CAPÍTULO IV

Metodología

Introducción

En este capítulo se presenta la estructura metodológica que guía nuestro trabajo de investigación. Dicha presentación, inicia con una sección de ideas generales, en la que se incluye una descripción de las fases contempladas en nuestro estudio. Lo referente a los supuestos iniciales de la investigación, a la población a la que se dirige y a la muestra empleada forman también parte de esta primera sección, misma que incluye nuestra postura en torno al papel del marco referencial dentro de nuestra investigación.

En la fase de metodología, que en mayor medida es atendida en el presente capítulo, resulta fundamental la concepción de un cuestionario como instrumento de indagación, que brinde información pertinente para nuestro problema de investigación. De tal modo que, en las siguientes secciones del capítulo, se describen las principales características del cuestionario y lo correspondiente a la interpretación a-priori que nos hemos planteamos de las respuestas de los estudiantes, lo que incluye una categorización de errores, estrategias y formas de razonamiento puestas en juego al enfrentar nuestros cuestionamientos.

IV.1 Ideas generales de carácter metodológico en el estudio

IV.1.1 Fases del estudio

Considerando que el razonamiento combinatorio de los estudiantes, punto central del presente estudio, se manifiesta a través de la resolución de problemas convenientes es posible que los estudiantes, en sus respuestas y argumentaciones, exterioricen indicios de dicho razonamiento. De tal modo que en nuestro trabajo, la elaboración de un cuestionario y su concepción resultaron fundamentales en la consecución de información de apoyo al cumplimiento del objetivo propuesto.

Así, sustentando el estudio en general y la concepción del cuestionario en particular, en una fase inicial del trabajo, se llevó a cabo la fundamentación de corte teórico a través de diversos acercamientos a la problemática que incluyen tanto los puntos de vista disciplinar y cognitivo, como el educativo, lo que se ha asentado en el capítulo precedente.

El aspecto disciplinar se aborda con la intención de tener elementos que nos permitan ubicar, dentro de la Matemática, los contenidos combinatorios de interés, así como su relación e importancia en la construcción del concepto de probabilidad. En el aspecto cognitivo, hemos tomado en consideración la reflexión de aquellos elementos que constituyen el núcleo teórico de nuestra investigación. Y en el tercero, nuestro interés principal fue obtener elementos para ubicar el lugar que tienen los contenidos combinatorios curricularmente. Este último análisis se realizó tanto en nivel básico como en el nivel medio, y de manera muy general en algunas licenciaturas que se ofrecen en la Universidad de Sonora.

La segunda fase del estudio se centró en el diseño del cuestionario que se utilizó y su concepción, la cual se alimenta, entre otras fuentes, de la experiencia tenida en un pilotaje previo realizado en el marco de un proyecto de investigación más amplio en el que colaboramos (Hugues, E. *et. al.*, 2002). Así, como parte de dicha concepción, se abordan los criterios de elaboración que le caracterizan y, particularmente, el papel que en ella se le asigna a las variables de tarea que se ponen en juego. También, a la luz de esta concepción y de los elementos emergentes de la fase anterior, se abordan las implicaciones que pudieran tener en las respuestas que los estudiantes proporcionen al cuestionario concretando esto en categorías de análisis que serán utilizadas en las fase posterior.

La última fase del estudio, que en principio resulta dependiente de las anteriores, consiste en la aplicación del cuestionario y el análisis de las respuestas proporcionadas por los estudiantes. Perfilándose de naturaleza básicamente cualitativa, concreta la exploración del razonamiento combinatorio de los estudiantes y con ella se espera el cumplimiento de algunos de los objetivos del estudio y la constatación de la pertinencia de las categorizaciones establecidas a-priori alrededor de errores, dificultades y estrategias utilizadas por los estudiantes.

IV.1.2 Supuestos iniciales

Como se ha manifestado, en nuestra investigación hemos tomado como sustento teórico los resultados en torno al desarrollo cognitivo de los individuos en lo que respecta a la evolución de las operaciones combinatorias, así como al papel que en ello juega el ambiente instruccional. En este sentido, una consideración de partida en nuestro trabajo consiste en la suposición de que en términos de la edad y de los antecedentes académicos que presentan nuestros sujetos de investigación, lo referente a un desarrollo aceptable en torno a las operaciones combinatorias debiera manifestarse.

Ya se ha señalado que el instrumento de indagación que utilizamos es un cuestionario, decisión basada por una parte en su conveniencia para el manejo de la información dada la cantidad de estudiantes que se involucraron en el estudio, y, por otra en que a través del cuestionario podemos incluir una variedad de situaciones que cubren los diversos aspectos contemplados en la investigación y, en esta perspectiva se considera suficiente para el trabajo. Estamos conscientes de que los estudiantes pudieran tener dificultades para manifestar claramente sus razonamientos en forma escrita, no obstante creemos que la información obtenida por este medio es sumamente valiosa y factible de analizar.

