

## II) CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Es mi interés en éste capítulo, hacer una introducción a la teoría del análisis plástico simple, para esto, es necesario definir un concepto muy importante debido al cual se ha hecho posible el desarrollo de dicha teoría. El concepto anteriormente mencionado, es el de ductilidad, como propiedad intrínseca del acero estructural.

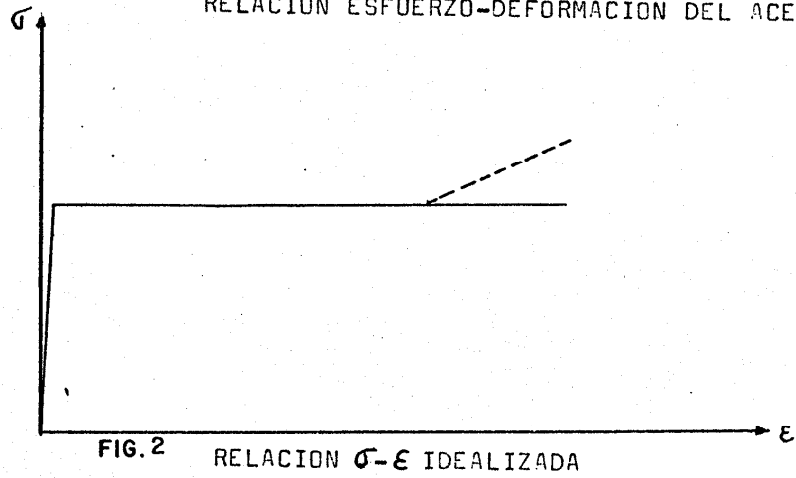
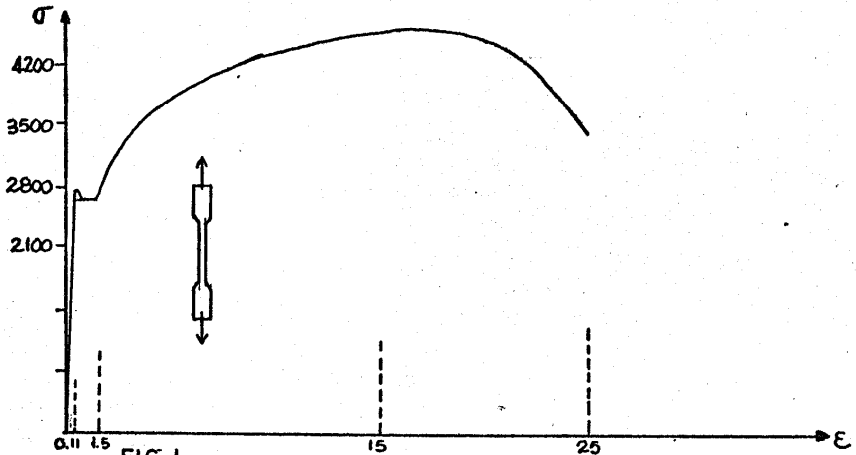
### 2.1) DUCTILIDAD Y "REDISTRIBUCION DE CARGAS"

La ductilidad es la propiedad de un material de sufrir grandes deformaciones más allá del límite elástico sin peligro de fractura. El acero posee ésta propiedad la cual no ha sido posible encontrar en la misma magnitud en algún otro material estructural.

Para concebir una idea más clara y precisa de lo dicho anteriormente basta observar la gráfica del acero estructural (Fig. 1), para posteriormente llegar a idealizar su comportamiento como un material elástico-plástico perfecto y así poder utilizarlo con fines prácticos (Fig. 2).

Cabe aquí mencionar, que las relaciones a tensión y compresión resultan ser iguales. Se ha observado en la práctica que las deformaciones en el rango plástico son aproximadamente de 8 a 15 veces la deformación del límite de fluencia y el colapso o falla final ocurre

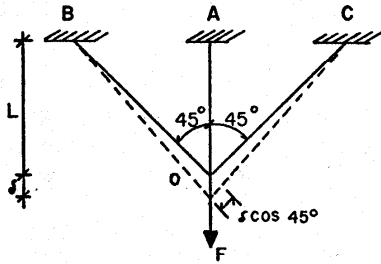
rá hasta que el miembro se haya deformado de 15 a 25 veces  $E_y$ .



