II. - METODO DE LOS PROMEDIOS MOVILES.

Una de las técnicas usadas para el cálculo de pronósticos es - el Método de los Promedios Móviles. Este método consiste esencialmente en calcular un valor promedio en base a los datos históricos de que - se disponga, y utilizar este valor como pronóstico para un período en el- futuro.

El método parte de la base de que hay un patrón básico de comportamiento en los valores de las variables a ser pronosticadas y que las observaciones históricas que se tienen, representan tanto a este modelo básico de comportamiento como a fluctuaciones aleatorias.

Para eliminar la aleatoriedad de los datos obtenidos hay que -- considerar el promedio de los últimos valores observados, y usarlo como pronóstico para un período próximo. El número de observaciones que se - habrán de utilizar en este promedio se especifica de antemano y perma-- nece constante.

El término de "Promedios Móviles" se utiliza porque con cada nueva observación de que se dispone, se puede calcular un nuevo promedio que se puede usar como pronóstico.

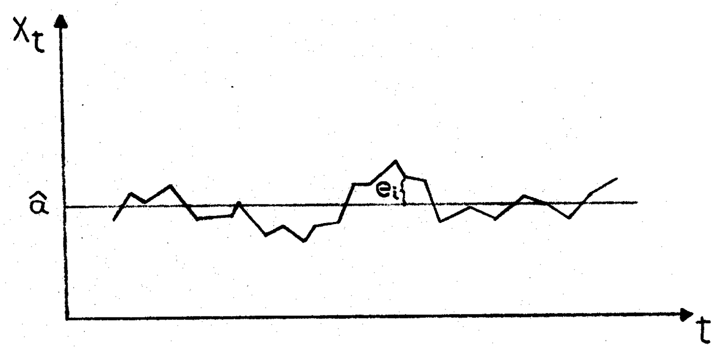
Una de las características de este método es que antes de hacer cualquier pronóstico, se deben tener tantos datos anteriores como se va-- yan a necesitar en el promedio que se va a calcular, o sea, N datos. Así, si se usa un promedio móvil de 5 semanas, el primer pronóstico que se - podrá hacer será para la sexta semana. Además, da igual importancia a los datos que se utilizan para calcular el pronóstico, o sea, los últimos N datos, y no da importancia alguna a los datos anteriores a estos.

a) PROMEDIOS MOVILES PARA PROCESOS CONSTANTES.

Considerando una serie de tiempos generada por un proceso constante, y un error aleatorio e, nuestro modelo de pronóstico es

$$X_t = a + e_t \qquad (1)$$

donde e_t es una variable aleatoria tal que su valor esperado y su variancia son: $E[e_t]=0$ y $V[e_t]=\sigma_e^2$, y a es un parámetro desconocido. Es posible que a tome valores diferentes para partes en la secuencia de tiempos que estén muy separadas, pero para cualquier segmento de tiempo en particular a es una constante.



$e_t = x_t$

Para pronosticar futuros valores se debe estimar el parámetro desconocido a. Suponiendo que se tienen disponibles todas las observaciones a través de un período de tiempo $(x_1, x_2, \ldots, x_T)$ y, asignándoles un mismo valor a todas, con el criterio de los Mínimos Cuadrados se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum_{t=1}^{T} e_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \hat{a})^2$$

Derivando con respecto al parámetro desconocido $\hat{a}$, e igualando a cero para encontrar el valor que minimice la expresión, nos queda

$$\frac{d\sum_{t=1}^{T} e_t^2}{d\hat{a}} = 2\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{a})(-1) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} X_t = \sum_{t=1}^{T} \hat{a} = T \cdot \hat{a}$$

De donde

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t}{T}$$

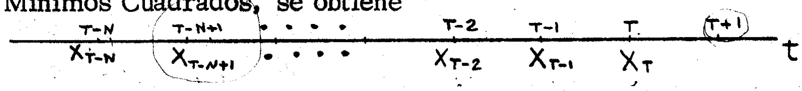
Por lo tanto

$$P_{T+1} = \hat{a} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t}{T} \qquad (2)$$

Que es la media aritmética de T valores.

