

Capítulo 5

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En el presente Capítulo se reportan y se analizan las dificultades encontradas en los estudiantes relacionadas con la función lineal, que se obtuvieron a partir del cuestionario, presentando un resumen de los resultados arrojados pregunta por pregunta y en la cual se incluyen algunas observaciones. Por otra parte se presenta también un reporte sobre los resultados obtenidos en cada una de las actividades, analizando hasta que punto las dificultades arrojadas por el cuestionario pudieron superarse, incluyendo además algunas observaciones que pudieran servir para futuras investigaciones.

5.2 Resultados del cuestionario

Pregunta 1: Noción de pendiente.

Todos los estudiantes trazan la recta que pasa por los puntos señalados y le asignan a la pendiente el signo positivo, las justificaciones ofrecidas son del tipo: "porque la recta se encuentra en el primer cuadrante", "porque al hacer el cálculo

de la pendiente me da positivo” o bien “porque corta al eje Y en un positivo”. Ninguno de los estudiantes asocia el signo de la pendiente con la inclinación de la recta. El siguiente cuadro muestra las respuestas a esta pregunta.

Inciso	correctas	incorrectas	abstenciones
a.	9	0	ninguno
b.	9	0	ninguno
c.	0	9	ninguno
d.	0	1	8

Pregunta I

A pesar de que todos los estudiantes han podido calcular la pendiente solicitada, es evidente que ninguno de ellos tiene un significado claro de esta noción, pareciera que ellos asocian la noción de pendiente con la aplicación de la fórmula para calcularla. En estas condiciones es difícil que puedan convertir la representación gráfica de una función lineal en algebraica o viceversa, en tanto que el parámetro a en la expresión $y = ax + b$ aparece completamente desconectado de la inclinación de la recta. La pregunta del inciso d no fue contestada, por lo que se concluye que para el estudiante no tiene sentido la pregunta después de haber calculado él la pendiente.

Pregunta II. La linealidad en una representación tabular.

En las respuestas a estas preguntas puede observarse que todos los estudiantes recurren al registro gráfico sin solicitarlo la pregunta, por lo que grafican una por una las parejas de números mostradas por cada tabla; y a partir del dibujo obtenido determinan si la relación entre las variables es lineal o no. Cuando el trazo obtenido es una recta concluyen que la relación es lineal y en caso contrario que no lo es. Enseguida se muestran las respuestas dadas por los estudiantes para cada una de las tablas.

Inciso	correctas	incorrectas	Grafica	abstenciones
a.	9	0	9	ninguno
b.	9	0	9	ninguno
c.	8	1	9	ninguno

Pregunta II

Esta estrategia de traducir la tabla punto por punto al registro gráfico, conduce a errores, sobre todo en los casos en los que la tabla no representa una función lineal. Uno de los estudiantes, por ejemplo, después de graficar la Tabla 3 llega a la conclusión de que la gráfica corresponde a una parábola. Este caso es interesante porque ilustra muy bien el hecho de que la atención del estudiante durante la tarea, se ha centrado en la "forma" que van adquiriendo los puntos en el plano y no en la naturaleza de la relación entre las columnas. A pesar de que en las Tablas 2 y 3 las relaciones entre las columnas guardan patrones esencialmente distintos, este estudiante concluye que ambas pueden representarse gráficamente mediante una parábola. La ausencia del registro algebraico, que hubiera podido evidenciar esta inconsistencia, es notoria.

La utilización de una representación algebraica se observó apenas en un estudiante, que la estableció correctamente para la Tabla 2, una vez que percibió que los puntos no parecían configurar una recta.

Pregunta III. Determinación de la ecuación de la recta cuando se tiene su gráfica. Al respecto de este problema, las respuestas ofrecidas por los nueve estudiantes pueden clasificarse como sigue:

- Cinco de ellos han partido de que la gráfica corresponde a la expresión algebraica $y = ax + b$ e identifican correctamente el parámetro b con la ordenada al origen, llegando a la conclusión de que $b = 6$. Pero cuando tratan de extraer de la gráfica el valor de la pendiente, dos de ellos identifican la pendiente con la intersección de la recta con el eje X, llegando a la conclusión de que $a = -2$ y por lo tanto deducen que la ecuación de la recta es $y = -2x + 6$. Los tres restantes recurren a los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados para calcular la pendiente y dos de ellos lo hacen correctamente, pero el tercero obtiene como puntos de intersección $(-2, 0)$ y $(6, 0)$ y sus cálculos obviamente son

incorrectos.

- Cuatro estudiantes intentaron utilizar la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$ para determinar la ecuación de la recta, pero solo uno de ellos logró calcular la ecuación correctamente. Los tres restantes tuvieron problemas para obtener de la gráfica las coordenadas de los puntos que se requerían o bien se extraviaron en la manipulación algebraica.

En el siguiente cuadro se resumen las respuestas obtenidas por los alumnos

Herramientas empleadas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
Identifican dos puntos: (x, y)	5	4
$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$	5	4
$y = ax + b$	2	3
$y - y_1 = m(x - x_1)$	1	3

Pregunta III

Pregunta IV. Conversión del registro algebraico al gráfico

Aunque el propósito de la pregunta era que el estudiante identificara la gráfica de la recta $y = -3x + 6$ a partir de sus parámetros, sus respuestas muestran que el camino tomado ha sido el de la graficación punto por punto. Solamente uno de los nueve estudiantes identificó las variables visuales con los parámetros de la expresión $y = -3x + 6$ para llegar a la respuesta correcta. Los ocho restantes, aunque también obtuvieron una respuesta correcta, graficaron punto por punto la expresión $y = -3x + 6$ y localizaron la respuesta correcta comparando la gráfica obtenida con las opciones propuestas.

5.3 Conclusiones del cuestionario

Nuestro estudio revela que cuando se trata de la función lineal, la noción de pendiente representa un serio obstáculo para la articulación entre registros. Esta

dificultad se revela con mayor fuerza en cierto tipo de conversiones, por ejemplo cuando el registro de partida es el gráfico.