De aquí podemos observar que la capacidad por ductilidad del acero resultará suficiente para aplicaciones prácticas. Existe una zona de endurecimiento la cual no es tomada en cuenta para fines de diseño pero que ov--

viamente nos afectará en forma favorable el margen de seguridad.

A continuación se analiza un ejemplo en el cual se idealiza el comportamiento de los elementos, como elástico-plásticos perfectos.



SOLUCION ELASTICA

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = F$$

$$F_{oA} + 2F_{oB}\cos 45^\circ = F$$

$$\delta = \frac{F_{oA}L}{AE} \Rightarrow F_{oA} = \frac{\delta AE}{L}$$

$$\delta \cos 45^\circ = \frac{2F_{oB}L \cos 45^\circ}{AE} \Rightarrow 2F_{oB} = \frac{\delta \cos 45^\circ AE}{L \cos 45^\circ}$$

$$F_{oB} = \frac{\delta AE}{2L} \quad F_{oA} = 2F_{oB}$$

$$2F_{oB} + 2F_{oB}\cos 45^\circ = F$$

$$F_{oB} = \frac{F}{2 + \sqrt{2}} = F_{oC} \quad F_{oA} = \frac{2F}{2 + \sqrt{2}}$$

$$F_{e1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} A\sigma_y = 1.707 A\sigma_y; \delta_{e1} = \frac{\sigma_y L}{E}$$

SOLUCION PLASTICA

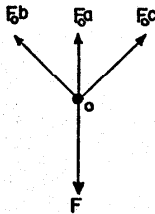
$$F_{oB} = F_{oC} = \frac{\delta EA}{2L} = \frac{F - A\sigma_y}{\sqrt{2}}$$

Se alcanza la máxima carga cuando:

$$F_{oB} = A\sigma_y = F_{oC}$$

$$F = \sqrt{2} A\sigma_y + A\sigma_y = A\sigma_y(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} F_{e1} = F = 2.414 A\sigma_y$$

$$\delta_F = \frac{2\sigma_y L}{E}$$



En éste ejemplo podemos observar claramente el aumento en capacidad de carga debido a la ductilidad del acero y que será en %:

$$\% \text{ aumento} = 100(F/F_{el} - 1) = 41.4\%$$

Al ocurrir la fluencia de la barra central, y en caso de aumento de carga, la estructura tiene capacidad de redistribuirla en las barras que aún no llegan a su límite de fluencia, esto es, en esencia la finalidad del diseño plástico, aprovechar al máximo posible la redistribución de cargas -- debido a la ductilidad de sus miembros.

Con referencia al ejemplo anterior y al criterio elástico, la carga de trabajo de la estructura analizada es:

$$F_t = 1.707A\sigma_t$$

por lo tanto el coeficiente de seguridad elástico, con respecto a la iniciación del flujo plástico será:

$$F.S. = \frac{F_y}{F_t} = \frac{1.707A\sigma_y}{1.707A\sigma_t} = 1.65$$

cuando la estructura alcance la máxima carga que puede soportar o sea la carga última, ( $F=F_u$ ) la fuerza en cada una de las barras será  $A\sigma_y$  y por lo tanto el coeficiente de seguridad respecto al colapso será:

$$F.S. = \frac{F_u}{F_t} = \frac{2.414A\sigma_y}{1.707A\sigma_y} = 2.35$$

de ésta manera se hace notorio nuevamente que se tiene un incremento de capacidad de cargas debido a la ductilidad --

del acero (Fig. 3).

