

CAPÍTULO I

La Combinatoria en la Educación

Introducción

En este capítulo, como preámbulo a la especificación del problema de investigación que abordamos y a manera de ubicación del mismo, pretendemos situar el papel que le atribuimos a la combinatoria en el contexto de la Probabilidad, así como en el de su enseñanza y su aprendizaje.

De entrada, señalamos que nuestra concepción de combinatoria corresponde a la de una herramienta cuya utilidad está más allá que la de permitir el cálculo del número de posibles resultados de un experimento aleatorio o de elementos de un evento.

En esto, distinguimos dos énfasis que se hacen cuando usamos la palabra combinatoria: el primero, como acervo de estrategias y habilidades del pensamiento; mientras que el segundo, como el cúmulo de resultados y relaciones conceptuales propios de una rama de la matemática que trasciende al llamado Análisis Combinatorio; a los cuales nos referiremos indistintamente dejando la precisión al contexto en que se inserta, que ciertamente puede resultar doble.

Extendiéndonos en el primero de estos dos énfasis, planteamos algunos de los resultados de la investigación que hacen de la combinatoria un campo de estudios para la cognición y que, además de ser un punto de partida, resultan ser una de las motivaciones de nuestro interés por incursionar en este campo de investigación en el contexto de la Matemática Educativa.

Finalmente, enfocamos algunos aspectos del ámbito escolar, como es el papel que se le asigna a la combinatoria en la escuela, que aumentan nuestro interés por investigar y despiertan en nosotros, serias preocupaciones educativas.

I.1 La Probabilidad y la Combinatoria

Hoy en día se reconoce el papel que juega la Estadística en muchas de las actividades del mundo moderno y la Probabilidad, sus modelos y demás ideas básicas constituyentes son, en gran medida, el fundamento de la Teoría Estadística (punto de vista en el que coincidimos con J. D. Godino, 1987). De aquí que a ambas disciplinas les corresponda tener alguna presencia en una educación comprometida con el desarrollo de individuos acorde a la sociedad que les toca vivir.

La Probabilidad a través de sus modelos proporciona una manera de medir la incertidumbre implicada en dichas actividades y tiene por supuesto impacto en las decisiones que ahí se toman. Además, su importancia no sólo se limita en su relación con la Estadística, sino que por sí misma juega un papel fundamental en el análisis de muchos fenómenos de interés en la actualidad y es de hecho es un área de la Matemática con un fuerte y creciente desarrollo en las últimas décadas.

El origen de la probabilidad se considera fuertemente vinculado con la búsqueda de soluciones a los distintos problemas derivados de juegos de azar, y entre los casos sobresalientes se encuentran los referentes a dados y el llamado problema de la división de apuestas o problema de los puntos. Aunque hay antecedentes de que el origen de algunos de estos problemas sobre juegos de azar se remonta a épocas anteriores, estos problemas alcanzaron precisión hacia fines del siglo XVI y, de hecho, las soluciones que intercambiaron los científicos franceses Pierre Fermat y Blaise Pascal en su correspondencia en 1654 sobre el problema de los puntos, se reconoce como la primera solución probabilística a este problema.

En las soluciones que se dieron a los problemas de dados evolucionó la herramienta combinatoria, en cierta medida en ellas se construyeron ideas necesarias en el análisis de los problemas aquí expuestos, como son el orden, la repetición o la independencia.

Pero una característica distintiva en las soluciones de Fermat y Pascal sería el hecho de que en ellas se conjugó dicha herramienta combinatoria con un razonamiento probabilístico propiamente dicho, poner al descubierto las posibles formas de las secuencias de resultados en la continuación del juego de azar, medir la ocurrencia potencial de secuencias de resultados distinguiendo aquellas que resultan de interés y, sobre la base de esto, ponderar conjuntamente las consecuencias de ellas.

A raíz de este tipo de razonamiento fue que empezaron a obtener reconocimiento propio algunos de los elementos involucrados (que en una perspectiva actual nos referimos a ellos como: espacio muestra, evento, asignación de probabilidades, principio aditivo, principio multiplicativo) que posteriormente, en otro nivel de consolidación, dan lugar a conceptos o resultados básicos de una nueva disciplina matemática, como la noción de azar y el concepto de probabilidad mismo, independencia, esperanza matemática, ley de los grandes números, etc.