Esta expresión nos sirve para calcular pronósticos dándole -- un mismo valor o peso a cada una de las observaciones anteriores.

Ahora, debido a que el valor de $\hat{a}$ cambia a través del tiempo, y siguiendo el criterio de los Promedios Móviles, es razonable dar un mayor valor a las observaciones mas recientes, y no tomar en cuenta a observaciones que por ser ya muy antiguas, sean obsoletas. Asi, tomando en cuenta solo las N observaciones mas recientes y siguiendo el criterio de los Mínimos Cuadrados, se obtiene



$$\sum_{t=T-N+1}^{T} e_t^2 = \sum_{t=T-N+1}^{T} (X_t - \hat{a})^2$$

Derivando con respecto a $\hat{a}$ e igualando a cero para minimizar

$$\frac{d \sum_{t=T-N+1}^{T} e_t^2}{da} = 2 \sum_{t=T-N+1}^{T} (X_t - \hat{a})(-1) = 0$$

$\tau = N$?

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} X_t = \sum_{t=T-N+1}^{T} \hat{a} = N \cdot \hat{a}$$

De donde

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=T-N+1}^{T} X_t}{N}$$

Por lo tanto

$$P_{T+1} = \hat{a} = \frac{\sum_{t=T-N+1}^{T} X_t}{N} \qquad (3)$$

Ahora, si

$$P_T = \frac{\sum_{t=T-N}^{T-1} X_t}{N}$$

y si

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} X_t = \sum_{t=T-N}^{T-1} X_t + X_T - X_{T-N}$$

la expresión de P_{T+1} nos quedaría

$$P_{T+1} = \frac{\sum_{t=T-N}^{T-1} X_t}{N} + \frac{X_T - X_{T-N}}{N}$$

$$P_{T+1} = P_T + \frac{X_T - X_{T-N}}{N} \qquad (4)$$

donde P_T es el pronóstico anterior (hecho para el período actual), X_T es la observación real que se tuvo, la cual se agrega al nuevo pronóstico, y X_{T-N} es la observación mas antigua que se tenía, la cual es descartada. - Asi, el número de datos N que se toman en cuenta, se mantiene constante, y los pronósticos que se van obteniendo se calculan en base a los últimos-valores observados.

EJEMPLO. -

La demanda un cierto tipo de bolsa de polietileno durante las -- últimas seis semanas ha sido (en kilogramos):
X_1= 200, X_2=250, X_3= 230, X_4= 200, X_5= 210, X_6= 170
usando la expresión (3) y con una N=6, tenemos que

$$P_{T+1} = P_{6+1} = P_7 = \frac{200 + 250 + 230 + 200 + 210 + 170}{6} = \frac{1260}{6} = 210$$

El pronóstico de demanda para la séptima semana es P_7=210 Kgs.

Si resultó que en la séptima semana la demanda fué de 230 Kgs., el pronóstico para la octava semana será

$$P_{7+1} = P_8 = \frac{\sum_{t=7-6+1}^{T=7} X_t}{6} = \frac{250 + 230 + 200 + 210 + 170 + 230}{6} = \frac{1290}{6}$$

$$P_8 = 215 \text{ Kgs.}$$

O también, usando (4)

$$P_{7+1} = P_8 = P_7 + \frac{X_7 - X_{7-6}}{6} = 210 + \frac{230-200}{6}$$

$$P_8 = 210 + \frac{30}{6} = 210 + 5 = 215$$

$$P_8 = 215 \text{ Kgs}$$

El pronóstico para la octava semana es P_8=215 Kgs.

Como se notará, una vez calculado el primer pronóstico, al calcular el siguiente, se agregó la nueva observación (demanda de la séptima semana), y se descartó la última observación (demanda de la primer semana).