5.4.1 Respuestas a los actividades de familiarización con el sistema

Los errores registrados no solo revelan un descuido notorio de las actividades de conversión por parte de la enseñanza, sino además una confianza excesiva de los estudiantes en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no manifiestan tener una significación clara.

En el problema IV del cuestionario por ejemplo donde se pedía seleccionar la

gráfica que correspondía a la función $y = -3x + 6$ los estudiantes han eludido el análisis de las gráficas presentadas como opciones y han graficado la función por separado para seleccionar después la respuesta correcta, este tipo de respuestas son interesantes, porque revelan que los estudiantes han encontrado en la graficación punto por punto de la función lineal, una manera de llegar a la respuesta correcta omitiendo por completo las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica.

A pesar del éxito aparente logrado por los estudiantes, el registro tabular utilizado como registro de partida ha resultado desconcertante. Las causas de este desconcierto parecieran asociadas con la utilización de la tabulación, solamente como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación por sí misma.

Puede decirse en lo general que los estudiantes, no han mostrado una aprehensión conceptual del objeto bajo estudio, en el sentido de que no han mostrado una articulación espontánea y libre de contradicciones de sus diversas representaciones. En estas condiciones es muy difícil que los estudiantes puedan utilizar con éxito la función lineal como herramienta para resolver problemas de oferta y demanda.

5.4 Respuestas de las actividades

5.4.1 Respuestas a las actividades de familiarización con el sistema cartesiano.

El diseño de las Prácticas 1, 2, 3 y 4 tuvo dos intenciones: una era familiarizar al estudiante con el software que utilizaría en el transcurso de las demás actividades y la otra que mejorara su orientación sobre el sistema cartesiano, cubriendo en parte algunas de las deficiencias detectadas en el diagnóstico.

Los archivos en Cabri utilizados en esta primera parte han sido diseñados para que puedan conducir la acción del estudiante hacia una respuesta aceptable; esto significa que ante una respuesta incorrecta, el estudiante pueda percatarse rápidamente que no es la respuesta solicitada.

A continuación se presenta un reporte de las primeras cuatro prácticas que fueron aplicadas a ocho estudiantes en un tiempo aproximado de hora y media.

Reporte # 1

Como se recordará, en la Práctica #1, el estudiante utilizó el archivo PUNTOS.fig. mostrado en la figura siguiente

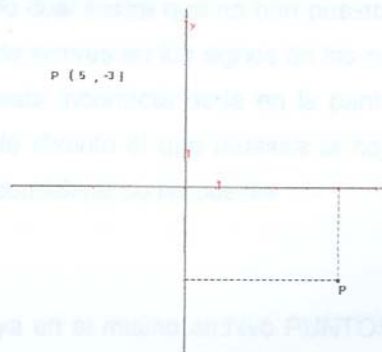


Figura 1

Y en su hoja de actividades se presentaron ocho gráficas como la siguiente

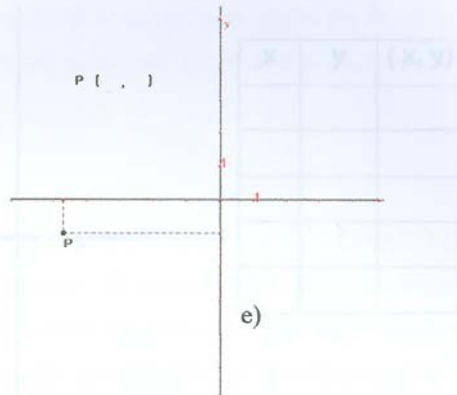


Figura 2

En cada una de ellas el estudiante escribiría las coordenadas del punto mostrado en la figura; para ello solamente ha tenido que hacer variar las coordenadas del punto P mostrado en pantalla para obtener una gráfica similar a la que tiene en su hoja de actividades. Esto explica porqué los estudiantes no han tenido dificultades para responder esta práctica de manera aceptable.

En el inciso e) por ejemplo, (ver Figura 2) se muestra un punto de coordenadas (-5,-1). En general estas coordenadas han sido bien identificadas por el estudiante en lo que se refiere a los signos de las coordenadas, pero han tenido algunos problemas para percibir las escalas de la figura. Dos estudiantes dieron como respuesta (-7,-1) lo cual ilustra que no han puesto atención en la escala de la gráfica. La ausencia de errores en los signos de las coordenadas es explicable, porque cualquier respuesta incorrecta dada en la pantalla mostrará un punto P ubicado en un cuadrante distinto al que muestra la hoja de actividades, lo cual permite al estudiante reconsiderar su respuesta.

Reporte # 2

La Práctica # 2 se apoya en el mismo archivo PUNTOS.fig. (ver Figura 1). En la hoja de trabajo aparece como primera actividad el siguiente ejercicio

