las dificultades que presentan los estudiantes al resolver situaciones de este tipo. En esa dirección, advierte una serie de dificultades iniciando con la no percepción del problema a resolver. En cuyo caso podría ser esta una explicación a casos en los que hemos obtenido respuestas como “247”, no obstante lo hemos clasificado dentro del “error de enumeración no sistemática”.

Esta misma dificultad también la hemos asociado a respuestas como *“1 porque como se va sacando las bolas ya no se vuelven a echar a la urna y sacando una sola quedan dos ya no es posible hacer un cifra de 3”*, en la que al parecer no percibe la situación planteada. Esta respuesta no ha sido clasificada debido a que no dispusimos de una categoría para ello, basados en que en el pilotaje situaciones de este estilo únicamente se presentaron pocos casos, sin embargo en aplicación definitiva, observamos esto se dio con mayor frecuencia en los estudiantes del segundo semestre, mientras que en el sexto sólo en casos aislados, detectados principalmente en el problema seis.

En este mismo problema, otras situaciones que no fueron sido clasificadas son aquellas hacen referencia al problema cuatro, por ejemplo *“64-12=52. Como en el problema 4 se hizo un problema similar pude obtener la información de ahí. 52 números de 3 cifras”*, en el que parece no tomar en cuenta la modificación del tamaño de la población.

Ejemplos adicionales de respuestas que se dejaron sin clasificar en el segundo semestre, son estas respuestas proporcionada al problema dos: “*Son 5 problemas tres tienen que ser impares y solo dos de ellos serán un número par*” o bien “*Se pueden seleccionar los más fáciles, para no dificultar la situación*”, ambos problemas no se consideraron en la clasificación por considerarlos en las circunstancias arriba mencionadas.

Así mismo en el problema tres hubo respuestas como “*Andrés puede hacer la mitad (1/2) trabajo y Benito la otra. Clara investiga sobre el trabajo que le dejaron y Daniel lo escribe O cada uno de ellos hace el trabajo que ha ellos les tocó. Hay 3 maneras o más diferentes*”, en donde en la respuesta dada al final no parece estar asociada con la situación que él mismo plantea, por lo cual lo consideramos más bien como de una percepción distinta del problema.

Situaciones como las antes descritas también se presentaron en el resto de los problemas, aunque lo más crítico se dio en el segundo semestre en el problema cinco, problema que también se destacó en ese semestre en cuanto a las estrategias puestas en juego.

Explicaciones a estos resultados pueden por un lado a una falta de experiencias de los estudiantes en el manejo de este tipo de problemas, situación que quizás sea distinta en los estudiantes del sexto semestre, de los que se puede decir que en los hechos han tenido cierto contacto con este tipo de situaciones. En esta perspectiva, podríamos señalar que estos resultados podrían ser un indicativo de un nivel distinto de comprensión, aunque tal vez no el óptimo, en los estudiantes de sexto semestre.

Retomando el aspecto de las dificultades, una que consideramos se relacionan con los resultados que hemos obtenido en nuestra investigación, y que también es señalada por Hadar y Hadas, es el que los estudiantes no recurren a fijar variables, lo cual resultaría útil para obtener casos particulares que involucre el problema y que puede ser utilizado para obtener el listado completo, esto creemos está muy relacionado específicamente con el alto índice de errores de enumeración no sistemática.

En cuanto al análisis de las variables de tarea que hemos puesto en juego en esta parte experimental, es de señalarse como en los problemas que involucran un espectro “pequeño” de opciones como respuesta, tuvieron el mayor número de respuestas correctas (problemas tres, cinco y seis), mientras que los problema uno y cuatro, cuya solución involucra un espectro de opciones mayor, presentaron un número considerable de errores, lo que muestra que el valor de los parámetros juega un papel importante en la resolución de dichos problemas, en el sentido de que se manifiesta cierta facilidad para trabajar con valores pequeños.