En lo antes expuesto es de observarse que la combinatoria tuvo importante influencia, no sólo como la herramienta de cálculo básica en los primeros tiempos de esta nueva disciplina sino en el proceso de conceptualización hacia una Teoría de la Probabilidad, la cual luego

echó mano de conceptos y resultados de otras ramas de las matemáticas, por ejemplo algunos del cálculo diferencial e integral.

Estos hechos muestran que algunos conceptos importantes que aparecen cuando se abordan situaciones desde la perspectiva de la probabilidad se encuentran íntimamente relacionados con la idea de combinatoria por lo que, en una perspectiva educativa, la llegamos a considerar fundamental, en el sentido de Heitele¹, dentro de nuestro trabajo.

Este señalamiento corresponde al hecho de poseer un modelo no necesariamente formulado en términos matemáticos, que permita al individuo tener una explicación del fenómeno que está observando y que, por tanto, está sujeto a ser modificable en la medida que el individuo entra en contacto con nuevas situaciones.

Así, denominamos fundamental a una idea que le permita al sujeto adquirir gradualmente los conceptos de un tópico, de tal manera que, en cada etapa de su desarrollo, tenga una perspectiva de los conceptos acorde a la herramienta que dispone y, a medida que su visión vaya madurando (adquiriendo nuevos conceptos o propiedades de los conceptos) hacia una versión más completa.

La determinación del espacio muestra asociado a un experimento aleatorio es un aspecto importante en la definición misma de la probabilidad, no sólo en el sentido clásico usado en el caso de un espacio muestral finito y equiprobable, aunque aún restringiéndonos a éste en situaciones muy elementales, es indispensable disponer de algún proceso de enumeración o herramienta que apoye la búsqueda del conjunto de los “casos posibles” así como de su cuantificación.

Tomando como ejemplo la situación anterior, podemos mencionar que en ese caso la idea fundamental de combinatoria, podría funcionar como un modelo explicativo que permite al individuo construir a través del diagrama de árbol, el espacio muestra asociado a un experimento. En la medida en que las situaciones rebasen las posibilidades de representación icónica, el modelo va adquiriendo una faceta de sofisticación matemática, que sienta las bases para una preparación analítica sin perder su característica estructural.

Ejemplos en los que se requiere poner en juego esta idea fundamental los podemos encontrar no sólo en el terreno de la Probabilidad. La combinatoria, considerada tanto en su carácter cualitativo como en el de herramienta de cálculo, es un apoyo no sólo para el cálculo de probabilidades, su uso invade distintas áreas de la matemática como lo son el Cálculo Diferencial o la Teoría de Números, por mencionar algunas, así como también tiene presencia en otras disciplinas. Sin embargo, para los fines de la presente investigación, nos hemos restringido a los aspectos estrechamente relacionados a esta área de la Matemática.

¹ Identificamos como idea fundamental a aquella que proporciona al individuo un modelo explicativo en cada etapa de su desarrollo, que sean tan eficiente como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración. (Heitele, 1975).

I.2 Investigación Cognitiva en Combinatoria

Uno de los aspectos que hemos considerado en nuestro estudio, son las investigaciones desarrolladas en el ámbito cognitivo respecto a la adquisición y evolución en el individuo de las ideas combinatorias y a su papel como parte fundamental del pensamiento formal y en su relación con la probabilidad.

Al respecto, una referencia importante son los resultados obtenidos por J. Piaget-B. Inhelder (1975) sobre la noción de azar en el niño, en los que explican que la evolución de las operaciones combinatorias en el individuo se da, al igual que las operaciones lógicas y aritméticas, a través de un desarrollo constituido por el tránsito a lo largo de tres períodos, a los que también denomina estadios.

De acuerdo con sus investigaciones, en un primer período o estadio, conocido como período preoperatorio, que ocurre antes de los siete u ocho años, el niño no sospecha la posibilidad de un sistema que le pueda permitir encontrar todas las combinaciones de pares, sin omitir uno sólo, y todas las permutaciones o arreglos que pueden hacerse con varios elementos en el contexto de “pequeños números”. Esto puede explicarse en términos de que el niño de este nivel no posee las operaciones aditivas o multiplicativas necesarias para tal fin.