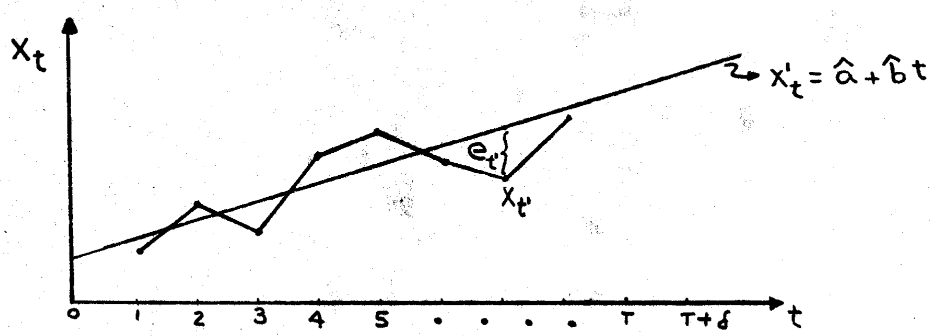
La conducta de éste método está en función del número de observaciones a tomar en cuenta (N). Si N es grande, el promedio móvil reaccionará lentamente a cambios en el parámetro a, y si N es pequeña reaccionará rápidamente. Por ejemplo, un proceso opera con un parámetro $a=a_1$, y de pronto cambia a $a=a_2$, tomará N observaciones al promedio móvil para dar pronósticos que sean consistentes con el nuevo valor de a. Sin embargo, si los errores aleatorios son variables aleatorias independientes, la variancia de los siguientes pronósticos será σ_e^2/N, asi que para N pequeñas la variancia de los siguientes pronósticos será relativamente grande. Por eso, cuando se tenga la certeza de que el proceso es constante se recomienda usar una N grande, y cuando el proceso esté cambiando, es preferible usar una N pequeña.

b) PROMEDIOS MOVILES PARA PROCESOS ~~CON TENDENCIAS~~.

Considerando una serie de tiempos generada por un proceso - con tendencia, y un error aleatorio e, el siguiente modelo puede adecuadamente ser aplicado:

$$X_t = a + bt + e_t \qquad (5)$$

donde a y b son parámetros desconocidos, y e es una variable aleatoria tal que su valor esperado y su variancia son: $E[e_t]=0$ y $V[e_t]=\sigma_e^2$



Para estimar los parámetros desconocidos a y b, se usará el criterio de los Mínimos Cuadrados y se tomarán en cuenta solo las - últimas N observaciones mas recientes (promedios móviles), asi, obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} e_t^2 = \sum_{t=T-N+1}^{T} (X_t - \hat{a} - \hat{b}t)^2 \qquad (6)$$

Para encontrar los valores de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ que minimicen esta expresión, la derivamos con respecto a estos parámetros desconocidos e- igualamos a cero cada expresión, quedándonos:

$$\frac{\partial \sum_{t=T-N+1}^{T} e_t^2}{\partial \hat{a}} = 2 \sum_{t=T-N+1}^{T} (X_t - \hat{a} - \hat{b}t)(-1) = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \sum_{t=T-N+1}^{T} e_t^2}{\partial \hat{b}} = 2\sum_{t=T-N+1}^{T}(X_t - \hat{a} - \hat{b}t)(-t) = 0 \qquad (8)$$

de donde se obtiene

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} X_t = \sum_{t=T-N+1}^{T} \hat{a} + \sum_{t=T-N+1}^{T} \hat{b}\,t \qquad (9)$$

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} t\cdot X_t = \sum_{t=T-N+1}^{T} \hat{a}\,t + \sum_{t=T-N+1}^{T} \hat{b}\,t^2 \qquad (10)$$

y si tenemos que (utilizando series)

