CAPÍTULO III

Marco De Referencia

Introducción

El planteamiento de aquellos aspectos teóricos que se han estado presentes en el desarrollo de la investigación en curso es el objetivo principal de este capítulo. Estos elementos teóricos, que hemos organizado en cuatro secciones, constituyen las consideraciones más generales desde la que se orienta nuestra investigación.

En la primera de las secciones planteamos elementos del ámbito cognitivo que permiten ubicar el desarrollo intelectual de los individuos a los que hemos dirigido nuestro estudio, y que se han puesto de manifiesto con anterioridad.

En la siguiente sección tomamos en consideración aspectos que se refieren al contenido matemático que está involucrado en la investigación, tratando de acotar los contenidos que son de interés central para nuestro trabajo.

Posteriormente nos concentramos en torno de consideraciones curriculares que nos den una orientación para la ubicación de los contenidos de interés en el contexto escolar. Estos resultados nos sirven de base para realizar un análisis general de planes y programas de estudio, así como de algunos textos recomendados para el estudio de tales contenidos.

Finalizamos el capítulo con una sección en la que exponemos algunas consideraciones teórico-metodológicas que se ponen en juego en la parte experimental de nuestro estudio.

III.1 Consideraciones Psicológico-Cognitivas

De antemano hemos señalado que una de las referencias importantes en nuestro trabajo lo constituyen los resultados obtenidos por Piaget-Inhelder(1975) alrededor del desarrollo de la noción de azar en el niño, y en particular sus resultados en torno de la evolución de las operaciones combinatorias.

Las investigaciones de Piaget, nos ofrecen una visión del desarrollo cognitivo del individuo desde su nacimiento hasta llegar a su madurez, contemplando tres períodos o estadíos evolutivos caracterizados por las formas de saber en el individuo. En lo general, estos momentos del desarrollo cognitivo pueden ser caracterizados en los siguientes términos:

Período	**Edad**[1]	**Descripción**
Sensorio-motor	0-2	El niño en este período adquiere habilidades motrices en respuestas a estímulos ambientales, pero no es capaz de representarse el mundo internamente de ninguna forma. La primera forma de saber del niño es la acción física que ejerce sobre el mundo que lo rodea, y es en esta etapa que se sientan las bases para su desarrollo perceptivo e intelectual posterior.
Operaciones Concretas	2-11	Este período se divide en dos subperíodos o etapas: Preoperacional (2-7 años): El niño inicia en esta etapa el uso de representaciones mentales. Es capaz de ir más allá de las acciones motoras para pensar sobre los objetos y acontecimientos a su alcance, pero no puede hacerlo en forma organizada. Operaciones concretas (7-11 años): en esta etapa el uso de representaciones mentales da paso a acciones mentales sistemáticas u operaciones, que aplica al mundo de objetos que lo rodean. Dichas operaciones (clasificación, seriación, numeración, etc.) alcanzan su completo desarrollo en este subperíodo y capacitan al niño para el pensamiento lógico y aritmético aunque en el ámbito de los casos concretos.
Operaciones formales	11-15	En este período el adolescente desarrolla capacidades que le permiten expresar relaciones en términos lingüísticos y considerar sistemáticamente las relaciones de las proposiciones entre sí, de hacer deducciones e implicaciones y de obtener conclusiones de un conjunto de afirmaciones sobre un fenómeno. Esto es, arriba a un momento en que su acción mental es ejercida sobre ideas y, por ende, a la capacidad de ejercer tal clase de acción sobre operaciones, superando el tipo de pensamiento ligado a lo concreto .

[1] Las edades expresadas en años se consideran sólo como aproximadas y pueden variar por factores como el medio ambiente o antecedentes individuales.

Esta descripción de los principales períodos del desarrollo intelectual señalados por Piaget, son referidos en sus estudios concernientes al desarrollo de la noción de azar y al concepto de probabilidad en el individuo en el que concluye la existencia de tres etapas de desarrollo que se presentan dentro de los períodos de las operaciones concretas y el de las operaciones formales.

Los resultados de Piaget-Inhelder en torno al desarrollo de las capacidades combinatorias son resumidos a continuación.

Durante la etapa conocida como preoperatoria, el niño no sospecha la posibilidad de un sistema que le pueda permitir encontrar todas las combinaciones de pares, y todas las permutaciones o arreglos que pueden hacerse con varios elementos en el contexto de "pequeños números". En ello requieren operaciones multiplicativas especiales y aún no poseen operaciones aditivas que le anteceden. Esto es característico en esta etapa de desarrollo del infante, pues se encuentra en un momento en el que se empiezan a desarrollar capacidades necesarias para dar pie a operaciones mentales.

Durante la siguiente etapa de desarrollo, conocida como etapa de las operaciones concretas, el niño comprende la posibilidad de tales sistemas, y llega a descubrirlos de una manera empírica para casos de conjuntos con un "número pequeño" de elementos.

Esto corresponde al comportamiento típico de los niños de esta etapa, en el que sus reacciones son la búsqueda de soluciones a situaciones que se le presentan a través del manejo de objetos, sin cuestionarse acerca de la existencia de un sistema que le permita encontrar todas las opciones posibles.