Resulta pertinente destacar como un caso especial el problema dos, pues a pesar de tener como parámetros valores “pequeños”, sólo superó en el total de respuestas correctas al problema uno. Tomando en consideración de que en este caso la variable de tarea correspondiente al modelo combinatorio implícito toma el valor de selección, los resultados obtenidos nos muestran que los estudiantes tienen dificultades inclusive para resolver situaciones que incorporan el modelo combinatorio tradicionalmente enfatizado curricularmente.

En este mismo sentido, si consideramos el análisis de esta misma variable de tarea, se observa que en general los estudiantes no hacen explícito el modelo combinatorio, tratando todos los problemas como si correspondieran a un modelo de selección. En particular, esto se observó mayormente en el problema tres cuyo valor de esta variable de tarea es el de partición y en cuyas respuestas consideraban la selección de los equipos, no hacían explícita la partición correspondiente, y como consecuencia, ni la asignación de la tarea a cada una de estas particiones.

En lo que se refiere al tipo de elementos que se combinan, podemos observar como en los problemas en que esta variable tomó el valor de “números” el manejo de los mismos resultó más familiar, principalmente en el problema seis, no ocurriendo lo mismo en el problema cuatro que también involucró números, aunque en este caso consideramos que el valor de la respuesta tuvo una influencia importante.

En cuanto al manejo con objetos, pudimos observar que mayormente tuvieron dificultades en los problemas uno y dos, y en menor grado en el problema cinco. En este caso los problemas uno y dos incluyen el mismo valor de los parámetros, excepto el correspondiente a la solución, y difieren en el tipo de operación combinatoria, mientras que en los problemas dos y cinco esta última variable de tarea toma el mismo valor. Por tanto, una explicación para estos resultados podría estar más ligado al tipo de operación combinatoria que involucran los problemas y no tanto al tipo de objetos que se combinan.

En cuanto al tipo de operación combinatorio, resulta sobresaliente que en la mayoría de las respuestas no incorporaron el manejo de expresiones convencionales que se utilizan en la resolución. Sin embargo observamos que la mayoría de los estudiantes pudieron responder con éxito el problema seis que involucra como valor de esta variable a las permutaciones sin repetición, mientras que el problema cuatro que incluye la misma operación bajo la condición de repetición no fue resuelto con la misma facilidad.

En esta misma variable, si consideramos los problemas en que el valor correspondiente fue el de combinaciones, pudimos observar no sólo las dificultades en cuanto al manejo de una expresión convencional para las mismas, sino además la presencia de un porcentaje alto de estudiantes clasificados en la categoría correspondiente al “error de orden”, lo cual pone de manifiesto la no distinción entre una permutación de una combinación y como consecuencia la tendencia a manejar estas dos variables como equivalentes.

Continuando con el análisis de las distintas estrategias de resolución puestas en juego, llama la atención los bajos índices que ocurren por ejemplo en el uso de fórmula, principalmente en el sexto semestre, ya que son quienes han recibido instrucción en estos tópicos. Igualmente puede decirse en el caso del diagrama de árbol, pues de quienes recurrieron a esta estrategia, muy pocos pudieron dar una respuesta acertada.

En relación a esto último, en su lista de ideas fundamentales Heitele señala a la combinatoria como una de ellas, y en particular hace referencia al diagrama de árbol como una representación icónica de importancia fundamental por hacer visibles características como la multiplicidad de pasos del experimento y a todos los resultados posibles. Tomando

en consideración estos señalamientos, podemos observar cómo el manejo de este recurso es muy limitado aún en estudiantes del sexto semestre. Lo cual pudiera explicarse quizás en términos del poco uso que se le da a este recurso en la resolución de problemas en clase.

Por otra parte, mientras que en el segundo semestre se presentan otras alternativas para encontrar la solución como el manejo de tablas, estas opciones ya no se presentan en el sexto semestre, esto en alguna forma tiene relación con lo señalado por Fischbein, en cuanto al desarrollo de intuiciones, tanto primarias como secundarias. En lo que se refiere a los estudiantes de segundo semestre, aunque no han tenido oportunidad (curricularmente) de resolver situaciones de estas características, han desarrollado intuiciones primarias que les permiten enfrentar el problema planteado y resolverlo, aunque no dispongan de una técnica específica para tales situaciones.