Los resultados aquí obtenidos tienen por supuesto implicaciones didácticas, pues un conocimiento de errores y dificultades podría ser de ayuda para que el profesor promueva el desarrollo de actividades en las que pueda detectar el uso de concepciones inadecuadas y, a partir de ello, promover actividades que apunten hacia una reestructuración conveniente de las mismas.

La población a la que está dirigido el presente estudio lo constituyen jóvenes bachilleres, cuyas edades oscilan entre los 15 a los 18 años. Como escenario de estudio tomamos al Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora de donde se seleccionaron para la aplicación del cuestionario cuatro grupos de segundo semestre y cuatro grupos de sexto semestre. Para esta selección se tomó en consideración que los estudiantes de segundo semestre no habían recibido instrucción en el tópico de interés, mientras que los de sexto semestre si habían tenido la oportunidad de hacerlo, y que de este modo tendríamos manera de ventilar el papel de la instrucción recibida.

Dado que el Colegio de Bachilleres, cuenta con varios planteles en el estado, se hizo una selección de cuatro de ellos, uno ubicado en la ciudad de Magdalena, otro en Ciudad Obregón y los dos restantes localizados en la ciudad de Hermosillo. En cada uno de estos planteles se tomó un grupo de segundo semestre y un grupo de sexto semestre, haciendo los totales que antes se señala.

Nuestro interés no sólo está enfocado a conocer los distintos errores y dificultades que se presentan en los estudiantes, sino que aunado a esto existe un interés, de antemano manifestado, en tratar de establecer explicaciones a estos errores y dificultades, además de tener elementos que nos permitan hacer recomendaciones para la enseñanza e incluso para la incorporación curricular de estos tópicos, que se fundamenten en un estudio profundo de esta problemática.

En este sentido es que cobran relevancia los planteamientos teóricos que anteriormente hemos expuesto. Por un lado, que nos permitan dar explicaciones a los resultados aquí encontrados, así como también nos den elementos que nos ayuden a ubicar en lo general, el estado de desarrollo del razonamiento combinatorio de estudiantes de este nivel escolar y como consecuencia tener elementos que nos permitan pensar en acciones que orienten hacia un desarrollo conveniente de estas ideas por parte del individuo.

IV.2 El cuestionario y sus características

En el diseño del cuestionario nos fijamos como objetivo principal, tratar de observar el papel que juegan las distintas variables de tarea a las que hace alusión en nuestro problema de investigación. Este cuestionario se obtuvo de la experiencia obtenida al someter a prueba un grupo de veinte problemas, que fueron tomados de algunas investigaciones ya realizadas y de libros que exponen ideas básicas del análisis combinatorio (Hugues, E., *et. al.*, 2002).

Esos veinte problemas incluían 18 problemas combinatorios simples y dos compuestos. Se distribuyeron en siete cuestionarios[1] de seis problemas cada uno y se aplicaron en grupos de tercero y quinto semestre de dos de los planteles del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Una pretensión de este pilotaje fue observar la factibilidad de aplicación en estudiantes de nuestro medio, así como la observación de estrategias puestas en juego en la resolución y la detección de errores que nos permitiera afinar criterios de clasificación de los mismos. Tomamos nota de aspectos como el tiempo que los estudiantes empleaban en dar respuesta a esos planteamientos e intentamos, a partir de dichas respuestas, observar si podían interpretar adecuadamente lo que se solicitaba en cada problema. También a partir de sus comentarios, tratamos de observar si los estudiantes los identificaban como problemas relacionados a los contenidos combinatorios, principalmente en aquellos que ya habían llevado los cursos de Probabilidad y Estadística.

A partir de ello, obtuvimos elementos que nos permitieron la elaboración de un marco de análisis previo, en el que contemplamos observar tanto el papel que juegan las distintas variables de tarea, como de los errores, dificultades y estrategias. A partir de estas consideraciones, diseñamos el cuestionario que se aplicó en forma definitiva.

Tomando en cuenta las variables de tarea cuyo impacto se desea estudiar y sus distintos valores posibles, los problemas del cuestionario constituyen una muestra de un conjunto amplio de tipos de problemas, esto es, de al menos 27 tipos. Enseguida mostramos cada uno de los problemas que se utilizan en el cuestionario definitivo, especificando los valores que cada una de las variables toma en ellos, dejando el análisis a-priori de las respuestas para la siguiente sección del presente capítulo.

Como podrá observarse, en cada uno de los problemas incorporamos un ejemplo en el que se trata de sugerir elementos que intervienen en la resolución de los mismos como son notación, orden, y/o repetición de modo que permita a los estudiantes tener claridad en la situación propuesta y con ello, minimizar el número de problemas sin respuesta. No obstante, consideramos que a pesar de estos ejemplos, cabe la posibilidad de que algunos problemas queden sin respuesta por otras causas.