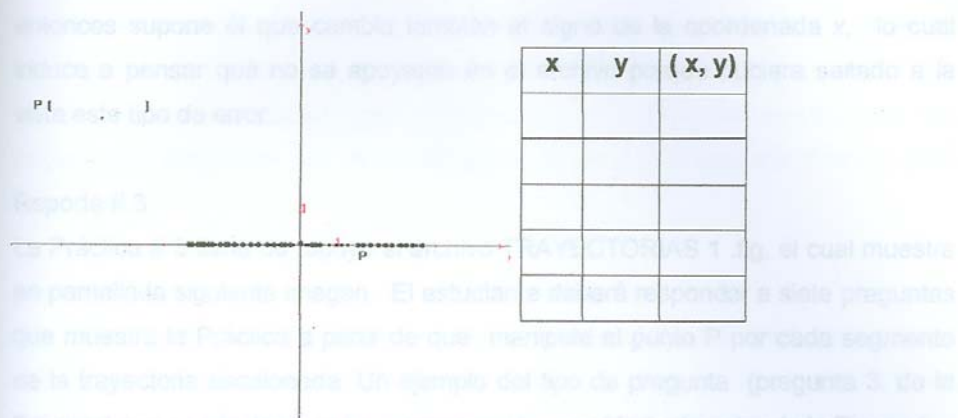


Figura 3

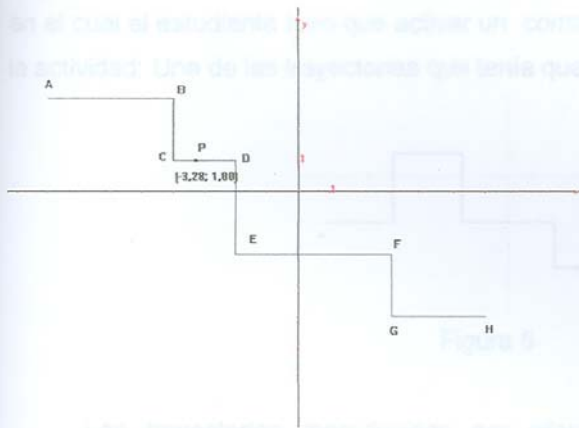
El estudiante debe manipular las coordenadas de P hasta observar que este se mueve en el plano sobre el eje X y anotar en la tabla cinco parejas de coordenadas del puntos P. Al igual que en la práctica anterior el estudiante manipulará las coordenadas de P hasta observar en pantalla una gráfica similar a la que tiene en su hoja de trabajo. El apoyo que da el archivo puede justificar porqué la mayoría de los estudiantes no tuvieron dificultad para responder adecuadamente sobre la tabla.

De los ocho estudiantes que realizaron las actividades dos de ellos mostraron serios errores en el registro de las coordenadas, uno de ellos en esta primer actividad y el otro en la actividad tres. Las respuestas del estudiante en la actividad uno fueron las siguientes: (4,-3), (2,-3), (1,-3), etc. , pareciera no tener idea de lo que hizo y que tal vez ni el software utilizó en esta primer actividad; en las siguientes actividades realizadas por él no se encontraron errores de este tipo. El segundo estudiante inicio muy bien la práctica solo que entre los datos anotados dos de esos fueron erróneos, la característica de esos puntos es que el valor de x es constante y es igual a tres para cualesquiera de esos puntos y el registra en dos de sus respuestas de las cinco que aparecen (-3,-3) y (-3,-3.5) estos dos último surgen cuando la coordenada y toma valores negativos,

entonces supone él que cambia también el signo de la coordenada x , lo cual induce a pensar que no se apoyaron en el archivo porque hubiera saltado a la vista este tipo de error.

Reporte # 3

La Práctica # 3 tiene de apoyo el archivo TRAYECTORIAS 1 .fig. el cual muestra en pantalla la siguiente imagen. El estudiante deberá responder a siete preguntas que muestra la Práctica a partir de que manipule el punto P por cada segmento de la trayectoria escalonada. Un ejemplo del tipo de pregunta (pregunta 3. de la Práctica) que se plantean es la que se muestra en el lado derecho de la Figura 4.



3. Describe el conjunto de TODOS los puntos P que están entre los puntos C y D.

Figura 4

Las respuestas dadas por el estudiante describen de una manera aceptable de lo que sucede con las coordenadas del punto P cuando se desplaza por cada uno de los segmentos. De nuevo el archivo muestra en pantalla las variaciones que muestra cada una de las coordenadas del punto P cuando se desplaza por cada segmento, difícilmente pudieran no tenerse respuestas aceptables de los estudiantes en esta actividad. Los problemas que se evidencian se relacionan más bien con la manera de describir la variación que presenta una de las coordenadas. Por ejemplo, para hacer una descripción de los puntos P cuando se desplazan de acuerdo a la pregunta 3 (ver Figura 4) la descripción de

un estudiante es la siguiente: “varía en el eje de las X de -4 hasta -2 y el eje de las Y se mantiene fijo en 1 ”, un segundo estudiante responde “ $(-4 \rightarrow -2, 1)$ “. Estas respuestas reflejan que el estudiante ha percibido cuales son las trayectorias recorridas por el punto pero no tiene un lenguaje técnico para describirlas.

Reporte # 4

Por último la Práctica # 4 referida también al sistema cartesiano, implica que el estudiante reproduzca dos trayectorias dadas en la actividad. Para reproducir en pantalla las trayectorias se utilizó el archivo anterior PUNTOS fig. (ver Figura 1), en el cual el estudiante tuvo que activar un comando del software para iniciar con la actividad. Una de las trayectorias que tenía que reproducir era la siguiente

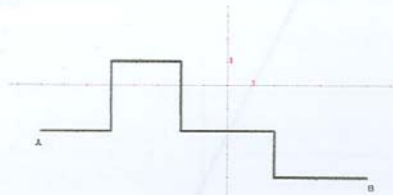


Figura 5

Las trayectorias reproducidas por ellos muestran características muy similares a las pedidas en la actividad con excepción de que si se quiere ser muy exigente en los tamaños de los segmentos que se muestran en la Figura 5 con respecto a los que ellos obtienen difieren un poco, esto posiblemente se debe a que trataban de dar un acercamiento sin fijarse en detalles muy particulares. Dos estudiantes dibujaron sus trayectorias con problemas de este tipo. Pero los demás estudiantes realizaron satisfactoriamente sus dibujos teniendo mayor precisión.

5.4.2 Respuestas a las actividades relacionadas con la función lineal: conversión gráfico-algebraica.

En las actividades 5.2, 5.3, y 5.4 de esta práctica el estudiante debe identificar la diferencia entre los momentos de la rueda cuando se hace variar

En el Capítulo 4 se hizo una descripción de las Prácticas # 5, 6, 7 referidas a la función lineal las cuales utilizan archivos diferentes en Cabri pero que en esencia son el mismo. A continuación se analizan las respuestas de los ocho estudiantes que participaron en las actividades. Estas tres prácticas fueron realizadas en un tiempo de hora y media en el centro de cómputo.

Reporte # 5.

Como se mencionó esta práctica se apoya en el archivo RECTAS 1.fig. el cual muestra en pantalla la siguiente imagen.