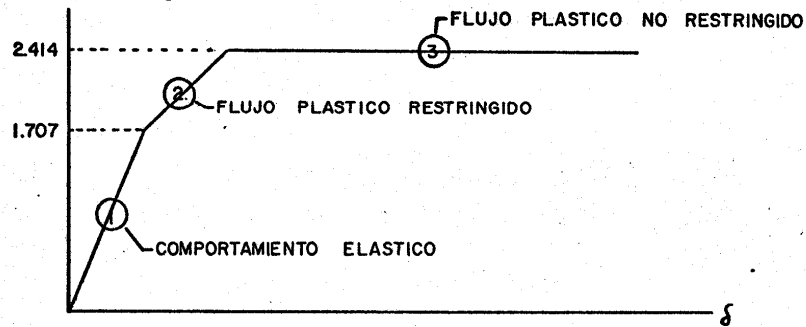


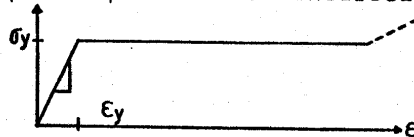
FIG. - 3

En ésta figura podemos observar el comportamiento de una estructura, desde que empieza a ser cargada hasta llegar al colapso ó falla final; en la etapa 1 los miembros cumplen con la ley de Hooke, en la 2 algunos de los miembros empiezan a fluír, pero éste flujo plástico es limitado por los miembros que permanecen aún bajo el límite de fluencia, a éste fenómeno se le conoce como flujo plástico restringido, en la etapa 3 se refiere al momento en que la estructura llega a la máxima carga que puede soportar y por lo tanto es la que ocasionará el colapso de la estructura, ó sea, ocasionará un flujo plástico no restringido.

## 2.2) TEORIA SIMPLE DE LA FLEXION PLASTICA EN VIGAS

El objetivo primordial de ésta teoría es el de analizar el comportamiento de una viga cuando ésta sobrepasa el límite elástico en algunas de sus secciones. La teoría está basada en las hipótesis siguientes:

1.- El material sigue la ley de Hooke hasta que el esfuerzo alcanza el valor correspondiente al límite superior de fluencia; al aumentar la deformación, el esfuerzo baja bruscamente hasta el límite inferior de fluencia, y a partir de éste punto se mantiene constante, hasta que se presente el endurecimiento por deformación.



$$\epsilon < \epsilon_y : \sigma = \epsilon E$$

$$\epsilon > \epsilon_y : \sigma = \sigma_y$$

2.- Las propiedades del material en compresión son las mismas que en tensión, conservándose los mismos valores para  $E$  y  $\sigma_y$ .

3.- El material se considera homogéneo e isótropo, tanto en el rango elástico como en el plástico.

4.- Cada fibra de la pieza sometida a flexión se comporta igual que a tensión o compresión simple, es decir, se supone que cada una de las fibras está en libertad de alargarse y contraerse longitudinal y transversalmente, o viceversa, bajo la acción de las fuerzas exteriores, como si estuviera separada de las demás.

5.- Toda sección transversal de la viga es simétrica respecto a un eje que está alojado en el plano de la flexión.

6.- Las secciones transversales planas antes de la deformación permanecen planas después de ésta, y se conservan normales al eje longitudinal deformado de la

pieza (ésta hipótesis se cumple rigurosamente en vigas sujetas a flexión pura; en los demás casos, su aceptación equivale a desprestigiar el efecto de las fuerzas cortantes sobre las deformaciones).

7.- No hay fuerza axial resultante en las secciones transversales de la viga (es decir, las fuerzas normales interiores son mecánicamente equivalentes a un par, en cada sección transversal).

8.- Las deformaciones son suficientemente pequeñas para que pueda considerarse que  $\phi = \tan\phi$ , siendo  $\phi$  la curvatura en un punto cualquiera del eje de la viga.