[1] El anexo A2 incluye los cuestionarios como se utilizaron en el pilotaje.

Problema No. 1

El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?

Los valores que toman las variables de tarea en este caso son: Colocación para el modelo combinatorio implícito, permutación sin repetición para el tipo de operación combinatoria, el tipo de elementos que se combinan son objetos y el valor de los parámetros es de cinco para la cantidad de objetos, tres para el tamaño de la muestra, y la respuesta correcta en este problema es sesenta.

Problema No. 2

¿De cuántas maneras se puede asignar una tarea de tres problemas si se dispone de una lista de cinco problemas? Ejemplo: Se pueden seleccionar los problemas impares.

En este caso, el modelo combinatorio implícito es Selección, el tipo de operación combinatoria es una combinación, se combinan objetos y los valores de los parámetros son cinco para la cantidad de objetos, tres para el tamaño de la muestra y diez es la respuesta correcta.

Problema No. 3

Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

Para este problema el modelo combinatorio implícito es Partición, el tipo de operación combinatoria es permutaciones con repetición, aunque también puede ser resuelto usando las combinaciones ordinarias, el tipo de elementos que se combinan son personas y el valor de los parámetros son cuatro y dos para la cantidad de personas y el tamaño de la muestra respectivamente, finalmente el valor de la respuesta correcta es seis.

Problema No. 4

En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Se saca una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se repone en la urna y se elige una segunda, anotando luego su número. La bola sacada se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222.

En esta situación el modelo combinatorio implícito es Selección, la operación combinatoria involucrada es un permutación con repetición, el tipo de elementos que se combinan son números y el valor de los parámetros es cuatro para la cantidad de objetos, tres para el tamaño de la muestra y, sesenta y cuatro la respuesta correcta.

Problema No. 5

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas es posible colocar las tres cartas en los cuatro sobres? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema

Aquí se trata de un problema en el que la variable modelo combinatorio implícito toma el valor de Colocación, y la operación combinatoria es una combinación ordinaria, se combinan objetos y el valor de los parámetros es cuatro para la cantidad de objetos, tres para el tamaño de la muestra y cuatro la respuesta correcta.

Problema No. 6

En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda y se registra su número; y sin devolver la bola extraída, se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número 724.

En este caso, al igual que el problema cuatro se considera un problema en el que el modelo combinatorio implícito es Selección, pero la operación combinatoria involucrada es una permutación sin repetición, el tipo de objetos que se combinan son números y el valor de los parámetros es tres para la cantidad de objetos, tres para el tamaño de la muestra y seis la respuesta correcta.

Como podemos observar, aunque una de las variables de tarea se presente en más de un problema, el resto de variables de tarea es distinto, de modo que podamos ver el papel que cada una de ellas juega en la resolución de los problemas. Como ejemplo de ello, tenemos los problemas cuatro y seis en los que se mantienen el modelo combinatorio y el tipo de objetos que se combinan, mientras que las otras dos variables de tarea se modifican.

Resumiendo, enseguida mostramos la distribución de los problemas del cuestionario definitivo en relación con las diferentes variables de tarea involucradas en ellos:

Tipo de Operación combinatoria

		Permutación sin repetición	*Permutación con repetición*	*Combinación*
Modelo Combinatorio Implícito	*Selección*	Problema 6, Números, $P_{3,3}$.	Problema 4, Números, $PR_{4,3}$.	Problema 2, Objetos, $C_{5,3}$.
	Colocación	Problema 1, Objetos, $P_{5,3}$.		Problema 5, Objetos, $C_{4,3}$
	Partición		Problema 3, Personas, $P_{(4,2,2)}$	

Como puede observarse, en el diseño del cuestionario definitivo la variable de tarea modelo combinatorio implícito toma el valor de selección en tres problemas, el de colocación en dos de ellos, y en uno, el valor de partición. Esta decisión se tomó considerando que, tradicionalmente, en los cursos de este nivel se hace énfasis, principalmente, en los problemas del primer tipo.

En el caso de la variable tipo de operación combinatoria, hemos tomado dos para cada caso, aunque la operación involucrada en los problemas tres y cuatro difieren por el hecho de que, en el problema tres, la repetición está dada por la tarea que realizará cada persona, mientras que, en el problema cuatro por la no modificación de la cantidad de objetos en cada extracción, esto es, este último problema trata de una permutación con repetición.

Respecto al tipo de elementos que se combinan, dos problemas involucran números, tres problemas involucran objetos y uno involucra personas.