Es hasta el último período o estadío, conocido como período de las operaciones formales, que el niño ha desarrollado la capacidad de plantearse, en principio la posibilidad de existencia de sistemas combinatorios completos para un pequeño número de elementos y posteriormente descubrir y poner en juego esos sistemas. Se señala, además, que para el caso de las permutaciones, es necesario esperar hasta alrededor de los quince años.

Así pues, la aptitud para el análisis metódico de disposiciones de elementos o para descubrir relaciones específicas en ese contexto, características del razonamiento combinatorio, emergen en íntima relación y complementariamente al pensamiento lógico, hipotético y deductivo. Esto involucra de principio operaciones o sistemas de acciones mentales internas que subyacen a dicho tipo de pensamiento y que trascienden al mundo de lo concreto, lo que explica su aparición hasta este período de la capacidad combinatoria.

Un resultado particularmente clave para nuestra investigación es la conclusión acerca de la relación existente entre ideas combinatorias, la percepción de fenómenos irreversibles y la noción de azar, y la de que el desarrollo de las capacidades combinatorias constituyen una condición necesaria para que los individuos sean capaces de construir la idea de probabilidad.

Dentro del ámbito escolar cobran relevancia las investigaciones realizadas por Fischbein (1975), especialmente las que se refieren a la evolución de las ideas de azar y probabilidad. El desarrollo de las intuiciones es un aspecto que sobresale en sus investigaciones, a las cuales les concede gran importancia como componentes del pensamiento y con gran incidencia en su desarrollo. Dichas intuiciones son concebidas como aquellas adquisiciones cognitivas base que el individuo pone en juego ante las distintas situaciones, escolares o no, a las que se enfrenta.

Una de las clasificaciones que Fischbein da a las intuiciones, es la de: primarias y secundarias. La intuiciones primarias son aquellas que el individuo ha desarrollado en su necesidad de interactuar con el medio, mientras que las intuiciones secundarias corresponden al producto de una instrucción intencionada, por tanto estas últimas se constituyen en un apoyo hacia las primeras.

Un detalle adicional es que ambos tipos de intuiciones pueden desarrollarse correctamente o no. En este sentido, las intuiciones secundarias juegan un papel relevante pues resultan ser un medio a través del cual se tiene una posibilidad de corrección de intuiciones primarias incorrectas, pero también de fortalecimiento de las que se hayan desarrollado en forma correcta.

Tomando en consideración estas investigaciones, vemos que las intuiciones juegan un papel importante en el desarrollo intelectual de los individuos y que por tanto éstas debieran ser tomadas en cuenta en la planeación, diseño e implementación de actividades escolares. El fortalecimiento de intuiciones correctas y la corrección de aquellas que no lo son proporcionan al individuo condiciones intelectuales favorables que se manifiestan en una evolución óptima a lo largo de las distintas etapas señaladas por Piaget.

Por otra parte, Fischbein también hace la observación de que las intuiciones incorrectas se arraigan con la edad, lo que hace más evidente la necesidad de una instrucción intencionada en la formación de intuiciones desde los niveles elementales.

En particular, una recomendación que hace Fischbein para el desarrollo de las intuiciones, es que en la resolución de problemas se pida al sujeto realizar estimaciones de la solución, poner en juego el uso de recursos icónicos como lo es el diagrama de árbol en el caso de problemas combinatorios; asimismo hacer comparaciones de los resultados obtenidos con los estimados.

En cuanto a su interés por la evolución de los fundamentos intuitivos y precursores del conocimiento probabilístico considera que bajo condiciones de instrucción, el niño es capaz de emitir juicios probabilísticos aún antes de entrar al estadío de las operaciones formales.

Finalmente podemos decir que, tomando en consideración los resultados de Piaget-Inhelder aquí señaladas, observamos que de acuerdo a las edades de los sujetos a los que está dirigida nuestra investigación, ya deberían haber transitado por las etapas a las que se hace referencia. Un elemento adicional a tomar en cuenta es la influencia que en este desarrollo pudiera estar teniendo la instrucción que dichos sujetos han recibido y en lo que cobran importancia las investigaciones realizadas por Fischbein, en el sentido de analizar cómo es que interviene la escuela en la corrección y adquisición de intuiciones.

III.2 Análisis Combinatorio

En la presente sección estamos interesados en establecer los contenidos matemáticos a los que nos referimos en nuestra investigación, tratando de acotar aquellos aspectos del objeto matemático de interés particular que nos orienten en la búsqueda de dificultades que aparecen en su tratamiento, así como explicaciones a éstas. A la vez tratamos de analizar el papel que dichos contenidos han jugado en la construcción y evolución de las ideas de azar y probabilidad.

En forma general, se puede enunciar que uno de los objetivos de la Combinatoria es el estudio de las familias de subconjuntos de un conjunto dado (usualmente finito) que satisfacen ciertas propiedades. De acuerdo a características particulares de dicho conjunto, el problema se ubica dentro de una de las sub-áreas, en las que se divide la Combinatoria y que se enuncian a continuación.