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} t = \frac{N}{2}(2T+1-N)$$

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} t^2 = \frac{N}{6}\left[(N-1)(2N-1) + 6T(T+1-N)\right]$$

de la ecuación (9) obtenemos

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} X_t = N\hat{a} + \frac{N}{2}(2T+1-N)\hat{b} \qquad (11)$$

y de la ecuación (10) obtenemos

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} t\cdot X_t = \frac{N}{2}(2T+1-N)\hat{a} + \frac{N}{6}\left[(N-1)(2N-1) + 6T(T+1-N)\right]\hat{b} \qquad (12)$$

En este punto, tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, -- con lo que se puede resolver el sistema. Sin embargo, las expresio-- nes son algo complejas, por lo que para simplificar los cálculos, se - moverá el origen al centro de los datos, esto es, de $t=0$ a $t=\bar{t}$, donde

$$\bar{t} = \frac{\sum_{t=T-N+1}^{T} t}{N} = \frac{1}{N}\cdot\frac{N}{2}(2T+1-N) = T - \frac{N-1}{2}$$

Asi, hacemos la siguiente transformación:

$$t' = t - \bar{t} = t - \left[T - \frac{N-1}{2}\right]$$

donde t' es en el nuevo origen el equivalente de t (del origen anterior). Por lo que el nuevo valor de T, que es el límite superior de la sumatoria, con respecto al nuevo origen será:

$$t' = T - \bar{t} = T - \left[T - \frac{N-1}{2}\right] = \frac{N-1}{2}$$

o sea

$$T = \frac{N-1}{2}$$

Sustituyendo el nuevo valor de T en las ecuaciones (11) y (12); de la ecuación (11) obtenemos:

$$\sum_{t'=\frac{N-1}{2}-N+1}^{\frac{N-1}{2}} X_{t'} = N\hat{a}' + \frac{N}{2}\left[2\left(\frac{N-1}{2}\right) + 1 - N\right]\hat{b}'$$

$$\sum_{t'=\frac{N-1-2N+2}{2}}^{\frac{N-1}{2}} X_{t'} = N\hat{a}' + \frac{N}{2}(N-1+1-N)\hat{b}' = N\hat{a}' + (0)\hat{b}'$$

$$\sum_{t'=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{N-1}{2}} X_{t'} = N \cdot \hat{a}'$$

de donde

$$\hat{a}' = \frac{\sum_{t'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} X_{t'}}{N}$$

y si notamos que

$$\sum_{t'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} X_{t'} = \sum_{t=T-N+1}^{T} X_t$$

los valores del lado izquierdo de la igualdad son los mismos que los del lado derecho, obtenemos

$$\hat{a}' = \frac{\displaystyle\sum_{t'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} X_{t'}}{N} = \frac{\displaystyle\sum_{t=T-N+1}^{T} X_t}{N} \qquad (13)$$

y de la ecuación (12) obtenemos:

$$\sum_{t'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} t' \cdot X_{t'} = \frac{N}{2}\left[2\left(\frac{N-1}{2}\right)+1-N\right]\hat{a}' + \frac{N}{6}\left[(N-1)(2N-1)+6\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}+1-N\right)\right]\hat{b}'$$

$$= \frac{N}{2}\left[N-1+1-N\right]\hat{a}' + \frac{N}{6}\left[2N^2-N-2N+1+(3N-3)\left(\frac{N}{2}-\frac{1}{2}+1-N\right)\right]\hat{b}'$$

$$= (0)\hat{a}' + \frac{N}{6}\left[2N^2-3N+1+(3N-3)\left(-\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]\hat{b}'$$

$$= (0)\hat{a}' + \frac{N}{6}\left[2N^2-3N+1-\frac{3N^2}{2}+\frac{3N}{2}+\frac{3N}{2}-\frac{3}{2}\right]\hat{b}'$$

$$= \frac{N}{6}\left[\frac{N^2}{2}-3N-\frac{1}{2}+3N\right]\hat{b}'$$

$$= \frac{N}{6}\left[\frac{N^2}{2}-\frac{1}{2}\right]\hat{b}' = \frac{N}{6}\left[\frac{N^2-1}{2}\right]\hat{b}'$$