En cuanto al desarrollo de intuiciones secundarias, podríamos tomar como ejemplo la construcción e interpretación del diagrama de árbol como una intuición secundaria que debería ser apoyada fuertemente en la escuela. Sin embargo, en los resultados observamos como se manifiesta una evolución totalmente insatisfactoria, lo que es preocupante dada su importancia no sólo en la construcción de ideas combinatorias sino en forma más general en un modo de pensamiento que ponga en juego el uso de formas icónicas que sirvan de apoyo en la búsqueda de resolución de situaciones diversas.

La presencia de los errores de orden y de repetición ponen de manifiesto las dificultades para distinguir el tipo de operación combinatoria involucrada en la resolución del problema. En el primer caso, los estudiantes utilizaron indistintamente la expresión para las permutaciones y la de combinaciones, por ejemplo daban la misma respuesta para los problemas uno y dos. Esto último también ocurría en el caso de los problemas cuatro y seis.

Otro aspecto de interés es la variedad de notaciones que los estudiantes eligen en el momento de resolver el problema. En este caso, observamos las dificultades que tienen para sintetizar la información proporcionada en una notación conveniente, esto se refleja en los problemas que involucran objetos no numéricos, lo cual hace evidente la falta de familiaridad en el manejo de situaciones que involucren el manejo con objetos de este estilo.

Como de antemano se destacó, investigaciones relacionadas con la presente son los trabajos realizados por Navarro-Pelayo y colaboradores. En este sentido, en la presente investigación pudimos constatar en los estudiantes de nuestro medio la presencia de la mayoría de los errores reportados por ellos. Nosotros además incluimos una nueva categoría que agrupa una situación errónea que en principio podría ser interpretado como una respuesta intuitiva errónea, pero que al poner en consideración argumento que se utilizó para dar respuesta, decidimos clasificarlos dentro de un grupo distinto. La clasificación por estrategias para el caso de las respuestas correctas, es otro distintivo de la presente investigación.

Una observación adicional es que en estudiantes de nuestro medio no obtuvimos la categoría denotada como E8, que se refiere a “no recordar el valor de los parámetros”. En estudiantes de nuestro medio, quienes usaron fórmula, lo hicieron con éxito o bien

cometieron el error denotado como E7 que se refiere a “no recordar la fórmula correcta”. En el caso de “no recordar el valor de los parámetros” la interpretación consiste en identificar la operación combinatoria implicada en la resolución pero no recuerdan como intervienen en ella los parámetros, situación que no se presentó en la muestra que nosotros estudiamos.

En cuanto a los períodos de desarrollo señalados por Piaget e Inhelder, en lo que respecta a las operaciones combinatorias, podemos observar que los estudiantes, a pesar de su edad no están en condiciones adecuadas para tratar estos contenidos desde una perspectiva formal, la tendencia de los estudiantes a dar una respuesta en cada caso, a través de la enumeración de las distintas posibilidades, pone de manifiesto un tipo de pensamiento en el tránsito por la etapa de las operaciones concretas, en el sentido de que requieren de la manipulación de los objetos para dar respuesta.

En relación con las investigaciones referentes a la noción de azar y al concepto de probabilidad llevadas a cabo por Piaget e Inhelder, en las que se señala la existencia de una correlación directa entre la formación de las nociones de azar y probabilidad y la de la formación de las operaciones tanto lógicas y aritméticas elementales como combinatorias, vemos en esto una posible explicación a las dificultades observadas en los estudiantes al abordar cuestiones probabilísticas básicas.

En el caso de la noción del azar, al no poseer mecanismos que le permitan poner al descubierto el espectro de todos los arreglos posibles que se pueden formar a partir de un conjunto de varios elementos, tiene como consecuencia el que los estudiantes no son capaces de percibir el azar como una posible explicación a los resultados obtenidos.

Mientras que, en el caso del concepto de probabilidad, el no poseer sistemas combinatorios completos es una limitante que no le permite abordar situaciones que van más allá de los casos elementales, debido a que no pueden establecer comparaciones entre lo favorable y lo posible salvo en casos de espacios muestrales elementales.