#### FLEXION DE UNA BARRA DE SECCION TRANSVERSAL RECTANGULAR

Es conveniente señalar, para relaciones posteriores, las siguientes ecuaciones de la flexión elástica:

$$\phi = \frac{I}{\rho} = \frac{\epsilon}{y} = \frac{\sigma}{Ey} \quad ; \quad M = EI\phi \quad ; \quad My = \sigma y S$$

donde:

$\phi$  = curvatura

$\rho$  = radio de curvatura

$\epsilon$  = deformación

$y$  = distancia de la fibra al eje neutro

$\sigma$  = esfuerzo a una distancia  $y$  del eje neutro

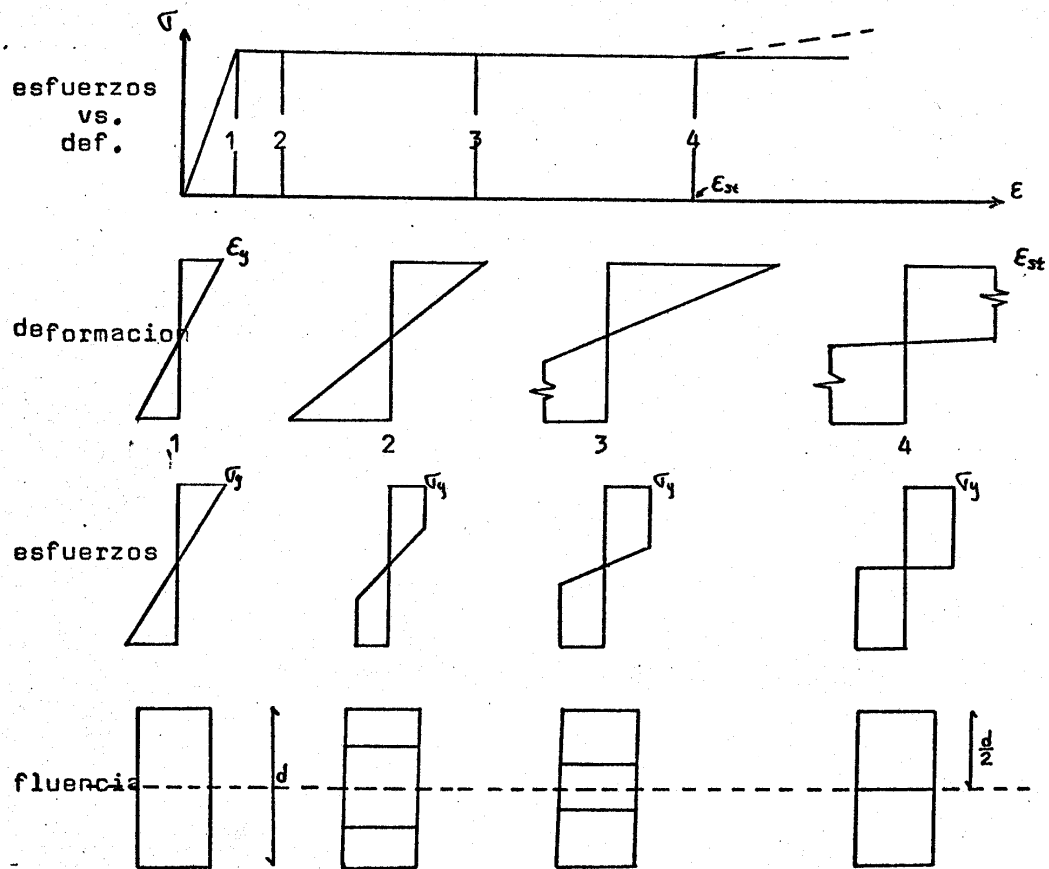
$\sigma_y$  = esfuerzo de fluencia

$E$  = módulo de elasticidad

$I$  = momento de inercia

$S$  = módulo de sección ( $I/c$ )

Para obtener la relación  $M-\phi$  en el rango plástico se procede de la misma forma que en análisis elástico, ó sea, suponiendo la estructura deformada y obteniendo el momento y la curvatura correspondientes a dicha deformación. En la siguiente figura se mostrarán las diferentes etapas de deformación, esfuerzos, y fluencias en una viga de sección rectangular que es flexionada más allá de su límite de fluencia y hasta la fluencia total de la sección transversal.