- Combinatoria Enumerativa (Problemas y Técnicas de Conteo)
- Teoría de Gráficas
- Teoría de Diseños/Geometría Finita.

Los contenidos que abordamos en nuestro estudio se ubican dentro de la primera de esas sub-áreas, que de hecho, comúnmente es identificada en sí como Combinatoria. Un ejemplo de esto son los libros de texto básicos en los que se dedican secciones completas a problemas y técnicas de conteo, denominándolo como Análisis Combinatorio o simplemente como Combinatoria.

Se señala que uno de los primeros problemas que puede clasificarse como un problema en la teoría de probabilidad es el cálculo del número de los resultados posibles en el lanzamiento de varios dados, los primeros cálculos conocidos datan de los siglos X y XI. En particular, varias soluciones fueron dadas a problemas derivados del lanzamiento de tres dados, entre ellas algunas incorrectas pues en sus cálculos no tomaban en cuenta la repetición o el orden.

Problemas que se refieren al lanzamiento de dados también fueron tratados por Gerolamo Cardano, Niccolo Tartaglia y Galileo Galilei, siendo este último quien da una solución completa sobre el problema del número de todos los posibles resultados con tres dados en su tratado "*Considerazione sopra il Giuco dei Dadi*" publicado en 1718. El método propuesto por Galileo Galilei puede generalizarse fácilmente y está basado principalmente en la enumeración de los casos posibles.

Otro problema al que se hace referencia comúnmente cuando se trata de aspectos relacionados con el surgimiento de la teoría de la probabilidad, es el denominado problema de la división de apuestas, para el cual una solución es publicada por Luca dal Borgo o Paccioli en 1494, pero del que existen referencias anteriores. El problema de la división de apuestas fue tratado también por Gerolamo Cardano y Niccolo Tartaglia quienes al igual que Paccioli lo resuelven incorrectamente.

Un planteamiento general de dicho problema se establece en la siguiente forma:

"Dos personas acuerdan jugar un cierto número de rondas de un juego, apostando de antemano una cantidad igual de dinero. El ganador del juego será el primero que logre ganar S rondas. Por alguna circunstancia, el juego se interrumpe cuando uno de los jugadores ha ganado a rondas ($a<S$) y el otro ha ganado b rondas ($b<S$). ¿Cómo se deberá repartir de manera justa la apuesta del juego?"

Es durante el siglo XVII, que Blaise Pascal y Pierre de Fermat dan un impulso sustancial al desarrollo de la Teoría de la Probabilidad al llegar a una solución correcta del problema de la división de apuestas. Dicha solución se plantea en términos de analizar los posibles resultados de esos juegos y en base a eso proponen dividir la apuesta en forma proporcional a la probabilidad de ganar si el juego se continuara. Posteriormente Pascal aplica su triángulo aritmético para dar solución a juegos de azar.

Los acercamientos de Pascal y Fermat ilustran la aplicación de la regla de lo favorable a lo posible, dándole a la probabilidad un sentido pragmático aunque no se clarifica la naturaleza de la misma. En este aspecto, la equiprobabilidad de resultados en los juegos de azar les pareció intuitivamente obvia, por tanto los juegos de azar sirvieron como un puente entre la intuición y el desarrollo de conceptos, así como también de contexto de emergencia de una herramienta para estructurar fenómenos reales.

En esta corta semblanza del desarrollo de la probabilidad, es de señalarse los esfuerzos contemplados a lo largo del tiempo, en un principio las situaciones eran atacadas mediante razonamientos de proporcionalidad, esto es sin consideraciones aleatorias o probabilísticas. Luego inicia la consideración en mayor detalle sobre la diversidad de casos posibles, primero vía la enumeración de los mismos y posteriormente a través de descubrir su estructura y una forma de contar los casos a través del cálculo. En esto la no consideración de si los elementos son repetibles (o no), si intervenía el orden (o no) o si los elementos son distinguibles entre si (o no), causó errores y dificultades que fueron superados en la medida en que la herramienta combinatoria y su relación con el tipo de situaciones fue evolucionando.

La herramienta básica de la Teoría de Probabilidad fue la combinatoria hasta que apareció el Cálculo Diferencial e Integral. Casi todos los problemas eran resueltos usando métodos combinatorios, por tanto el desarrollo de la combinatoria influyó notablemente en el desarrollo de la Teoría de la Probabilidad, especialmente en sus etapas iniciales como lo acabamos de señalar.

Enseguida hacemos un resumen de los aspectos del contenido matemático que son de interés en nuestro trabajo de investigación. La presentación está basada en una revisión de los textos clásicos utilizados actualmente en los niveles medio y superior. De este modo adoptamos en tal resumen notaciones, ejemplos, resoluciones, etc.

Cotidianamente se requiere reflexionar acerca de cuántos arreglos diferentes (de acuerdo a diversas condiciones), se pueden formar con ciertos objetos dados. Ejemplos de estos son el elaborar los posibles horarios o cursos que impartirán los profesores de una institución educativa, las distintas palabras que se pueden formar con las letras del alfabeto, la selección de personal a ser contratado por una empresa, las distintas maneras en que puede caer una moneda que se lanza dos veces consecutivas, etc.