Finalmente, respecto a los parámetros tomados en consideración, hemos utilizado números pequeños para la cantidad total de objetos y de la muestra a considerar. En el caso de la respuestas los valores mayores son: sesenta, en el problema uno, y sesenta y cuatro, en el problema cuatro. En general, en las respuestas, los valores que intervienen son "pequeños". Esto con la intención de abrir la posibilidad de resolución vía procedimientos elementales como la enumeración, el uso de tablas o diagramas.

IV.3 Interpretación de respuestas a-priori

Tomando en consideración lo antes expuesto, en esta sección abordaremos lo referente a la interpretación de las respuestas de los estudiantes. Estas se constituyen en el marco general con que fueron analizadas las respuestas proporcionadas al cuestionario definitivo.

De entrada partimos de una categorización de los distintos errores reportada en las investigaciones de las que tomamos algunos de los problemas utilizados en el pilotaje[2].

[2] Esta clasificación ha sido utilizada por Navarro-Pelayo, V., et. al. (1996), considerándola en la presente investigación de acuerdo a nuestra propia interpretación.

Nuestro interés fue observar en qué medida estos errores se presentaban en los estudiantes de nuestro medio, a la vez que tratamos de detectar la presencia de errores no reportados y tomar nota de la frecuencia de aparición de los mismos.

En este sentido, hemos establecido doce categorías, que enunciamos a continuación de una manera general, detallándose posteriormente en el análisis particular de los problemas.

E1: Cambiar el modelo matemático del problema. En este caso, intentan resolver un problema de partición como si fuera de selección, cambiando con ello la naturaleza de la situación que da origen al modelo combinatorio.

E2: Error de Orden. Consiste en confundir el criterio distintivo entre combinaciones y permutaciones, esto es tomar en cuenta el orden cuando este es irrelevante o no considerarlo cuando es esencial.

E3: Error de Repetición. Esto aparece cuando el estudiante no considera la posibilidad de repetir elementos o los repite cuando no es posible hacerlo.

E4: Confundir el tipo de Objetos. Esto ocurre cuando el estudiante considera objetos distinguibles sin serlo o cuando siendo distinguibles no los considera como tales.

E5: Enumeración no sistemática: consiste en resolver el problema por enumeración mediante ensayo y error mostrando un listado incompleto, sin hacer evidente un procedimiento recursivo que le lleve a la formación de todas las posibilidades.

E6: Respuesta Intuitiva Errónea. En este caso sólo se da una solución numérica errónea, sin justificar esa respuesta.

E7: No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente.

E8: No recordar el significado de los parámetros en la fórmula combinatoria

E9: Interpretación errónea del diagrama de árbol. También incluimos la construcción errónea del diagrama

Para los problemas específicos de colocación y partición se han reportado los siguientes errores :

E10: Confusión en el tipo de celdas. Este error aparece cuando distinguen celdas idénticas o cuando las consideran idénticas, siendo distintas.

E11: Error en las particiones formadas. Aparece cuando la unión de todos los subconjuntos de la partición propuesta no contiene a todos los elementos del conjunto, o bien cuando olvidan algunos tipos posibles de partición.

A partir del pilotaje llevado a cabo pudimos observar la presencia de un tipo de respuesta que, por sus características específicas decidimos no incluirlo dentro de los ya señalados aunque pudiera destacarse como el error denotado como E6 o bien pudiera tener alguna relación con el error denotado como E9, sin embargo decidimos establecer una nueva categoría para el mismo por la particularidad de la respuestas en el sentido de que la argumentación dada al problema se da en términos de alguna operación establecida entre los datos numéricos dados en el problema, lo que ubicamos en la siguiente categoría.

E12: Manipulación de la información numérica dada en el problema. Como recién se acaba de señalar, su argumentación está ligada a la realización de operaciones matemáticas con información numérica del problema.

Otras observaciones interesantes realizadas en las respuestas de los estudiantes que participaron en el pilotaje, fueron en algunos casos los que consideraban imposible dar respuesta al problema dando como argumento la existencia de una infinidad de respuestas y en otras situaciones sus respuestas no tenía relación alguna con el problema mismo, lo cual lo interpretamos en el sentido de que proporcionaban respuesta a un problema distinto al planteado y en cuyo caso lo interpretamos simplemente como el no percibir el problema planteado.

Otro aspecto contemplado en el pilotaje, fue el tratar de establecer categorías para las distintas estrategias de resolución empleadas y su frecuencia de uso. En este sentido, nos concentramos sólo en las respuestas correctas y a partir de ellas establecimos las categorías que enlistamos a continuación:

T1: Obtienen la lista de posibilidades utilizando un procedimiento de enumeración sistemático. Por ejemplo, fijando uno de los elementos y haciendo variar el resto.