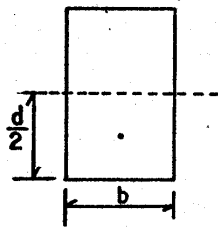
Flexión plástica de una viga de sección rectangular



Antes de obtener la relación  $M-\phi$  de la sección es necesario definir dos conceptos que están involucrados en la obtención de  $M-\phi$  y son éstos, el Módulo plástico y el Momento Plástico.

### 2.3) MODULO PLASTICO Y MOMENTO PLASTICO

El Módulo Plástico ( $Z$ ) corresponde en su aplicación al Módulo de Sección ( $S$ ), y analíticamente será igual a la suma del momento estático de las áreas a tensión y a compresión con respecto al eje neutro. Para la sección rectangular tenemos:



$$Z = 2\left(\frac{d}{2}\right)(b)\left(\frac{d}{4}\right) = \frac{bd^2}{4}$$

El Momento Plástico será el momento máximo que pueda desarrollar la viga y éste será cuando esté plastificada toda la sección transversal. El Momento Plástico está definido como el producto del esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$  por el Módulo Plástico, así:

$$M = \sigma_y Z$$

Para obtener la curvatura en una etapa en particular, se determina a partir de la distribución dada de esfuerzos. Así, para obtener la curvatura en el siguiente diagrama, que corresponde a la etapa 2 de la fig.4.

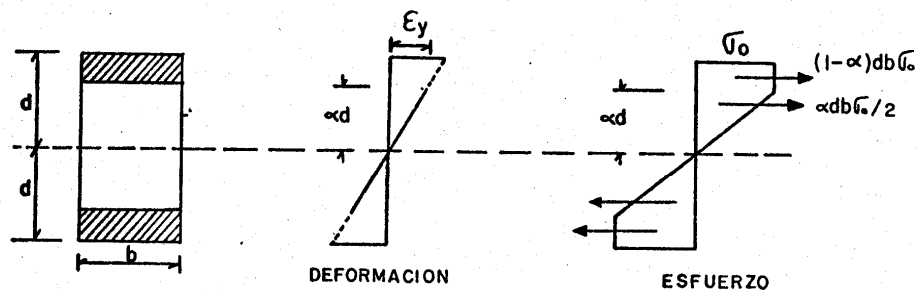


Fig.4 diagramas de esfuerzo y deformación  
la máxima deformación elástica es:

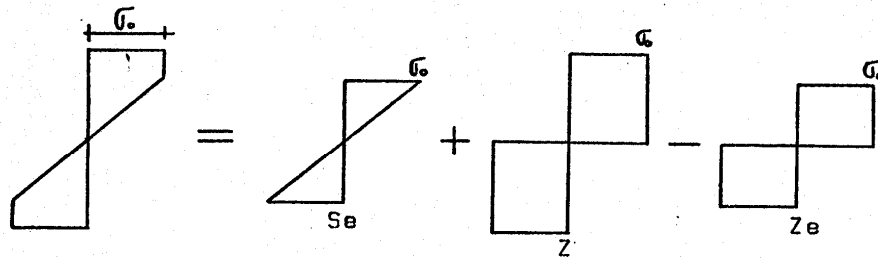
$$\xi = \frac{\sigma_0}{E}$$

y tenemos que:

$$\tan\phi = \phi = \frac{\epsilon}{\alpha d} \quad \phi = \frac{\sigma_0}{E\alpha d}$$

relación que nos proporciona la curvatura para cualquier valor de  $\alpha d$ .

Partiendo de la distribución de esfuerzos de la figura anterior, podemos llegar a obtener el momento con sólo integrar las áreas de esfuerzo en esa etapa dada, así, para facilitar el cálculo, se desglosará de la siguiente manera:



por lo que el momento será:

$$M = \sigma_0 S_e + \sigma_0 Z - \sigma_0 Z_e \quad \text{donde:}$$

$S_e$  = Módulo de sección de la porción que permanece elástica

$Z$  = Módulo plástico de toda la sección transversal

$Z_e$  = Módulo plástico de la sección que permanece elástica.