Durante un segundo estadio o período de las operaciones concretas que se da entre los siete y los once años, el niño comprende la posibilidad de tales sistemas, pero los descubre solamente de una manera empírica e incompleta, ligado al mundo físico que le rodea. Esto hace suponer que la construcción de estos sistemas por el niño requieren de estructuración interna, de un pensamiento formal.

Esta etapa resulta importante, pues aunque de hecho, supone un momento en el que no hay una adquisición completa de los sistemas combinatorios, se puede decir que sí existe un descubrimiento de la posibilidad de su existencia, y que el hecho de que empiezan a darse descubrimientos empíricos sólo marca el inicio de un proceso que debe evolucionar en la medida que vayan adquiriendo otras herramientas conceptuales. Consideramos esto como sumamente importante para la enseñanza en el sentido de que resulta ser una etapa en la que creemos se debe enfatizar la formación de intuiciones correctas que apunten hacia la construcción adecuada de las ideas. En particular, por sus implicaciones en aquellas de las que forman un antecedente necesario.

Es hasta después de los once o doce años, que el desarrollo del pensamiento en el niño, a principios del período conocido como de las operaciones formales, le permite descubrir sistemas combinatorios completos para un número pequeño de elementos puestos en juego.

En este estadio de desarrollo, el niño ha evolucionado en manera tal que es capaz de coordinar las diversas seriaciones que se pueden formar al considerar las distintas correspondencias entre los elementos de un determinado conjunto, esto es, ésta coordinación implica la realización de operaciones sobre operaciones, característica del pensamiento formal.

Las investigaciones a las que acabamos de hacer referencia también reportan que la evolución de las ideas combinatorias está en estrecha relación con la de las operaciones lógicas y aritméticas, constituyéndose las primeras según los autores en contraposición a las segundas, distinguiendo lo que es deducible de aquello que no lo es y por tanto sólo se puede acceder al desarrollo pleno de ellas en la medida en que las segundas se vayan desarrollando. También reportan que las ideas combinatorias se caracterizan por ser operaciones de segundo nivel, operaciones propias del período de las operaciones formales, aspecto en el que deberíamos poner atención, pues en ello podríamos encontrar una explicación a las dificultades que en el manejo de estas ideas se presentan.

Además, el desarrollo de las operaciones combinatorias constituye, según lo afirman los autores, una condición necesaria para que los individuos sean capaces de construir la idea de probabilidad. Este es un punto clave que ha llamado nuestra atención y despertado nuestro interés por intentar un estudio que nos dé un acercamiento de cuál es el estado que guarda el desarrollo de dichas operaciones combinatorias en estudiantes que, de acuerdo a lo señalado por Piaget e Inhelder, ya debieran haber transitado por cada una de las etapas señaladas.

Otro referente, en el que se reporta el desarrollo de investigaciones en esa dirección, es el trabajo de E. Fischbein (1975). Ellas muestran que la capacidad de resolver problemas combinatorios no siempre se alcanza al nivel de las operaciones formales si no hay una enseñanza específica. Al respecto, Fischbein y A. Gazit (1988) han reportado en sus investigaciones referentes al efecto de la instrucción sobre la capacidad combinatoria, que incluso niños de diez años de edad pueden aprender algunas ideas combinatorias con ayuda del diagrama de árbol.

Otro aspecto que analizaron fue la dificultad relativa de los problemas combinatorios, en función de la naturaleza y el número de elementos que debían ser combinados, identificando algunos errores típicos en la resolución de problemas combinatorios simples.

En estos autores encontramos un interés particular en estudiar el papel que juega la instrucción en la adquisición de las ideas y conceptos por parte del individuo. Su énfasis está puesto en la importancia que tienen la formación de intuiciones para el aprendizaje o construcción de los conceptos matemáticos por parte del individuo, lo que resulta una distinción importante respecto a los antes mencionados.

También en el ámbito escolar, V. Navarro-Pelayo y otros investigadores (1996) han llevado a cabo un proyecto de investigación en el que se propusieron evaluar la capacidad combinatoria en alumnos con y sin instrucción en este tópico, encontrando que ambos grupos tuvieron dificultades para resolver los problemas planteados, a pesar de que algunos podían resolverse haciendo uso de sólo una operación combinatoria.