T2: Uso del diagrama de árbol. En este caso, se elabora el diagrama de árbol en forma parcial o completa en forma correcta y posteriormente, se da respuesta interpretando ese diagrama.

T3: Uso de la operación combinatoria correspondiente.

T4: Uso explícito del principio multiplicativo

T5: Elaboración de tablas o diagramas auxiliares

T6: Respuesta Intuitiva

Detallamos a continuación los aspectos sobresalientes de cada uno de los problemas que se han integrado al cuestionario definitivo, cuya interpretación de respuestas constituyen el análisis a-priori de los problemas que conforman la parte experimental de este trabajo.

Problema No. 1

El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?

Una de las características importantes de este problema corresponde al valor que toma la variable de tarea modelo combinatorio implícito, interesa observar si los estudiantes pueden identificar la naturaleza de la situación planteada, y que da origen al modelo de colocación. En este sentido, se pretende observar si dan elementos que nos indiquen esa percepción del modelo, lo que esperamos se manifieste al hacer explícita cada posible colocación de las personas en las cocheras respectivas, o en un sentido inverso hacer la correspondencia de las cocheras hacia las personas, es decir en concordancia con el modelo de colocación, se requiere colocar r objetos dentro de n cajas (celdas o urnas) o bien establecer una aplicación de un conjunto de r objetos en otro conjunto de n objetos.

Respecto al tipo de elementos que se combinan, considerando que el problema involucra tanto a las personas como a las cocheras (representadas por números), esperamos que muestren claridad respecto a cuáles son los elementos que entran en juego en la resolución, es decir las cocheras y no las personas.

En cuanto a la variable de tarea tipo de operación combinatoria se pretende observar si en ella están considerando la repetición y el orden y si a partir de estas observaciones dan respuesta utilizando una alguna notación que indique que se trata de una permutación sin repetición. En esto mismo trataremos de observar cómo incorporan los parámetros implicados en la resolución.

Puesto que las respuestas que se proporcionan son abiertas, esperamos una variedad de respuestas en las que podamos observar las distintas estrategias empleadas, por ejemplo la resolución vía la enumeración de las opciones posibles, y en ello esperamos detectar errores como la presentación del conjunto de opciones incompleto, manifestándose con esto la ausencia de procedimientos sistemáticos para conseguir dicho conjunto.

Esperamos observar si en sus respuestas se apoyan en recursos icónicos como el diagrama de árbol, en ello esperamos tener información que nos de indicios de su capacidad para la elaboración y la interpretación del diagrama.

Otro de los errores que esperamos se manifieste en este problema se refiere a la forma en que utilizan la información numérica dada en el mismo, por ejemplo una respuesta que se obtuvo en el pilotaje y que se refiere a lo que aquí señalamos fue "*5x3=15, ya que hay cinco plazas y tres coches*". Este tipo de respuestas pudiera ser una manifestación de la tendencia a resolver los problemas que ellos identifican como "de matemáticas" simplemente localizando los números que aparecen como datos y aplicando alguna operación que les parece adecuada.

Otra situación que esperamos observar es el uso de expresiones o fórmulas combinatorias en las que estamos interesados en observar si consideran el orden, la repetición y cómo involucran en ella el valor de los parámetros, así como el manejo mismo de dicha operación combinatoria.

Las siguientes respuestas se consideran como aceptables, y servirán como criterios que nos darán indicios de su nivel de razonamiento combinatorio:

- La elaboración completa de la lista de opciones.
- La elaboración parcial, pero que le permita concluir el resultado total.
- La elaboración de un diagrama de árbol que muestre las distintas opciones posibles, en cuyo caso puede complementarse con una interpretación del mismo.
- El uso explícito del principio multiplicativo
- La aplicación de la expresión para las permutaciones sin repetición o simplemente permutaciones $P_{5,3} = \frac{5!}{3!} = 60 \cdot$

Aunado a lo anterior cabe la posibilidad que se dé una respuesta correcta sin una argumentación de por medio, en cuyo caso deberá tomarse como correcta, aunque no resulte de mucha utilidad para nuestro análisis, lo cual también es válido para el resto de los problemas.

Problema No. 2

¿De cuántas maneras se puede asignar una tarea de tres problemas si se dispone de una lista de cinco problemas? Ejemplo: Se pueden seleccionar los problemas impares.

Al igual que el problema anterior la variable de tarea tipo de elementos que se combinan corresponde a objetos. Otra similitud con el problema anterior son el valor de los parámetros que corresponden al tamaño de la población y al tamaño de la muestra, modificándose el valor de la respuesta debido a que en este caso el tipo de operación combinatoria es el de una combinación ordinaria.