Factorizando:

$$M = \sigma_0(Z_p + S_e) \quad \text{donde } Z_p = Z - Z_e$$

$$Z_e = 2b\alpha d \frac{\alpha d}{2} = b(\alpha d)^2$$

$$S_e = \frac{b(2\alpha d)^3}{6} = \frac{2}{3}b(\alpha d)^3 = \frac{2}{3}Z_e$$

$$Z = bd^2$$

De aquí se puede llegar a conocer el momento resistente de la viga y queda definido por la siguiente ecuación:

$$M = M_r = \sigma_0 \left( \frac{2}{3}b\alpha d^3 \right) + \sigma_0 bd^2 - \sigma_0 b\alpha d^3$$

$$M = M_r = bd^2 \sigma_0 \left( 1 - \frac{b\alpha d^2}{3} \right)$$

ahora bien, desarrollando llegamos a obtener:

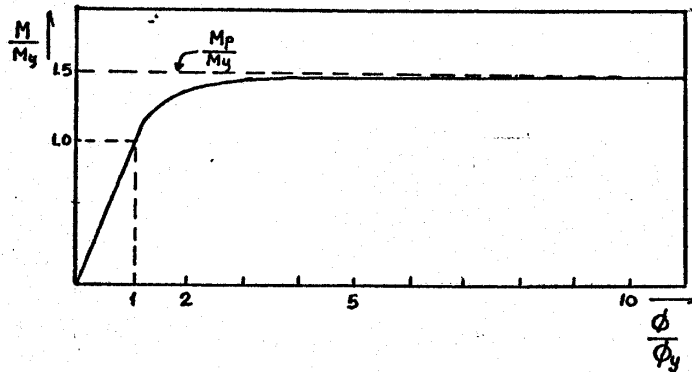
$$\frac{M}{M_y} = \frac{Z}{S} = \frac{bd^2}{\frac{2}{3}bd^3} = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\phi_y^2}{\phi^2} \right)$$

y sustituyendo  $\alpha d = d$  ;  $\phi = \phi_y$  ;  $Z = bd^2$  ;  $S = \frac{2}{3}bd^3$

obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \right\}$$

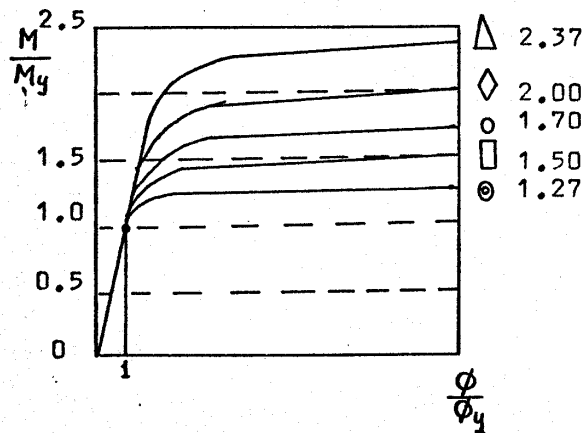
con la cual podemos trazar la curva adimensional  $M$ - para una viga de sección transversal rectangular. La siguiente figura nos muestra los puntos obtenidos.



Relación adimensional  $M-\phi$  para una viga de sección rectangular.

En ésta sección analizada, nótese que se tiene un 50% de reserva a partir del límite elástico.

Siguiendo procedimientos similares, podemos llegar a encontrar la relación  $M - \phi$  para cualquier sección que se desee. A continuación se presenta una gráfica con relaciones  $M - \phi$  para diferentes perfiles.



Relación  $M-\phi$  para varios perfiles comerciales.

Otro concepto muy importante es el de factor de forma ( $f$ ), que viene siendo la relación del momento plástico al momento de fluencia y nos representa el incremento ó reserva de resistencia después del límite elástico. El factor de forma está definido pues, de la siguiente manera:

$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{\sigma_y Z}{\sigma_y S} = \frac{Z}{S}$$

para el caso de la sección rectangular tenemos:

$$Z = bd^2/4 \quad ; \quad S = bd^2/6$$

$$f = \frac{Z}{S} = \frac{6bd^2}{4bd^2} = 1.5$$

como se aprecia en las figuras 5 y 6.