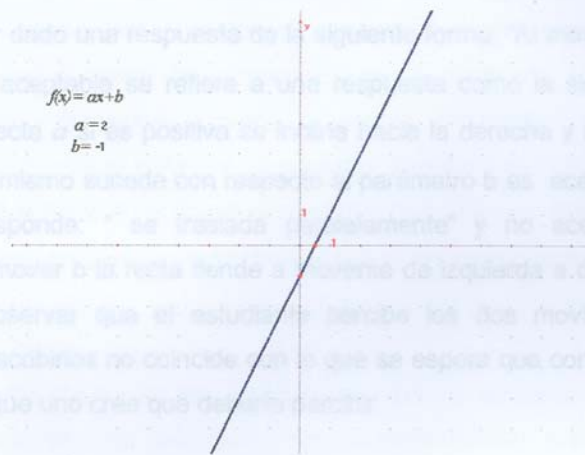


Figura 6

A pesar de que la primer actividad de la práctica tuviera como único fin en el archivo, que la recta de partida era $f(x) = ax + b$ y verificar que los valores de los parámetros se asociaban a distintas funciones, la mayoría de los estudiantes tuvieron serias dificultades para contestar la actividad, hubo necesidad de que el maestro interviniera para escribir la expresión algebraica solicitada. Lo que no garantiza que haya quedado claro para el estudiante con la ayuda del profesor.

En las actividades 5.2, 5.3, y 5.4 de esta práctica el estudiante debía identificar la diferencia entre los movimientos de la recta cuando se hacia variar el

parámetro a y cuando se hacía variar b . La siguiente tabla muestra cuantos de ellos dieron una respuesta precisa de los dos tipos de movimientos:

	Descripción aceptable cuando mueve el parámetro a	Descripción aceptable Cuando mueve el parámetro b
SI	6	2
NO	2	6

Cuando decimos que el estudiante da una descripción aceptable del movimiento de la recta al mover el parámetro a de la expresión $f(x) = ax + b$ significa haber dado una respuesta de la siguiente forma: "Al mover a gira" y una respuesta no aceptable se refiere a una respuesta como la siguiente: "cuando movemos la recta a si es positiva se inclina hacia la derecha y negativa hacia la izquierda". Lo mismo sucede con respecto al parámetro b es aceptable cuando el estudiante responde: "se traslada paralelamente" y no aceptable como la siguiente: "al mover b la recta tiende a moverse de izquierda a derecha". Resulta interesante observar que el estudiante percibe los dos movimientos pero la manera de describirlos no coincide con lo que se espera que conteste, es decir él no percibe lo que uno cree que debería percibir.

Las observaciones tomadas de las actividades 5.5 y 5.6 de la Práctica muestran que la mitad de los estudiantes identifican la relación estrecha que guarda el parámetro b con la intersección de la recta y el eje Y . Cuando se pide al estudiante el punto de intersección entre la recta y el eje Y casi todos (a excepción de uno de ellos) se limitan a escribir la ordenada del punto en lugar de escribir el punto como una pareja ordenada. Una vez que el estudiante llenaba la tabla se preguntaba por la relación del parámetro b con alguna de las columnas que indicaban los puntos de intersección con los ejes, pero como los puntos no fueron escritos como parejas ordenadas, la posibilidad de buscar un patrón entre la columna de los valores de b y la columna de los puntos de intersección tuvo

poco sentido. Algo importante de mencionar es que la pregunta fue confusa para el estudiante porque la mayoría preguntaba a que se refería.

Las respuestas obtenidas en la actividad 5.7 ponen en evidencia que los estudiantes han detectado la relación que existe entre los valores de b en la expresión $f(x) = ax + b$ y la altura a la que corta la recta al eje Y . La mayor parte de los estudiantes sin embargo insisten en caracterizar esa altura utilizando solamente la ordenada del punto de intersección. Aunque esta actividad está diseñada para contestar a lápiz y papel solamente, es importante resaltar que algunos estudiantes utilizaron el archivo RECTAS 1. fig. aprovechando que lo tenían abierto en pantalla. Las respuestas indicaron que los estudiantes han podido identificar el punto de intersección de la recta con el eje Y para las primeras cuatro expresiones cuando lo utilizan y cuando no lo hacen; pero aquellos que utilizaron el software no pudieron identificar el punto de intersección con el eje Y de la recta en la última expresión ($f(x) = ax + r$), esta dificultad puede explicarse fácilmente porque los parámetros a y r no son aceptados como tales en el software.

Seis de los estudiante han realizado con éxito la actividad 5.8, mientras que dos de ellos han ofrecido respuestas que no corresponden a las preguntas. Las respuestas correctas pudieran dar la impresión de que los estudiantes han asociado perfectamente las rectas que pasan por el punto $(0,5)$ con funciones lineales que tienen la forma $f(x) = ax + 5$, pero la manera utilizada para llegar a estas expresiones hacen el balance menos optimista. De nueva cuenta y fuera de lo previsto los estudiantes utilizan el software para realizar esta actividad, alimentando el archivo con los datos $a = 0$ y $b = 5$ (tomados probablemente del punto $(0,5)$ dado), esto les permitió obtener en pantalla la gráfica de $f(x) = 0x + 5$ para luego variar la a y obtener todas las expresiones pedidas.

La variación exclusiva del parámetro a pareciera una evidencia de que el

punto de intersección con el eje Y depende exclusivamente del parámetro b, pero los valores iniciales utilizados para los parámetros hacen que esta conclusión no sea suficientemente clara.

En el reporte de la actividad 5.9 las respuestas observadas fueron correctas prácticamente en todos los casos, el único caso en el que puede verse una confusión, está relacionada con la interpretación del signo de b.

Reporte # 6.

Se reporta de la actividad 6.1 de esta práctica que en lo general los estudiantes perciben (siete de ocho estudiante) en la gráfica que el ángulo permanece invariante cuando el parámetro b se mueve. El estudiante que no contestó de una manera favorable a la pregunta respondió de la siguiente manera " se mueve de lado a lado paralelamente", esto significa dos cosas: o bien se hizo una lectura deficiente de la pregunta o bien, el registro gráfico muestra diversas variables visuales que cambian y el estudiante no necesariamente percibe lo que se pretende.