Otras situaciones, tratadas comúnmente en los distintos niveles escolares son el elegir un menú de entre varias opciones disponibles, formar un comité de varias personas tomadas de un cierto grupo o integrar una mesa directiva, hacer el rol de juegos de una determinada competencia, formar las distintas opciones de vestuario e inclusive, determinar las formas posibles en que pueden caer dos o más dados al ser lanzados.

Estos problemas pueden enunciarse en general cómo el de encontrar el número de arreglos que pueden hacerse, a partir de n objetos (animales, personas o cosas) tomados en grupos de r. Este número depende de las condiciones que le impongan el tipo de elección que se haga de cada uno de los objetos a fin de formar los arreglos, ya sea con sustitución (repetición) o sin sustitución (repetición) y de si el orden que tengan los objetos en el arreglo es importante o no. Además los objetos mismos en ocasiones tienen características que es importante tener en cuenta como el que sean distinguibles o no.

Tomando en consideración el tipo de elección, se obtienen dos tipos de arreglos, con repetición y sin repetición de elementos y a su vez tomando en cuenta el orden en que aparecen los objetos tenemos otras dos situaciones con y sin orden de los elementos, de aquí se desprenden por tanto cuatro casos[2]:

1. Arreglos con repetición ordenados, conocido como ordenaciones o permutaciones con repetición.
2. Arreglos sin repetición ordenados, o simplemente ordenación o permutación.
3. Arreglos sin repetición no ordenados, o combinaciones sin repetición o simplemente combinaciones.
4. Arreglos con repetición no ordenados, o combinaciones con repetición.

El problema que ocupa es determinar la cantidad de arreglos que pueden formarse en cada caso. Para determinar este número se hace uso del principio fundamental del conteo o regla del producto, que establece que si un conjunto A_1 tiene n_1 elementos y un conjunto A_2 tiene n_2 elementos, el total de arreglos que pueden hacerse tomando un elemento de A_1 y otro del conjunto A_2 es el producto $n_1 x\, n_2$.

El resultado anterior puede extenderse al caso de n conjuntos: Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, los n conjuntos con $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n$ elementos respectivamente, el total de arreglos que pueden hacerse tomando el primer elemento de A_1, el segundo elemento de A_2 y así sucesivamente hasta el último elemento de A_n es el producto $n_1 x\, n_2 x \ldots x\, n_n$.

[2] En los cuales no es explícita la consideración de que si los elementos son distinguibles o no, pero es así como aparece en la mayoría de los textos revisados.

Utilizando este resultado se tiene cada una de las siguiente situaciones:

Ordenaciones o Permutaciones con repetición[3]
En este tipo de arreglos el orden es importante, de modo que los arreglos con los mismos elementos son diferentes si difieren en el orden en que aparecen sus elementos. En este caso, en cada elección el número de objetos se mantiene fija, digamos "n", de modo que si queremos hallar arreglos de "r" objetos, tendríamos r conjuntos de n elementos de donde escogeríamos uno a la vez, por lo tanto $PR_{n,r} = n^r$. En el caso $n=r$, que significa el total de arreglos considerando "n" elecciones, tendríamos $PR_{n,n}=n^n$.

Por ejemplo, si nos preguntamos acerca de cuántos arreglos distintos de tres dígitos podemos formar utilizando los dígitos de nuestro sistema de numeración, tendríamos $10x10x10 = 1000$ arreglos distintos.

Ordenaciones o Permutaciones sin repetición
La variante respecto al caso anterior, es el tipo de elección. En este caso, dado que no hay reemplazo, el número de elementos después de cada elección va disminuyendo en uno. De este modo tenemos un conjunto inicial de n elementos, luego uno de $(n-1)$ y así sucesivamente. Después de r elecciones tendríamos un conjunto con $(n-r)$ elementos, de modo que antes de elegir al r-ésimo elemento del arreglo tenemos un conjunto con $(n-r+1)$ elementos. Así el total de arreglos en este caso es $P_{n,r} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$.

Para el caso $n=r$, se tendría , $P_{n,n} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)...(2)(1)$ que es denotada también como $n!$ (n factorial). Usando esta notación y agregando la convención $0!=1$, se obtiene una nueva expresión para $P_{n,r}$. Esto es:

$$P_{n,r} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Así: $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Refiriéndonos al ejemplo anterior, se tienen $10x9x8= 720$ arreglos sin repetición de dígitos.

Si consideramos un conjunto con $n_1, n_2, ..., n_k$ clases de objetos, el número de arreglos diferentes que pueden hacerse está dado por:

$$P_{(n_1, n_2, n_3, ... n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}, \text{ donde } n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$$

[3] Un aspecto que es importante destacar es la diversidad de notaciones encontradas en los textos, por lo cual hemos adoptado una en particular.