Habiendo quedado anteriormente definidos conceptos tales como,  $f$ ,  $M_p$ , ductilidad de acero, etc., sólo queda por definir lo que representa una articulación plástica para poder tener una idea general de los conceptos fundamentales de la teoría simple del análisis plástico.

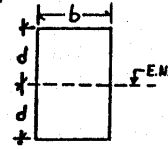
#### 2.4) ARTICULACION PLASTICA

) Este concepto se puede visualizar más fácilmente, por medio de un ejemplo en el que podamos observar también, la longitud de desarrollo de la articulación plástica, para el caso dado.

Si tenemos una viga simplemente apoyada, de longitud  $2L$ , como en la Fig.7, la cual soporta una carga concentrada  $P$  en el medio del claro y ésta estará continuamente incrementándose, desde cero hasta ocasionar el

colapso de la viga. El momento en cualquier sección de la viga queda definido por la siguiente ecuación:

$$M = M_p \left( 1 - \frac{X}{L} \right)$$



Si tomamos el origen en el centro del claro y sabemos que la ecuación que define el momento resistente para una viga de sección rectangular es:

$$M_R = b d^2 \sigma_0 \left( 1 - \frac{1\alpha^2}{3} \right) \quad \text{donde: } b d^2 \sigma_0 = M_p$$

$$M_R = M_p \left( 1 - \frac{1\alpha^2}{3} \right)$$

igualando:  $M_p \left( 1 - \frac{1\alpha^2}{3} \right) = M_p \left( 1 - \frac{X}{L} \right)$ ,

obtenemos:  $\alpha = \sqrt{\frac{3X}{L}}$  ; ecuación que nos define la forma y longitud de la articulación plástica.

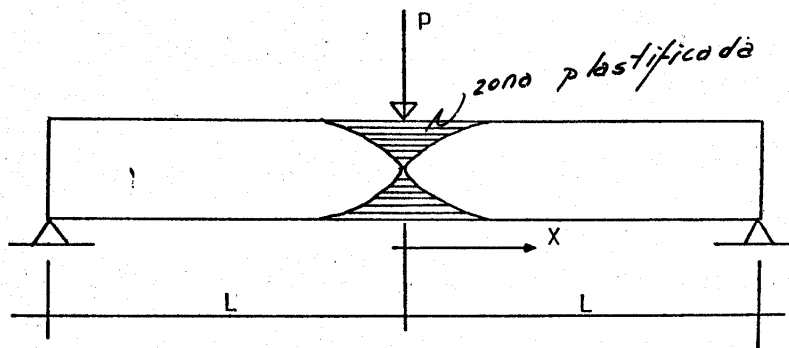


Fig.7. Articulación plástica.

## 2.5) FACTORES DE CARGA

Una estructura deberá ser siempre diseñada con un cierto rango de seguridad, con el objeto primordial de que ésta no llegue a ser sobrecargada, pero también, con la doble finalidad de asegurarse de incertidumbres tales como: calidad de la mano de obra, esfuerzos residuales, errores en el diseño ó fabricación, etc.

Por éstos motivos se presentarán los factores de carga, que deberán ser aplicados a las cargas de servicio con la intención de que la estructura permanezca estable.

En Diseño Plástico, las cargas utilizadas son las cargas últimas, como se describe a continuación:

$P_u = F P_s$  donde,  $P_u$  = carga última

$F$  = factor de carga

$P_s$  = carga de servicio.

Las dos diferentes formas que se tendrán que analizar al diseñar una estructura, son las siguientes:

1o. Carga muerta ( $C_m$ ) + carga viva ( $C_v$ ) a las que se les deberá de aplicar un factor de carga de 1.70, esto es:  
 $(C_m + C_v)1.70 =$  carga de diseño.

2o.  $C_m + C_v +$  Viento + Sismo; a las que se les deberá de aplicar un factor de carga de 1.3, ó sea:

$(C_m + C_v +$  Viento + Fuerzas Sísmicas) $1.3 =$  carga de diseño.