En la actividad 6.2 las respuestas a esta pregunta permiten ver de nuevo que el movimiento de la recta percibida por los estudiantes no es fácil de describir, aunque casi todos los estudiantes (seis de ocho estudiantes) asocian el movimiento de a con la rotación, la diversidad de sus respuestas muestran que han centrado su atención sobre diferentes aspectos de esta rotación. Uno de los estudiantes por ejemplo escribe " la recta cambia su ángulo, es decir cambia la dirección", este tipo de respuesta señala que el estudiante no percibe un movimiento completo de la recta.

En la actividad 6.3 se reporta que los estudiantes han tenido problemas para contestar correctamente esta pregunta, si bien es cierto la mayoría (seis de ocho) han contestado que el ángulo vale cero esta respuesta se ha dado una vez que los estudiantes han discutido sus respuestas con el profesor. Estas

dificultades pueden explicarse por las limitaciones que el registro gráfico tiene para representar situaciones límite. A pesar de las intervenciones del profesor un estudiante decidió dejar como respuesta " el ángulo desaparece", mientras que el otro en "ausencia" del ángulo asoció al ángulo el valor tomado por el parámetro b que estaba viendo en pantalla.

Para la actividad 6.4 a) se reporta que cinco de los estudiantes han descrito de manera aceptable el crecimiento del ángulo cuando a se hace crecer a partir de cero. Por las respuestas que dieron los estudiantes restantes parecieran haber entendido que la pregunta se refería a la posición final del ángulo al concluir la variación de a , por ejemplo uno escribe "va trasladándose hacia la vertical eje Y en un ángulo de 90° ".

La pregunta de la actividad 6.4 b) fue contestada por un solo estudiante con precisión, el resto de las respuestas presentan una serie de deficiencias posiblemente relacionadas con la imposibilidad de tomar un giro de referencia. Un estudiante contesta por ejemplo: " hacia Y o sea hacia 90° ". Otra respuesta que resulta verdaderamente incoherente es la hecha por otro estudiante: " vertical al eje y ", sus respuestas parecieran un intento por describir el movimiento de la recta como un movimiento que se aproxima al eje Y.

La tarea de establecer el rango de variación del ángulo en la actividad 4 c) ha resultado problemático, tres de los estudiantes han encontrado este rango de variación de manera aceptable, aunque uno de ellos asegura que el rango es de " $1^\circ \dots 90^\circ$ " que no es completamente precisa; pero la percepción de que el valor inicial del ángulo es de 1° podría tener su origen en la idea que el ángulo de 0° no es un ángulo. En el resto de las respuestas incorrectas se observa una dificultad adicional, a saber aquella relacionada con la cuantificación de la medida del ángulo; por ejemplo dos estudiantes contestan: " entre 0° y 160° " otro entre 45° y 90° .

De las respuestas dadas en la actividad 6.5 a) solamente dos se pueden considerar aceptables porque perciben que el ángulo aumenta (en valor absoluto) pero ahora negativamente hasta -90° . Las restantes respuestas son imprecisas, ponen en evidencia las dificultades que tienen los seis estudiantes restantes para describir que sucede con el ángulo cuando el parámetro α toma valores negativos. Por ejemplo un estudiante contesta " el ángulo se traslada hacia abajo en forma vertical al eje Y".

Con respecto a la actividad 6.5 b) sucedió lo mismo que en la actividad 6.4 b) la referencia que se tiene para describir la dirección de giro de un ángulo se mostró evidente en dos estudiantes ellos respondieron que el ángulo gira como las manecillas del reloj. Los demás estudiantes mostraron dificultades en su descripción como la siguiente: "hacia abajo en dirección del eje Y".

Las respuestas obtenida de la actividad 6.5 c) fueron en lo general imprecisas, solamente un estudiante contestó de " 0° a 90° ". En los demás estudiantes les resultó difícil precisar el rango de variación del ángulo cuando α es menor que cero. Por ejemplo uno de los estudiante que había contestado en forma aceptable la actividad 6.4 c) que fue puesto como evidencia en ese reporte, su respuesta para la actividad 6.5. c) fue de " 360° a 270° ", esto muestra dificultades para representar las variaciones de ángulos negativos.

Reporte # 7.

En la actividad 7.1 los estudiantes no estaban obligados a establecer una relación entre las columnas, más bien se trataba de que pudieran estimar la medida del ángulo mostrado en pantalla para cada valor de α solicitado. En general los resultados ofrecidos son consistentes (seis de ocho estudiantes) en el sentido que el ángulo crece cuando la α varía entre -100 y 100 . Sin embargo vale la pena comentar algunas particularidades encontradas en las respuestas, por ejemplo seis de los estudiantes consideran que para α igual a 100 la recta tiene un ángulo

de inclinación de 90° , lo cual pareciera deberse a que las respuestas efectivamente están basadas en las representaciones gráficas mostradas en pantalla.

En la actividad 7.2 aunque en la pregunta se solicita el intervalo de variación del ángulo solamente tres de los estudiantes dieron como respuesta los intervalos de variación apropiados. Un cuarto estudiante identifica bien los intervalos de variación del ángulo que corresponden al intervalo de variación

$-1 < a < 0$ y $0 < a < 1$, pero tiene dificultades cuando intenta establecer para los intervalos de variación de $-\infty < a < -1$ y $1 < a < \infty$, lo cual pareciera ser un indicativo de que los símbolos $-\infty$ y ∞ le han provocado problemas. El hecho de que uno de los estudiantes haya dado como respuesta 45° al intervalo de $1 < a < \infty$ podría deberse a que entendido que la pregunta se refería a cuántos grados varía el ángulo en este intervalo. Esta interpretación del estudiante y el número de estudiantes que han dejado la pregunta en blanco (tres estudiantes de ocho) podrían tener su explicación en la poca precisión con la que ha sido formulada la pregunta.