Dado que el modelo combinatorio implícito es selección, esperaríamos que muestren elementos que sirvan como indicios de la identificación de tal modelo, es decir dado que este modelo surge cuando se requiere seleccionar muestras de tamaño r a partir de un conjunto de n objetos, una forma que puede utilizarse para observar esto es la exhibición de la muestra seleccionada, en la que deberán poner en juego si la repetición y el orden son o no importantes.

Considerando que el contexto en el que se plantea este problema es común y que además corresponde a problemas que usualmente forman parte del espectro de problemas estudiados en clase, esperamos pueda resolverse exitosamente. Dadas las características de los parámetros, esperamos que puedan dar respuesta utilizando recursos elementales como tablas, diagramas, etc.

Uno de las estrategias que esperamos entren en juego es la búsqueda de solución vía la elaboración de la lista, de lo cual intentamos observar los elementos constitutivos del modelo que entra en juego en la resolución: la no repetición de los elementos y la no importancia del orden en la selección, a la vez trataremos de observar si son o no sistemáticos en la enumeración.

Es de nuestro interés en la investigación observar en que medida incorporan recursos icónicos en la resolución de los problemas, en particular del uso e interpretación del diagrama de árbol. En este caso estaríamos interesados en observar el uso de este diagrama. Un ejemplo de respuesta relacionada con este problema y que se obtuvo en el pilotaje es cuando consideran sólo dos ramificaciones en el diagrama y a partir de ello responden que la respuesta es 15, o bien elaboran un diagrama parcial y concluyen a partir del mismo, por ejemplo "*el problema 1 con cada uno de los problemas 2,3,4,5 nos dan 4 opciones y lo mismo con los problemas restantes, por lo tanto son 5x4=20 opciones posibles*".

Otro error que apareció con cierta frecuencia en el pilotaje y que estamos interesados en observar si se presenta de nueva cuenta es la resolución utilizando en forma inadecuada la información dada en el problema, un ejemplo es cuando dan como respuesta "*15, ya que hay 1 tarea, 3 problemas y 5 problemas*".

Adicionalmente, un error que esperamos observar es el de no recordar la fórmula en forma correcta. Esto podría ocurrir en dos formas, por ejemplo que identifique la operación combinatoria involucrada en la resolución y dar una respuesta errónea, por ejemplo: *20 formas distintas, porque al sacar las combinaciones de 3 en 5 son las distintas formas de asignar los problemas, o* bien desarrollar adecuadamente una operación combinatoria que no corresponde al problema en cuestión.

En cuanto a las distintas estrategias de resolución que presentan en este problema, una de las estrategias que esperamos utilice para resolver este problema es la elaboración en forma sistemática de la lista de opciones para seleccionar los problemas y para ello una posibilidad es recurrir al uso de alguna notación auxiliar, asignando a cada problema un número o una letra y a partir de ello elaborar la lista.

Otra estrategia que esperamos se presente es la elaboración de tablas o diagramas para la construcción de las distintas opciones. Asimismo, esperamos que entre en juego el uso de fórmula, especificando adecuadamente el valor que en ella toman los parámetros involucrados.

En este caso, consideramos que las estrategias de resolución que los estudiantes utilizarán para llegar a una respuesta correcta son:

- La elaboración completa de la lista de opciones.
- La elaboración parcial, pero que le permita concluir el resultado total.

- La elaboración de un diagrama de árbol que muestre las distintas opciones posibles así como su interpretación o bien de algún otro recurso icónico.
- El uso explícito del principio multiplicativo.
- La aplicación de la expresión para las combinaciones ordinarias $C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

Problema No. 3

Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

En este caso, el valor que corresponde a la variable de tarea modelo combinatorio implícito es partición. De esta forma, interesa observar si los estudiantes identifican en la situación ese valor de la variable, lo cual esperamos se manifieste en términos de la característica implícita en dicho modelo, el cual surge cuando se pide clasificar los elementos de un conjunto inicial en un número dado de subconjuntos incompatibles, de modo que la clasificación sea exhaustiva. Por consiguiente, esperamos se haga explícita la partición solicitada en el problema.

Una muestra del cambio del modelo combinatorio implícito en este problema es que en ocasiones elaboran las particiones posibles sin considerar que a cada opción le corresponde la realización de una tarea, que los lleva a concluir como respuesta 3.

En cuanto al resto de variables de tarea, el tipo de elementos que se combinan en este caso es el de personas, lo que esperamos pongan en juego en la respuesta utilizando una notación conveniente. Respecto al tipo de operación combinatoria, interesa observar si efectivamente utilizan la operación combinatoria correspondiente al modelo, en lo que deberán tomar en cuenta que la partición da origen a dos clases de elementos en el conjunto.