Combinaciones sin repetición (Combinaciones)
Esta situación puede deducirse apoyándose en las ordenaciones sin repetición o más comúnmente referidas como permutaciones, ya que lo que distingue a estos dos casos es que en la combinación el orden en que aparecen los elementos en los arreglos carece de importancia.

De este modo, dado un conjunto de n objetos el total de arreglos que se pueden hacer tomando r de ellos, cuando el orden es importante, es $P_{n,r}$. Para hallar el número de combinaciones de ellos, bastaría con considerar que dados r objetos, el total de maneras en que estos pueden colocarse es $P_{r,r}=r!$. Así $\frac{P_{n,r}}{r!}=C_{n,r}$ y de aquí que $C_{n,r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$. Si $n=r$, se tiene $C_{n,r}=1$.

Un ejemplo clásico para este caso es el siguiente:

¿Cuántos comités de tres miembros se pueden formar con ocho personas?
Puesto que dos comités son iguales si están formados por los mismos miembros (es decir, el orden de la elección no importa), se tienen $C_{8,3}=56$ comités distintos.

Combinaciones con repetición[4]
Existen muchas situaciones en las que además de que el orden en que aparecen los arreglos no tiene importancia, es permitido la repetición de los elementos en el arreglo, por ejemplo si se tratara de la colocación de r bolas indistinguibles en n celdas, cada arreglo podría distinguirse sólo por el número de bolas que tendría cada celda.

Un caso concreto de esta situación es el lanzamiento de r dados, el cual puede ser visto como equivalente a la colocación de r bolas en n=6 celdas. Aunque es posible registrar los resultados individuales, en general interesa sólo registrar el número de veces que aparece cada una de las caras. Para este caso, se podría suponer que los dados están numerados, pero es conveniente concentrarse en los eventos independientemente de los dados.

De esta forma, un evento queda descrito completamente por los números de ocupación $r_1, r_2, ..., r_n$, donde r_k es el número de bolas en la k-ésima celda. Toda n-ada de enteros que satisfaga $r_1+r_2+...+r_n=r$, $r_k \geq 0$, describirá una configuración de números de ocupación.

Así, con bolas indistinguibles, dos distribuciones serán distinguibles solamente si las n-adas correspondientes $(r_1, r_2, ..., r_n)$ no son idénticas. Por lo tanto, en este caso interesa encontrar el número de distribuciones distinguibles (problema equivalente al de encontrar todas las soluciones diferentes de la ecuación recién planteada).

[4] Este caso en general no es tratado en los libros de texto básicos en el nivel medio.

Este problema es tratado en el texto de W. Feller (1988) recurriendo a un dibujo en que representa las bolas por estrellas (*) y las celdas por los n espacios comprendidos entre $n+1$ barras (ξ) . De este modo, la distribución 3,1,0,0,0,4 de $r=8$ bolas en $n=6$ celdas, sería representada por |***|*||||****|.

En esta representación, toda distribución aparecería con una barra al principio y otra al final, de modo que el problema se traduciría en encontrar el número de maneras de seleccionar r lugares de entre $n+r-1$ disponibles , esto es de $C_{n+r-1,r}$ que correspondería al número total de arreglos no ordenados bajo el muestreo con reemplazo.

Como podemos observar, en los dos primeros casos, las operaciones combinatorias se obtienen simplemente al considerar la elección de la muestra y posteriormente aplicar el principio multiplicativo, este resultado después es utilizado en el tercero de los casos. Luego en el último caso es conveniente recurrir a una situación distinta en la que se requiere hacer una transformación del problema planteado para luego poner en juego las combinaciones ordinarias.

Es decir, sólo los dos primeros casos son obtenidos de una forma directa, y esto comúnmente no se toma en consideración en la enseñanza, cuya práctica común está caracterizado, en general, por un énfasis en definiciones y fórmulas, sin establecer las relaciones existentes entre las ideas aquí expuestas. También es de destacarse en el último caso la utilización de un dibujo para simplificar la situación, recurso al que tradicionalmente no se le da importancia en clase, en las que se le da prioridad al manejo de fórmulas.

Por otra parte, consideramos que, aunque las expresiones puedan obtenerse de manera simple desde la perspectiva de la matemática formal, una presentación anticipada y descontextualizada puede dificultar la aprehensión conceptual de ideas básicas y, como consecuencia, todas las cuestiones ligadas a las mismas.

Finalmente deseamos comentar que los aspectos más fuertemente relacionados con el concepto de probabilidad descansan, no en las expresiones combinatorias mismas o en los cálculos que implican, sino en la estructura de los arreglos cuyo descubrimiento puede permitir a los estudiantes percibir las características del espacio muestra y de sus subconjuntos, y tener elementos con los que puedan establecer relaciones entre ellos. Consideramos que una consecuencia de esto podría ser el surgimiento de una manera natural de justificaciones a consideraciones dentro de la Teoría de la Probabilidad, como el rango de valores posibles para la probabilidad de un evento.