En la actividad 7.3 solamente se reportan los resultados de cinco estudiantes, por que tres restantes utilizaron software para contestarla lo cual hace que la actividad pierda su propósito. El siguiente cuadro presenta el número de estudiantes que dieron una estimación aceptable del parámetro a para cada gráfica mostrada

Gráfica 1	3
Gráfica 2	3
Gráfica 3	5
Gráfica 4	1
Gráfica 5	4
Gráfica 6	3

Lo cual muestra que no hubo dificultades para estimar el parámetro a de la gráfica 3 cuando la recta es horizontal y cuando el ángulo de inclinación sobrepasa el ángulo de 45° (gráfica 5), pero si hubo problemas con la gráfica 4 porque solamente uno pudo estimar correctamente el parámetro a , posiblemente debido a que la recta mostrada tiene un ángulo de inclinación negativo y en la gráfica no aparece la referencia $f(x) = -x$. Llama la atención que uno de los estudiantes contestó incorrectamente cinco de las preguntas porque asignó al parámetro a su estimación del ángulo de inclinación de la recta.

Reporte # 8

Esta práctica fue aplicada a ocho estudiantes pero solo tres de ellos pudieron concluirla por limitaciones de tiempo. Esta práctica tuvo una duración aproximada de media hora.

La pregunta 1 de la actividad 8.1 era de opción múltiple, el número de estudiantes que seleccionaron una de las opciones puede verse resumida en la siguiente tabla

Respuestas Actividad 8.1

a)	b)	c)	d)
6	0	2	0

La pregunta ha resultado difícil para los estudiantes que parecían no alcanzar a identificar el efecto gráfico de ambos parámetros simultáneamente, el hecho de que estas dos opciones hayan sido seleccionadas por los estudiantes parece indicar que la traducción del parámetro b en la gráfica ha resultado claro hasta ahora, sin embargo la identificación del parámetro a con la pendiente de la recta sigue mostrándose como una dificultad persistente. El hecho de que la opción a) haya funcionado como el mejor distractor en el problema pudiera deberse a que en este caso la recta interseca al eje X en el punto $(-4, 0)$ y que los estudiantes siguen pensando que el parámetro a tiene que ver con la

intersección al eje X.

En la pregunta de la actividad 8.2 todos los estudiantes trazaron las rectas correspondientes a las funciones solicitadas, a pesar de que la pregunta solicitaba explicar el razonamiento seguido por los estudiantes solamente tres de ellos hicieron las explicaciones pedidas en las prácticas, lo que arroja luz acerca de los niveles de comprensión logrados hasta este momento, si bien es cierto que las respuestas revelan una identificación más o menos clara sobre el efecto producido en una gráfica por el parámetro b pero no se encuentran elementos para llevar las conclusiones más allá de eso, es difícil afirmar por ejemplo que el parámetro a ha sido traducido a las gráficas. Uno de los estudiantes ofreció como argumento para su respuesta el siguiente: " la recta se mueve hacia la derecha. Solo cambia la posición cuando varía b ".

Respuestas Actividad 8.2

Con éxito	Con deficiencias
8	0

La pregunta de la actividad 8.3 muestra que aunque la actividad anterior pudiera dar margen a pensar que la conversión gráfico-algebraico de la noción de pendiente ha venido mejorando las respuestas dadas por los estudiantes, en esta actividad arrojan serias dudas sobre esta mejoría. Solamente tres de los ocho estudiantes han contestado bien a esta actividad y de ellos hay una argumentación en cada caso, los otros cinco estudiantes han ejecutado la tarea con serias deficiencias, de estos últimos cinco uno solamente hizo pasar todas las rectas por el origen, mientras que los otros cuatro insisten en ofrecer diversas interpretaciones del parámetro a relacionándolo con las intersecciones a los ejes.

Respuestas Actividad 8.3

Con éxito	Con deficiencias
3	5

Como se dijo al principio de esta práctica no todos los estudiantes la

concluyeron a partir de la actividad 8.4 solo se exhibirán las respuestas ofrecidas por los tres estudiantes que lograron concluir la práctica. Uno de ellos identificó correctamente las expresiones algebraicas que corresponden a las rectas proporcionadas, mientras que los otros dos llegaron a respuestas incorrectas por diferentes caminos. A pesar de que las tres rectas graficadas son paralelas, uno de estos últimos estudiantes les asoció las expresiones algebraicas $f(x) = -4x+3$, $f(x) = -3x+1$ y $f(x) = 1.5x - 1$ su respuesta privilegia la conversión del parámetro b pero muestra una gran confusión cuando intenta traducir la conversión gráfico-algebraico del parámetro a .

Respuestas Actividad 8.4

Con éxito	Con deficiencias
1	2

Al igual que en la actividad anterior las respuestas que los estudiantes ofrecieron para la actividad 8.5 solamente uno de ellos la realiza con éxito. En esta actividad se ofrecen tres rectas graficadas intersecándose en un mismo punto sobre el eje Y , el estudiante debe proporcionar la expresión algebraica para cada una de ellas. Los estudiantes que contestaron mal siguen insistiendo que la intersección de la recta con el eje X tiene que ver con el parámetro a de la función $f(x) = ax + b$, pero la intersección de la recta con el eje Y no muestran ningún problema al asociarlo con el parámetro b . La respuesta dada por uno de los estudiantes fue: $f(x) = -4x+2$, $f(x) = -2x+2$ y $f(x) = 1.2x + 2$.

Respuestas Actividad 8.5

Con éxito	Con deficiencias
1	2

Para la última actividad 8.6 se solicita al estudiante escribir una expresión para cada una de las gráficas mostradas donde la inclinación y punto de intersección con el eje Y es distinta en cada una de ellas. Un estudiante de los tres

realizó satisfactoriamente esta actividad, determinando correctamente la expresión algebraica de cada gráfica. Los otros dos estudiantes persistieron en relacionar ambos parámetros con las intersecciones de la recta con los ejes.

Respuestas Actividad 8.6

Con éxito	Con deficiencias
1	2

5.4.3 Respuestas a las actividades relacionadas con la representación tabular y algebraica.

Las siguientes prácticas están dedicadas a trabajar con la representación tabular de la función lineal, ambas pudieron realizarse en un transcurso de hora y media.