Finalmente, en lo que se refiere al valor de los parámetros, consideramos que tomando en cuenta el total de elementos que tiene el conjunto en cuestión es pequeño, y además que se le impone un tamaño a los subconjuntos solicitados, suponemos que puede ser resuelto vía la elaboración de la distintas opciones en que pueden realizarse las tareas. Además, este problema tiene la particularidad de que puede ser una situación en la que cotidianamente se vean expuestos, lo que puede ser un factor que puede apoyar una resolución correcta por vías elementales.

No obstante, esperamos observar la presencia del error de enumeración no sistemática, el cual se identifica cuando en las particiones mostradas no contienen el total de elementos del conjunto o bien al no escribir todas las particiones posibles.

Otros errores que esperamos observar son los errores de repetición y de orden. En el primer caso puede darse al considerar a una persona como parte de los dos equipos y en el segundo al considerar importante el orden dentro de las parejas formadas.

BIBLIOTECA
DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

Las siguientes son opciones que esperaríamos utilicen los estudiantes para dar correctamente la respuesta al problema:

- La elaboración completa de la lista de opciones, en las que se señale la tarea correspondiente a cada opción.
- La elaboración parcial, pero que le permita concluir el resultado total.
- Apoyándose en algún recurso icónico como puede ser el dibujo de casillas en las que coloque cada una de las opciones posibles o la elaboración de un diagrama de árbol.
- El uso explícito del principio multiplicativo
- La aplicación de la expresión para las permutaciones con repetición $P_{(4,2,2)} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6.$
- Otra opción en este caso, puede ser la resolución vía las combinaciones ordinarias, esto es, $C_{4,2} \cdot C_{2,2} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$, que como es de observarse implica el producto de dos combinaciones ordinarias.

Problema No. 4

En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Se saca una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se repone en la urna y se elige una segunda, anotando luego su número. La bola sacada se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222.

El valor del modelo combinatorio implícito en este caso es nuevamente selección y, considerando que este tipo de situaciones son comúnmente planteadas a los estudiantes. Por ello se prevé que muestren cierta desenvoltura en su resolución, no obstante que el valor de la respuesta correcta sea "grande".

El principal error que esperamos muestren los estudiantes al resolver este problema es la ausencia de un procedimiento de enumeración sistemático, manifestándose principalmente los errores de repetición y de orden.

Otros tipos de respuestas que aparecieron durante el pilotaje y que estaríamos interesados en observar son aquellas en las que el argumento utilizado está relacionado con los dígitos dados en el problema: *" 4x7x9=243 formas de obtener 3 cifras diferentes"*.

También podrían aparecen respuestas en las que el argumento no es congruente con la operación utilizada, que además se efectúa de manera incorrecta: *"este problema requería de ${}_{1}C_{4}$, ya que la bolita se volvía a meter en la urna y tenía que formar un # de tres cifras sin importar que fueran las mismas".* Esta respuesta como la anterior, son ejemplos de en los que se privilegia el uso de los datos dados en el problema a través de una operación que los relacione.

En cuanto al uso de recursos icónicos, esperaríamos que recurrieran al diagrama de árbol, de lo cual observaríamos tanto su construcción como la interpretación dada al mismo.

Por otra parte, en cuanto a las estrategias utilizadas en el pilotaje, observamos que en las respuestas correctas la resolución está basada principalmente en la elaboración de la lista ya sea vía un procedimiento de enumeración sistemático o bien apoyándose en la construcción de un diagrama de árbol. Aunque en algunos casos la lista no se da completa, se deja entrever que se tiene claridad en cómo se pueden formar el resto: *"si con la combinación que empieza en 2 siguierámos empezando con cada uno de los 4 números, serían combinaciones de c/u siendo un total de 64"*.

Hay respuestas correctas en que se manifiesta el uso explícito del principio multiplicativo: *"4x4x4=64. Son tres turnos de sacar con 4 oportunidades de número cada uno"*.

Por lo cual esperamos que las distintas soluciones a este problema puedan darse como en los siguientes casos:

- La elaboración completa de la lista de opciones.
- La elaboración parcial, pero que le permita concluir el resultado total.
- La elaboración de un diagrama de árbol.
- El uso explícito del principio multiplicativo.
- Uso de la operación combinatoria $P_{4,3} = 4^3 = 64$.

Problema No. 5

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas es posible colocar las tres cartas en los cuatro sobres? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema

Para este caso, al igual que el problema número uno, el modelo combinatorio implícito es colocación con la diferencia de que en este caso se trata de objetos indistinguibles y por lo tanto da origen a una operación combinatoria distinta, con lo cual estaríamos interesados en observar si son capaces de observar ésta condición impuesta a la situación, lo cual puede manifestarse en forma errónea cuando ponen una etiqueta a las cartas y después la relacionan con cada uno de los sobres.

El análisis de las respuestas proporcionadas a este problema en el pilotaje, nos permitió detectar una diferencia importante respecto al resto de los problemas en el sentido de que la búsqueda de solución vía la elaboración de las opciones posibles, prácticamente en todos los que lo intentaron se llevó a cabo con éxito, lo cual esperaríamos se presentara de nueva cuenta en la aplicación definitiva.