Encontraron, entre otros aspectos relevantes, que en general los alumnos mostraron la falta de un razonamiento recursivo. En el caso del grupo sin instrucción observaron que en los casos sencillos pudieron dar respuesta, aunque en ningún momento se utilizó un procedimiento de enumeración sistemático para hacerlo.

Otras reflexiones de interés en el estudio de esta problemática son las llevadas a cabo por N. Hadar y R. Hadass (1981), en las que se aborda el tipo de dificultades comunes que aparecen al resolver un problema combinatorio.

Postulan la aparición de una serie de dificultades que no permiten que los estudiantes puedan responder con éxito el problema planteado, entre ellas se hace mención a la percepción incorrecta del conjunto a enumerar, que los lleva a una respuesta incorrecta ya que responden a una cuestión distinta a la planteada. Otra dificultad que le parece común está relacionada con la elección de una notación inadecuada, lo que, en su momento, no les permite generalizar resultados parcialmente encontrados.

Esta corta semblanza de los resultados de algunos trabajos de investigación, no sólo la encontramos vinculada con la problemática que nos proponemos abordar, sino que además subraya su vigencia, particularmente en la parte alta de la adolescencia.

I.3 La Probabilidad y la Combinatoria en la Escuela

Los recientes cambios curriculares en el nivel básico, promueven elementos de Probabilidad y Estadística como contenidos importantes dentro de la formación básica, que se enmarcan, en el caso de la primaria, en los ejes de La Predicción y el Azar y el de Tratamiento de la Información. En ello se reconoce en alguna forma la necesidad de dotar a los estudiantes de elementos que coadyuven a la formación de un pensamiento no determinista, necesario para la comprensión de muchos fenómenos de interés en la actualidad.

En relación con el planteamiento del diseño de actividades de aprendizaje que integren los distintos ejes en los que están desarrollados los programas de la educación primaria, la Predicción y el Azar resulta ser un eje importante en la comprensión de otros temas del Currículum. En ese aspecto, en la educación primaria, los contenidos que se pueden clasificar como parte de la Combinatoria también juegan un papel fuera de ella, por ejemplo se presenta a ésta como un medio que promueve la adquisición de significado de la multiplicación de números naturales.

Diversas actividades propuestas están estrechamente ligadas a la Probabilidad, podemos citar por ejemplo, el planteamiento de distintos juegos de azar. Se enfatiza la necesidad de búsqueda de recursos que permitan visualizar todos los casos posibles de un experimento dado, se promueve el uso de tablas de doble entrada, la lectura de gráficas o el uso de diagramas de árbol como una herramienta que ayuda a encontrar el inventario de los casos de interés en un experimento dado.

Las actividades propuestas se han diseñado de modo que sobresale la importancia que se concede al nivel de desarrollo conceptual del niño. En el caso particular de la probabilidad la referencia a cuestiones ligadas a ella son presentadas hasta el tercer año, momento en el cual el niño oscila entre los ocho y los diez años de edad.

Esto en relación con los resultados de Piaget, resulta corresponder a un momento en que el niño debería estar en posibilidades de acceder a un nivel de desarrollo en el que empieza a tomar conciencia de la presencia del azar como un hecho que no puede reducirse a

operaciones deductivas, aunque sus esquemas conceptuales sean aún limitados, consideramos que abre la posibilidad de un tratamiento posterior en el cual se espera que las ideas hayan madurado y puedan ser estudiadas desde una perspectiva más completa, e incluso formal.

Adicionalmente podemos decir que se procura que en un primer momento, que el niño pueda identificar una situación de azar de una que no lo es y que la asignación de probabilidades sea inicialmente de forma incipiente, de hecho de una manera cualitativa.

Parte importante de los contenidos del quinto y sexto grado corresponden al estudio de lo relativo a la combinatoria, en los que se presentan diversas situaciones sencillas de las que desprendemos se pretende haya una preparación para la noción de probabilidad, especialmente en lo que se refiere a la construcción de los resultados posibles y favorables de un experimento. Esto, en alguna forma nos permite ver que, aunque ideas de probabilidad se han trabajado desde grados anteriores, en estos grados escolares su evolución requiere echar mano de herramienta combinatoria que permita acceder a un nivel de tratamiento más elaborado, aunque todavía no se esté hablando de medir la probabilidad en términos cuantitativos.