Reporte # 9

Las actividades de la 9.1 a la 9.4 se identifican como actividades de entrenamiento que tienen como intención: familiarizar al estudiante con la lectura de tablas, para convenir ciertas notaciones e irlos introduciendo con las nociones a emplear para la identificación de la linealidad de una tabla. Con la Tabla 1 se discute el primer criterio de linealidad cuando los incrementos de x son iguales y con la Tabla 2 el segundo criterio de linealidad cuando los incrementos de x son distintos. Lo que se reporta de estas actividades es que no hubo problema por parte de los alumnos para ir contestando cada una de las actividades a excepción de problemas con la notación empleada.

En la actividad 9.5 se analizan tres tablas numéricas que se han venido discutiendo a lo largo de las actividades de la 9.1 a la 9.4 y se pide resumir los resultados con el fin de discutir cuál es el papel que juegan algunos datos calculados hasta aquí. La primera pregunta que se hace al estudiante es cuáles de las tres representaciones tabulares representan una función lineal; ningún

estudiante tuvo problemas para identificar la linealidad en la primera y tercer tabla donde los incrementos en x son constantes, sin embargo en la Tabla 2 donde los incrementos de x son distintos cinco de los estudiantes consideran que la relación es no lineal, por lo menos cuatro de estos cinco la respuesta pareciera contradictoria porque ya habían calculado previamente los cocientes de incrementos de estas tablas y les habían resultado constantes. Esta confusión pudiera tener dos orígenes uno de ellos la poca familiaridad observada en los estudiantes para trabajar con representaciones tabulares y la otra podría deberse a que el segundo criterio para detectar la linealidad no ha resultado suficientemente claro. El trabajo realizado por los estudiantes deja entrever que estos criterios son vistos como ajenos y no se logra percibir uno como caso particular del otro.

En la pregunta dos cuando se pidió a los estudiantes cuál de los dos criterios estaban empleando para detectar la linealidad ninguno de ellos tuvo problemas con las Tablas 1 y 3. La Tabla 2 resultó conflictiva, dos estudiantes que no declararon el criterio empleado respondieron que la relación no era lineal, mientras que tres de ellos habiendo declarado que utilizaban el criterio dos consideraban que la relación es no lineal, estos últimos parecieron haber entendido que la utilización del criterio dos los conducía directamente a la no linealidad, uno de ellos inclusive calcula correctamente el cociente de incrementos y determina bien el valor de la ordenada al origen.

En la pregunta 3 de esta actividad se pide al estudiante calcular el cociente de incrementos de y con respecto a x , para cada una de las tablas, las respuestas ofrecidas por los estudiantes aquí reflejan una significación muy pobre de este cociente, en la Tabla 1 por ejemplo cuatro estudiantes lo han calculado correctamente, mientras que otros han calculado en su lugar el incremento x con respecto y (en forma inversa) y otros dos se han limitado a ofrecer como respuesta la notación de incrementos. Los resultados dados en la Tabla 3 son muy similares a los de la Tabla 1: cuatro respuestas correctas, dos estudiantes que se equivocan en el signo del cociente y dos que se limitan a contestar la notación del cociente de incrementos y sobre x . El análisis de la Tabla 2 les sigue acarreado problemas

a cuatro de ellos que han dejado en blanco la respuesta y de los cuatro que han contestado correctamente, por lo menos uno muestra evidencias en el resto de sus respuestas de que no entiende a que se refiere este cociente.

En la pregunta 4 de la siguiente actividad se pide al estudiante identificar en cada una de las tablas la ordenada al origen de la expresión $f(x) = ax + b$, todos los estudiantes han contestado bien esta pregunta en las tres tablas, excepto los cuatro que han mostrado claras dificultades para trabajar con la Tabla 2 y que en este caso han dejado la respuesta en blanco. La gran cantidad de respuestas correctas a esta pregunta no asegura que los estudiantes puedan calcular la ordenada al origen cuando una función lineal está representada tabularmente porque en las tres tablas aparece el valor de cero para la variable x .

En la última pregunta a esta actividad había la intención de que los estudiantes especificaran el crecimiento o decrecimiento de la función lineal en cada una de las tablas con el fin de relacionar el signo de cociente de incrementos con sus respuestas, sin embargo la pregunta resultó poco importante por la gran cantidad de errores cometidos al calcular los cocientes.

En la última actividad 9.6 de esta práctica se ha pedido a los estudiantes que escriban la relación algebraica de cada una de las tablas de esta práctica, en la Tabla 1 seis de ellos han obtenido la respuesta $y = 8x$ que es la respuesta correcta, mientras que otros dos han ofrecido la respuesta $y = 1/8 x$. La consistencia entre el cálculo del cociente de incrementos de y con respecto a x y la expresión algebraica pareciera indicar que las respuestas se han dado de manera mecánica, pues los dos estudiantes que han equivocado su respuesta sostienen que la relación representada en la tabla tiene la representación algebraica $y = 1/8 x$ a pesar de que en la tabla la y claramente crece de 8 en 8.

La expresión algebraica para la tabla 2 ha sido respondida correctamente por 3 estudiantes que dan como respuesta $y = 2x + 1$, los cinco restantes habían contestado con anterioridad que la relación de la Tabla 2 era no lineal pero a pesar de ello 2 dieron la expresión algebraica para la tabla, los 3 restantes la dejaron en blanco. De los 2 estudiantes que dieron la expresión algebraica a pesar de haber respondido que la Tabla 2 representa una relación no lineal muestran evidencias

claras de la falta de indicadores para corroborar sus respuestas.

Los mismos problemas resultan evidentes con la expresión algebraica que ellos asignan para la Tabla 3, dos de los estudiantes que omitieron el signo del cociente de incrementos que era igual a -0.5 , dieron como respuesta $y = 0.5x + 9$.

Reporte # 10

Esta práctica incluye dos actividades; la primera que consiste en identificar cuales de las ocho tablas proporcionadas representan una función lineal aplicando los criterios dados y una segunda actividad en la que se le solicita al estudiante la representación algebraica de aquellas relaciones identificadas como lineales.