III.3 Consideraciones Curriculares

Dentro de nuestro trabajo incluimos el análisis de Planes y Programas de Estudio, Libros de Texto, Cuadernos de Aprendizaje y el trabajo cotidiano en el aula; como expresiones formales o reales de los contenidos matemáticos a que son expuestos los estudiantes en la escuela. Dicho análisis se lleva a cabo en el marco de elementos planteados por Heitele (1975) acerca de las ideas fundamentales en estocásticos.

En sus planteamientos Heitele, a su vez toma en consideración las siguientes tesis de J. S. Bruner:

- El principio de la instrucción en un tópico es la transmisión de ideas fundamentales
- La hipótesis de que "cualquier tema se puede enseñar adecuadamente, de manera intelectualmente honesta, a cualquier niño, durante cualquier etapa de desarrollo" implica que las ideas fundamentales son necesarias como una guía desde la educación preescolar hasta la universitaria para garantizar cierta continuidad.
- Las ideas fundamentales y los conceptos se abordarán en los distintos niveles cognoscitivos y lingüísticos a lo largo de un curriculum en espiral.
- La transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilitará si durante las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación adecuada del tópico principal. Se fomentará en particular, la comprensión intuitiva de las relaciones concretas durante la escuela primaria, en tanto el niño no pueda aprehenderlas de manera analítica más elaborada.

Tomar en cuenta estas consideraciones en el diseño curricular significa que la instrucción de los distintos conceptos matemáticos deberá girar en torno a ideas fundamentales a modo de una espiral continua, de manera que en distintos momentos deberán corresponder acercamientos adecuados al nivel cognoscitivo del estudiante. Implica también tener en mente que los estudiantes tienen concepciones e intuiciones desarrolladas dentro y fuera del ámbito escolar y que deberán ser tomadas en cuenta en la planeación de las actividades de clase.

La última de sus tesis, pone de manifiesto el hecho de que los objetos matemáticos difícilmente pueden ser comprendidos, si no hay de antemano un acercamiento adecuado del tópico. Esto significa que la presentación formal de los tópicos no es la mejor opción para iniciar a los estudiantes en el estudio de ellos, sino que debería promoverse el tratamiento de los conceptos desde un plano intuitivo, y de acercamientos que den al sujeto en cada momento, una visión de objeto de acuerdo al nivel en que se encuentre, facilitando, por tanto el salto hacia niveles cada vez más elaborados y como consecuencia una comprensión o una apropiación cada vez mejor de los mismos.

Esto es, el papel que se le otorga al estudiante es el de un sujeto activo, cuyo aprendizaje se dará sólo a través de la interacción con el objeto y, por tanto, el profesor deberá promover acciones que tiendan a propiciar esa interacción de la mejor manera posible. Esta promoción implica que la planeación didáctica no debería realizarse obedeciendo simplemente la estructuración del contenido matemático en cuestión, sino en función de favorecer en el sujeto, el desarrollo de las ideas que son indispensables para que los contenidos puedan ser abordados, a la larga, en un plano formal.

Un aspecto que no debemos pasar por alto, es que, además de los señalamientos dados por Bruner, Heitele también basa su propuesta de ideas fundamentales en un estudio de los resultados de la psicología del desarrollo de las ideas estocásticas, del estudio de la historia de la Probabilidad y, además, en el estudio de las diversas fallas de los adultos ante situaciones estocásticas.

A partir de lo anterior, Heitele propone como ideas fundamentales en estocásticos a las siguientes:

- Asignación Numérica de las probabilidades
- Espacio Muestra
- La regla de la Adición
- Independencia
- Equidistribución y Simetría
- Combinatoria
- Modelo de Urna y Simulación
- Variables Aleatorias
- Ley de los grandes números
- Muestra

Si consideramos este conjunto de ideas fundamentales como una red conceptual alrededor de las cuales se construyen las nociones de azar y probabilidad, entonces la combinatoria debería jugar, al igual que el resto de las ideas fundamentales, un papel primordial dentro del currículum escolar. Esto implicaría la necesidad de un tratamiento sistemático en los distintos niveles, que garantice una continuidad de aquellos aspectos que giran alrededor de dicha idea y en los que se contemple cubrir, de acuerdo al nivel escolar, no únicamente técnicas de cálculo, sino también una gama de situaciones que le den sentido y que por si mismas justifiquen su estudio.

III.4 Consideraciones Teórico-Metodológicas

Este apartado contempla algunos elementos, desde una perspectiva educativa, sobre los problemas de matemáticas en general y de los combinatorios en lo particular, así como del proceso de su resolución. En el caso de los problemas combinatorios, especialmente se destaca una característica estructural que tiene que ver con los posibles valores de lo que hemos denominado modelo combinatorio implícito, una de las variables de tarea contempladas en nuestro estudio.

De entrada partimos de que una situación se dice problémica si para el sujeto que la enfrenta, plantea una interrogante cuya respuesta o solución representa un reto. Esta posición implica la aceptación de que una situación puede constituir un problema para algunos sujetos y no para otros, lo cual resultaría congruente con diferentes grados o niveles de desarrollo.