La metodología de trabajo propuesta está basada principalmente en la resolución de problemas como un medio que promueve la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes. Este enfoque propone un aprendizaje menos concentrado en la repetición y la memorización y más abocado al desarrollo de habilidades del pensamiento que permiten al estudiante no sólo abordar problemas propios de la disciplina, sino también aquellos que no son exclusivos de la misma.

Para lo anteriormente expuesto se ha tomado como referencia el currículum formal, como se da a conocer a las escuelas y profesores en planes y programas de estudio (SEP, 1993), y hemos de reconocer que no se ha observado lo que realmente ocurre en el aula, aspecto que consideramos de bastante interés dentro del análisis de la problemática que nos ocupa.

En lo que respecta a la escuela secundaria, se señala como un propósito esencial fortalecer aquellos contenidos que responden a las necesidades básicas de la población joven del país y que sólo la escuela puede ofrecer (SEP, 1993).

Dentro de estos contenidos, se destaca a las Matemáticas como la segunda prioridad en la organización del Plan de Estudios y la Distribución de tiempos de trabajo². Se señala como un propósito central de los programas de matemáticas que el alumno aprenda a utilizarlas para resolver problemas, no solamente los que se resuelven con los procedimientos y técnicas aprendidas en la escuela, sino también aquellos cuyo descubrimiento y solución requieren de la curiosidad y la imaginación creativa. Es decir se pretende dar a las matemáticas un lugar en la adquisición de habilidades y actitudes que son necesarias en la formación de cada individuo y que se corresponde con lo propuesto para el nivel previo.

² Correspondiendo la primera al Español.

Como parte de la organización de los contenidos, los temas de Probabilidad y Estadística, quedan ubicados en lo que corresponde a la Presentación y Tratamiento de la Información y Probabilidad. En relación con este último, un aspecto de interés es el hecho de que se enfatiza el uso del diagrama de árbol en la enumeración y descripción los posibles resultados de una experiencia aleatoria.

Se aborda el uso de la fórmula clásica de la probabilidad en situaciones con un número pequeño de resultados equiprobables, y también se le da un lugar al estudio del enfoque frecuencial de la probabilidad, al proponer situaciones en las que la asignación de probabilidades se da de acuerdo a este modelo. Otros aspectos a los que se hace mención son el estudio de las experiencias repetidas e independientes y la regla de la adición y del producto para probabilidades, así como al de la resolución de problemas por medio de la simulación.

La metodología de trabajo que se propone para el tratamiento de los contenidos que componen los programas de matemáticas es, al igual que en la primaria, bajo un enfoque de resolución de problemas. Sin embargo una diferencia importante respecto a ese nivel educativo, es que en este caso, la presentación de tales contenidos tiene una organización temática, no obstante se sugiere al profesor integrar en la medida de lo posible los diferentes tópicos del área que deben cubrirse, de modo que el estudiante pueda percibir las relaciones entre las distintas componentes de la matemática, así como de sus relaciones con otras disciplinas de estudio.

Podemos señalar que en términos curriculares, la combinatoria se contempla como uno de los aspectos importantes que deben cubrirse en el nivel básico. Sin embargo, la inserción curricular no es garantía para que el desarrollo de conceptos e ideas implicadas en estocásticos, en especial lo que respecta a combinatoria, sean tratadas convenientemente en el aula, lo cual podría estar obstaculizando un desarrollo conceptual adecuado.

En lo que corresponde al nivel medio, la situación debe analizarse considerando la diversidad de planes y programas de estudio existentes en tal nivel, en el que podemos encontrar subsistemas escolares que no contemplan curricularmente tópicos de Probabilidad ni de Estadística en forma obligatoria y, en algunos casos, ni en forma optativa. De hecho, en algunos de esos subsistemas su presencia o tratamiento está sujeto a condiciones como la disponibilidad de tiempo³. Esto provoca que, en general, no se pueda garantizar la continuidad en el tratamiento de las ideas relacionadas con estocásticos en el nivel medio, que propicie una madurez de tales ideas y que les permita su uso y su evolución a niveles más avanzados.