En la siguiente tabla se reportan las respuestas de la primer actividad, en la cual se han sombreado las celdas que corresponden a la respuesta correcta. Tal como se esperaba el mayor número de respuestas correctas se corresponden con las tablas en las que el incremento en x es constante. Un solo estudiante pudo identificar como lineales las relaciones presentadas por las Tablas D y H donde los incrementos en x no son constantes, mientras que cinco de ellos llegaron a una conclusión errónea y dos estudiantes la dejaron en blanco.

Respuestas	Tabla A	Tabla B	Tabla C	Tabla D	Tabla E	Tabla F	Tabla G	Tabla H
Es Lineal	8	0	0	1	8	0	8	1
No Lineal	0	7	6	5	0	6	0	5
No contestaron	0	1	2	2	0	2	0	2

Los errores observados en esta práctica podrían tener como explicación las confusiones en la comprensión de los criterios ya mencionados en la práctica anterior. Uno de ellos escribió todas las expresiones algebraicas correctamente, excepto la representada por la Tabla F en la que escribió " $y = 1x$ " mientras que la relación representada en la tabla era $y = |x|$. El otro estudiante arribó a la expresión algebraica correcta en las Tablas A, E y G en las que los incrementos en x son constantes, pero incluyó erróneamente entre las no lineales las tablas D y

H, en la que los incrementos en x no son constantes.

5.5 Conclusiones de las actividades

Las prácticas de la 1- 4 solo tenían el propósito de familiarizar al estudiante con el software y mejorar su orientación en el plano cartesiano. Estas cuatro prácticas se realizaron en un tiempo de una hora y media y durante su ejecución se observó a los estudiantes motivados en dichas actividades. La autonomía mostrada por los estudiantes en el resto de las actividades han dejado en claro que las prácticas de la 1 – 4 resultaron suficientes para familiarizar al estudiante con el manejo del software. Esta autonomía desde luego no es ajena a la amigabilidad del paquete utilizado.

Al respecto de la posible mejoría en la orientación sobre el plano cartesiano, no se tiene una conclusión firme debido a que no se hizo una evaluación específica sobre el tema; pero las confusiones entre las coordenadas x e y detectadas en el diagnóstico no se volvieron a observar en el resto de las prácticas.

Las de las prácticas de la 5 – 8 fueron diseñadas con el propósito de adelantar una propuesta de enseñanza que tome en cuenta la conversión entre representaciones. La modalidad de trabajar con actividades escritas y con apoyo computacional ha resultado novedoso y estimulante para los estudiantes.

Los resultados, tal como se han reportado en el Capítulo anterior, no han sido del todo alentadores. Las razones ofrecidas por Duval acerca de la incorporación de actividades de enseñanza orientadas a promover la conversión son muy convincentes, pero el diseño de estas actividades dentro de una propuesta innovadora, enfrenta las resistencias naturales alimentadas en los estudiantes por una enseñanza bastante tradicional.

A lo largo de la implementación se observó que el parámetro b de la función lineal $y = ax + b$ en la conversión gráfico-algebraica ha sido rápidamente asimilado por los estudiantes. Esto es relativamente fácil de explicar porque la relación b -ordenada al origen entre los registros algebraico gráfico es directa.

En contraste la relación a -pendiente de la recta ha resultado una seria dificultad para los estudiantes. Esta dificultad ha resultado muy persistente y está relacionada posiblemente con varios factores:

- a) En primer lugar, las representación gráfica de la b como la magnitud de un segmento sobre el eje Y , pareciera inducir la idea de que el parámetro a debiera corresponder también la magnitud de alguna cantidad directamente observable en la gráfica. Esta conclusión está apoyada en los resultados ofrecidos por aquellos estudiantes que asociaron el parámetro a con la magnitud del ángulo de inclinación o con la abscisa al origen de las recta.
- b) En el diseño de las actividades no se incluyó la cuantificación del parámetro a partir de la representación gráfica, porque se partió del supuesto de que los estudiantes podrían establecer el comportamiento del ángulo de inclinación para algunos rangos claves de los valores de a y a la inversa, que podrían prever la variación de a cuando el ángulo de inclinación se mueve en ciertos rangos propuestos de antemano. A pesar de que la representación gráfica ha sido dotada de referencias (ángulo de inclinación y recta $y = b$) para facilitar la detección de esta relación; la experimentación ha evidenciado que esta relación entre los rangos de variación de a y del ángulo de inclinación ha resultado muy difícil de establecer. Bajo esta interpretación, la inclusión de un artificio en la representación gráfica, que muestre el parámetro a como la magnitud de un segmento, pareciera la única manera de mejorar la conversión gráfico-algebraica.
- c) En la ejecución de las tareas han aparecido otras dificultades que se revelan como inherentes al registro gráfico, a saber las limitaciones que

tiene este registro para representar las situaciones límite. En lo que se refiere específicamente al parámetro a , estas limitaciones son evidentes cuando se intenta representar a igual a cero y a igual a infinito. Las respuestas “ el ángulo es recto” cuando $a = 80$ son suficientemente elocuentes.

Por último, la experimentación ha revelado que los estudiantes no siempre han podido discriminar en una representación gráfica, los elementos más importantes para la actividad de los menos importantes. Aunque el diseño de las actividades ha resuelto parcialmente este problema, han quedado vacíos en las actividades que tendrán que tomarse en cuenta en futuros diseños.

Después de la experimentación ha quedado claro también que la recomendación de utilizar en la enseñanza las actividades aquí presentadas, exigiría un refinamiento a la luz de las observaciones hechas aquí.

Las últimas actividades diseñadas tuvieron que ver con la representación tabular de la función lineal, los resultados obtenidos a través de estas actividades mostraron que el estudiante pudo identificar la linealidad en una tabla siempre y cuando los incrementos en x eran constantes, pero no logró identificarla con incrementos distintos en x . Este logro alcanzado por los estudiantes resulta favorable, porque una de las dificultades encontradas en el cuestionario fue que él no identificaba la linealidad en una tabla. Las actividades que se formularon pretendían también la conversión tabular–algebraica pero las actividades no han resultado suficiente para lograr esa conversión, una recomendación al respecto es que las actividades deberían incluir la conversión tabular–gráfica porque no ha sido fácil dotar de significado en la representación tabular los parámetros a y b .