Con todo y esto último, se espera que lo que resulte ser un problema para algunos, para otros, tenga riqueza en cuanto a posibles actividades de matematización involucradas en su resolución, ya sea por el contexto en que está planteado o porque existan procesos de resolución alternos. Así, es nuestra creencia que la resolución de situaciones problémicas hace emerger manifestaciones del razonamiento de parte de los sujetos que las enfrentan

En reflexiones como las anteriores se basa nuestra adopción de problemas como principal medio de indagación sobre las capacidades combinatorias de los estudiantes de bachillerato.

Así mismo, estas reflexiones hacen que enfoquemos nuestro interés en la actividad o tarea que desarrollan los estudiantes para resolver problemas que les planteamos, lo cual puede variar de un problema a otro dando, lugar a lo que se denomina variables de tarea.

En el contexto de la resolución de problemas se han presentado diferentes esfuerzos por clasificar las variables de tarea. Estas clasificaciones consideran el enunciado del problema en si y el proceso de su resolución. Una clasificación de variables de tarea que particularmente adoptamos en este trabajo contempla la siguientes categorías: sintaxis, contexto, contenido, estructura y procesos heurísticos evocados.

En el caso de nuestro estudio, en las situaciones por plantear a los estudiantes coexisten variables de prácticamente todas las categorías anteriores, pero sólo se tiene planeado considerar, de entrada, variaciones de cuatro de ellas. Otras variables se dejan fijas y otras más libres a la acción del estudiante.

Variable de tarea	**Clasificación**
Tipo de elementos que se combinan:	describe contexto del problema, un aspecto no matemático del problema
Valor de los parámetros:	caracteriza contenido del problema, un aspecto matemático
Tipo de operación combinatoria: *Modelo combinatorio implícito:*	describen estructura del problema, su identificación por el resolutor va más allá de la lectura del problema implicando el proceso de solución mismo

En el caso de los tipos de problemas que implican las capacidades combinatorias, objeto del presente estudio, así como en otros campos de problemas, interviene una enorme cantidad de variables. En este caso y entre las que se pueden denominar de tarea, como hemos mencionado antes, ponemos atención para la elección de problemas, en las siguientes: tipo de elementos que se combinan, valor de los parámetros, tipo de operación combinatoria y modelo combinatorio implícito; cuya clasificación aparece ya en la tabla anterior.

La resolución de los problemas que planteamos creemos que inicia con la identificación del modelo combinatorio implícito, aunque el estudiante no conozca sus valores o no dé muestra de ello. Después de todo, el resolutor inicia la exploración del problema internamente y eventualmente, puede exteriorizar evidencias de ello. Lo que hace el estudiante en dicha exploración, completa o no, sistemática o no, es analizar la estructura del problema para decidir las acciones a tomar en vías de su solución.

Aún cuando de entrada no se identifique el modelo ni el tipo de operación combinatoria, puede ser que se genere una respuesta en la que se incorporen los aspectos esenciales de la situación y esto implica la aportación de las otras variables[5]. Por ejemplo: un valor de

[5] Lo que es importante considerar porque se trabaja con algunos estudiantes sin instrucción en combinatoria específica en nivel educativo en que se encuentran.

parámetros mayor o menor puede dificultar o facilitar una exploración y el tipo de objetos puede llevar a que sean distinguibles o no para el sujeto.

Lo anterior destaca, como variable de tarea, al modelo combinatorio implícito y hace que le brindemos una atención especial, a lo que pasamos enseguida, no sin antes mencionar que en definitiva las restantes variables consideradas guardan una íntima relación con ésta, como se muestra en el párrafo anterior.

En lo que toca al modelo combinatorio implícito, de acuerdo con Dubois (1984) y en lo que corresponde a problemas combinatorios simples[6], hemos considerado tres tipos de esquemas básicos:

- ***Selección*** de una muestra a partir de un conjunto de objetos. Cuando se pide enumerar o contar las diferentes muestras de tamaño dado que pueden formarse a partir de un conjunto inicial;
- ***Colocación*** de objetos en casillas (cajas, celdas o urnas). Cuando se pide enumerar o contar las diferentes aplicaciones entre dos conjuntos de objetos;
- ***Partición*** en subconjuntos de un conjunto de objetos. Cuando se pide clasificar los elementos de un conjunto inicial en un número dado de subconjuntos incompatibles de modo que la clasificación sea exhaustiva.

El primero de estos tres esquemas surge al seleccionar muestras de tamaño r de un conjunto de n objetos. Así, una configuración combinatoria será una muestra de elementos tomados del conjunto de partida. Se requiere, por tanto, tener en cuenta si en las configuraciones influye el orden y si los objetos son reemplazables.

Tales aspectos llevan a cuatro subesquemas que se presentan en la tabla de abajo. Los tres primeros son considerados en el presente trabajo ya que cada uno de ellos implica una operación combinatoria usualmente contemplada en la instrucción sobre el tópico[7].