De entre los distintos subsistemas que existen en dicho nivel, enfocamos nuestra atención en una de las instituciones que curricularmente contempla dichos tópicos de una manera amplia y que además, aporta a la educación superior un número considerable de estudiantes⁴, el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH). La estructura del

³ Cuando tal tipo de contenido constituye el último o los últimos puntos de un curso, Temas Selectos de Matemáticas por mencionar un ejemplo.

⁴ Para el caso de la Universidad de Sonora, en el semestre 99-2, el 27% del primer ingreso correspondió a

Plan de Estudios⁵ del COBACH contempla tres núcleos: el Núcleo de Formación Básica, integrado por 34 asignaturas que van del primero al sexto semestre; el Núcleo de Formación Profesional constituido por 6 asignaturas a cursarse en el quinto y sexto semestre; y el Núcleo de Capacitación para el Trabajo con un total de 8 asignaturas.

Es dentro del núcleo de formación básica que se ubica el campo o materia⁶ de matemáticas, compuesto de cuatro asignaturas y en él se encuentran incluidos los contenidos de Probabilidad y Estadística, constituyendo el curso de Matemáticas IV. Sus contenidos están divididos en tres unidades: Estadística Descriptiva, Elementos de Probabilidad y Estimación de Parámetros Poblacionales. Adicionalmente se ofrece un curso de Inferencia Estadística, reservado para los estudiantes de dos de las tres series⁷ propedéuticas que ofrece el Colegio.

A pesar de contar con un curso obligatorio de estos tópicos, en la revisión del programa de estudios del curso de Matemáticas IV, encontramos que los aspectos combinatorios no son considerados explícitamente para su estudio, aunque aparece el uso de diagramas de árbol o la elaboración de listados en situaciones sencillas donde estos recursos son utilizados al parecer con fines ilustrativos y no como una herramienta de razonamiento.

Las expresiones o fórmulas para el caso de las permutaciones o combinaciones son reservadas a una sección en la que el objetivo es el estudio de la distribución binomial, en cuyo caso el énfasis está puesto en el manejo del algoritmo para obtener el número de combinaciones y de su uso en el cálculo de probabilidades binomiales.

En indagaciones con profesores pudimos constatar que dichas previsiones curriculares son modificadas en la práctica en lo tocante a aspectos combinatorios. Bajo la justificación de que tales contenidos son requeridos por los estudiantes en su acercamiento al enfoque clásico de probabilidad, para la cuantificación de probabilidades y otras “cuestiones involucradas”, dedican alrededor de seis a ocho clases al tema de Análisis Combinatorio.

En el caso del nivel superior, la mayoría de los programas de distintas licenciaturas que ofrece la Universidad de Sonora, tomándola como un ejemplo, incluyen dentro sus planes de estudio por lo menos un curso obligatorio de Probabilidad y/o Estadística. En el caso de Ciencias e Ingeniería hay un curso de un semestre de duración, tanto de Probabilidad como de Estadística, mientras que en el área Económico-Administrativa y en algunos programas del área de Ciencias Sociales se contemplan al menos dos cursos obligatorios de un semestre de duración de Estadística Aplicada en el que se incluye una parte de Introducción a la Probabilidad.

Este resumen del lugar que guardan los contenidos de Probabilidad en los distintos niveles educativos nos subraya la importancia que en términos curriculares se le concede a esta

estudiantes egresados del COBACH.

⁵ Vigente a Enero 2002.

⁶ Como se ve enseguida la “materia” se compone de varios cursos o asignaturas con un contenido común a desarrollar.

⁷ Las tres series propedéuticas que ofrece el COBACH son: Ciencias Naturales y Exactas, Ciencias Sociales y Humanidades y Ciencias Económico-Administrativas.

área de conocimiento en cada uno de ellos. Mientras que en el nivel básico estos contenidos juegan un papel fundamental al igual que los de otras áreas de la Matemática, vemos que su presencia en el nivel medio no es homogénea, incluso puede darse el caso de que sea nula, lo que contrasta con el hecho de que la mayoría de programas de licenciatura incluyen al menos un curso de estos tópicos (constatado para el caso de la Universidad de Sonora, pero que es de esperarse también se presente en carreras de otras instituciones de nivel superior.)