Sin embargo, un error adicional es respecto al uso e interpretación del diagrama de árbol, lo que puede observarse al construir un diagrama que asocie a cada una de las cartas (que denotan 1,2 y 3), cuatro sobres (que denotan como A,B,C,D), situación típica que se presentó en el pilotaje.

También esperamos detectar el uso inadecuado de la información dada en el problema, como en casos obtenidos en el pilotaje: *"3 cartas x 4 sobres=12 maneras diferentes"*. Esta última situación difiere de la anterior en el sentido de que aquí lo que se privilegia es el uso de una operación a ciertos datos numéricos dados en el problema.

Este problema además tiene la particularidad de que los objetos son indistinguibles, por lo cual estamos interesados en observar si esto es tomado en cuenta en las respuestas de los estudiantes.

Por su parte, en lo que corresponde a las distintas estrategias, durante el pilotaje encontramos básicamente la elaboración de la lista y en casos aislados el uso de la fórmula para las combinaciones $C_{4,3}$, sin su desarrollo. Una estrategia adicional que se puso en juego y que está relacionada directamente al modelo combinatorio implícito es la elaboración de una tabla o dibujo en la que se van colocando cada uno de las cartas, según los sobres que se vayan seleccionando (en este caso las celdas), lo que esperamos se presente de nuevo.

Este problema puede ser abordado siguiendo cualquiera de las siguientes estrategias:

- La elaboración completa de la lista de opciones.
- La elaboración parcial, pero que le permita concluir el resultado total.
- Apoyándose en algún recurso icónico como puede ser el dibujo mismo de los sobres, o el de tablas en las que se muestre la forma en que se van ocupando los sobres o la elaboración de un diagrama de árbol.
- El uso explícito del principio multiplicativo
- La aplicación de la expresión para las combinaciones $C_{4,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4$.

Problema No. 6

En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda y se registra su número; y sin devolver la bola extraída, se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número *724*.

Este es el tercer problema en el que el modelo combinatorio implícito es selección y al igual que el problema cuatro el tipo de elementos que se combinan son números. En este sentido, también lo consideramos como un problema típico de este tipo de situaciones y que normalmente son tratados en clase, con lo cual esperamos se manifieste facilidad en las respuestas proporcionadas por los estudiantes.

Respecto al tipo de operación combinatoria, esperaríamos que asociaran a la situación las permutaciones sin repetición, en donde obviamente se pretendería observar si se toma en consideración o no la repetición de los elementos y la verificación de la importancia del orden en los arreglos.

Una comparación de las respuestas dadas a este problema con las proporcionadas para el número cuatro, nos da indicios del papel que podría estar jugando el valor de los parámetros, pues trataríamos de observar si obtienen con mayor facilidad la respuesta y tratar de ver que ocurre en el otro problema, sobre todo si utilizan la misma estrategia.

En el pilotaje, observamos que este problema fue resuelto con éxito en la mayoría de los casos, lo que nos llamó la atención fue la estrategia puesta en juego en dicha resolución, pues de nueva cuenta resuelven vía la elaboración de la lista de opciones y realizan el conteo uno a uno de los posibles resultados.

Consideramos que un factor que pudiera estar influyendo es el tipo de operación combinatoria involucrada, pues en este caso el no permitir la repetición reduce bastante el número de opciones posibles y por lo tanto la consecución de las distintas posibilidades se convierte en una tarea "sencilla".

Asimismo, observamos que tanto en las respuestas correctas como en las erróneas los estudiantes son consistentes en las estrategias que utilizan, en el primer caso, al igual que en problema número cuatro, de nueva cuenta se recurre al uso de procedimientos sistemáticos de enumeración, al uso del diagrama de árbol, y a la obtención del total de posibilidades vía el empleo explícito del principio multiplicativo. En el caso de los que presentaron errores, (muy pocos, en comparación con el resto de los problemas), los errores detectados fueron el empleo del producto de los dígitos dados en el problema y el uso incorrecto de la fórmula de las combinaciones, lo cual estaríamos interesados en observar en la aplicación del cuestionario definitivo.

De la misma forma damos una lista de opciones mediante las cuales este problema puede ser resuelto correctamente y que se han manifestado en los cuestionarios previamente aplicados, constituyéndose en los criterios con que se analizarán las respuestas del cuestionario definitivo.

- La elaboración completa de la lista de opciones.
- La elaboración parcial, que le permita concluir el resultado total.
- La elaboración de un diagrama de árbol.
- El uso del principio multiplicativo
- La aplicación de la expresión para las permutaciones $P_{3,3} = 3! = 6$.