Subesquema	**Operación Combinatoria**
Selección *ordenada* sin reemplazamiento	Permutaciones ordinarias $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
Selección *ordenada* Con reemplazamiento	Permutaciones con repetición $PR_{n,r} = n^r$
Selección *no ordenada* sin reemplazamiento	Combinaciones ordinarias $C_{n,r} = \dfrac{P_{n,r}}{r!}$
Selección *no ordenada* Con reemplazamiento	Combinaciones con repetición $CR_{n,r} = C_{n+r-1,r}$

En el esquema de colocación, se tienen que colocar objetos dentro de n cajas (celdas o urnas), o bien establecer una aplicación de un conjunto de r objetos en otro conjunto de n objetos. La configuración combinatoria cuyo recuento interesa son las diversas

[6] Se denomina problema combinatorio simple cuando su resolución implica el uso de sólo una operación combinatoria, mientras que en otro caso se le denomina problema combinatorio compuesto.

[7] En nuestro contexto educativo el cuarto caso no se contempla instruccionalmente.

disposiciones de tales objetos en las cajas o las diversas aplicaciones que se establecen entre los dos conjuntos.

Según se considere si el orden de los objetos dentro de las cajas es importante o no y que las cajas y los objetos sean distinguibles o no, se obtienen seis tipos básicos de sub-esquemas de colocación, ya que no tiene sentido ordenar los objetos cuando son iguales. A partir de cada uno de los seis tipos básicos se obtienen nuevos subtipos al tener en cuenta las cuatro condiciones:

1. Colocaciones inyectivas: con a lo sumo un objeto por caja $(r \leq n)$.
2. Colocaciones sobreyectivas: con al menos un objeto por caja $(r \geq n)$.
3. Colocaciones biyectivas: con un solo objeto por caja $(r = n)$.
4. Colocaciones cualesquiera: Se puede colocar el número que se desee de objetos en cada caja o dejar alguna vacía.

De estas consideraciones resultan veinticuatro subesquemas de colocación simple (Roa, 2000), de los que, descartando los casos triviales sólo ocho implican el uso de sólo una operación combinatoria básica, y de entre ellos, siete son sujetos de instrucción en nuestro medio. Mostramos enseguida esas ocho situaciones, correspondiendo al último renglón la que no es contemplada en nuestro medio escolar.

Colocaciones	**Objetos**	**Celdas**	**Tipo de aplicación**	**Operación combinatoria**
Ordenadas	Distintos	Distintas	Inyectiva	$P_{n,r}$
			Biyectiva	P_n
No ordenada	Distintos	Distintas	Inyectiva	$P_{n,r}$
			Biyectiva	P_n
			Cualquiera	$PR_{n,r}$
	Iguales	Distintas	Inyectiva	$C_{n,r}$
			Sobreyectiva	$C_{r-1,n-1}$
			Cualquiera	$CR_{n,r}$

Como puede verse, el esquema de colocación es mucho más amplio que el de selección y que no sólo da origen a las operaciones combinatorias básicas, sino a otras que no se contemplan en la instrucción en nuestro contexto. También se puede observar que la misma operación combinatoria puede obtenerse desde dos subesquemas de colocación distintos. Otra observación, es que no todos los problemas planteables en el esquema de colocación pueden traducirse a un problema de selección, porque el número de subesquemas en la colocación es mucho mayor que en el de selección.

Finalmente, el problema que origina el esquema de partición consiste en efectuar una partición de un conjunto de r elementos en n subconjuntos. Este tercer esquema puede verse como una nueva interpretación de colocación de r objetos en cajas. Si olvidamos las cajas y nos fijamos en los objetos que contienen, obtenemos los subconjuntos en los que se puede descomponer el conjunto, en los que pueden existir desde luego subconjuntos vacíos (lo que equivale al caso en que la caja no contiene elemento alguno).

Cada colocación define, por lo tanto una y sólo una partición de objetos en subconjuntos y recíprocamente. Por tanto, las 24 clases de colocaciones, a las que da origen el esquema de colocación, corresponden a 24 clases de particiones en subconjuntos, como se muestra en la siguiente tabla:

Colocaciones de los objetos	**Particiones en subconjuntos**
Ordenadas	Subconjuntos ordenados
No ordenadas	Subconjuntos no ordenados
De objetos distintos	De objetos distintos
De objetos indistinguibles	De objetos indistinguibles
En cajas distintas	Particiones ordenadas
En cajas indistinguibles	Particiones no ordenadas
Inyectivas	En subconjuntos vacíos o con una solo elemento
Sobreyectivas	En subconjuntos no vacíos
Biyectivas	En subconjuntos con un solo elemento
Cualquiera	Subconjuntos con más de un elemento y con subconjuntos vacíos.

Y de esta manera se ve que el esquema de partición tampoco puede ser traducible al de selección. Esto es, dos de los tres esquemas combinatorios básicos (colocación y partición) son traducibles ente sí, y dan como resultado, no sólo a las operaciones combinatorias básicas sino también una gama amplia de modelos combinatorios que no se contemplan en la enseñanza elemental de la combinatoria.

Estas consideraciones teórico-metodológicas son puestas en juego en el diseño y análisis del cuestionario utilizado en nuestro trabajo de investigación y su utilidad es más ampliamente descrita en el siguiente capítulo.