$$\sum_{t'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} t' \cdot X_{t'} = \frac{N(N^2-1)}{12}\hat{b}'$$

pasan dividiendo [illegible] multiplicando a $\hat{b}'$

$45 = \frac{4x}{2}\hat{b}'$ $\quad \left(\frac{2}{4x}\right)45 = \hat{b}'$

$45 = \frac{1}{2}x\,\hat{b}$ $\quad \left(\frac{1}{2}x\right)45 = b' = 22.5x = b'$

$45 \ldots \; 22.5x = \hat{b}'$

de donde

$$\hat{b}' = \frac{12}{N(N^2-1)} \sum_{t'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} t' \cdot X_{t'}$$

y como

$$\sum_{t'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} X_{t'} = \sum_{t=T-N+1}^{T} X_t$$

vemos que

$$\hat{b}' = \frac{12}{N(N^2-1)} \left[-\frac{N-1}{2} X_{T-N+1} - \frac{N-3}{2} X_{T-N+2} - \cdots + \frac{N-3}{2} X_{T-1} + \frac{N-1}{2} X_T \right] \quad (14)$$

Una vez que se han obtenido los primeros valores de $\hat{a}'$ y $\hat{b}'$, es posible obtener los siguientes de manera recursiva, con lo que nos -- quedan las siguientes expresiones:

$$\hat{a}'_T = \hat{a}'_{T-1} + \frac{1}{N}(X_T - X_{T-N}) \qquad (15)$$

y

$$\hat{b}'_T = \hat{b}'_{T-1} + \frac{12}{N(N^2-1)} \left[\frac{N-1}{2} X_T + \frac{N+1}{2} X_{T-N} - N \cdot \hat{a}'_{T-1} \right] \qquad (16)$$

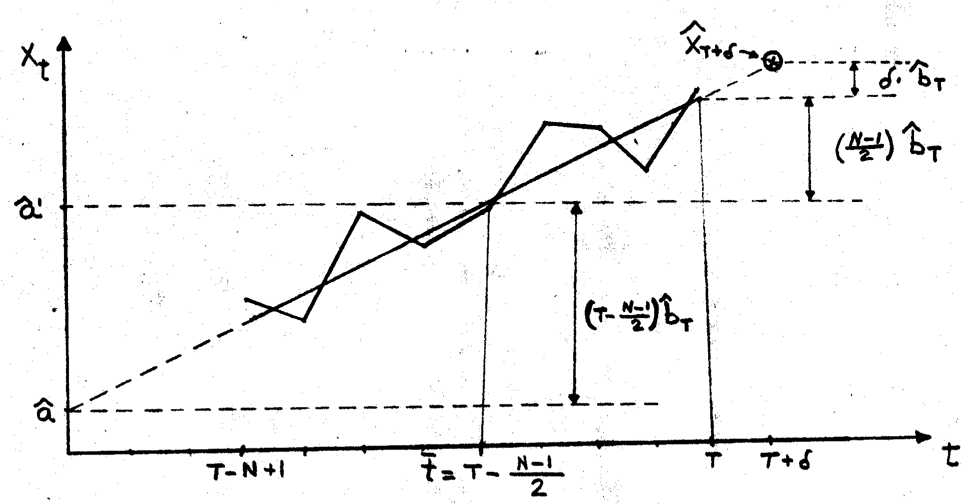
Asi, para pronosticar para δ períodos, nuestro modelo queda de la siguiente manera:

$$P_{T+\delta} = \hat{a}' + \hat{b}' \left[T + \delta \right] \qquad (17)$$

y como $T = \frac{N-1}{2}$ en el nuevo origen, la expresión final nos queda asi:

$$P_{T+\delta} = \hat{a}' + \hat{b}' \left[\frac{N-1}{2} + \delta \right]$$

Para ilustrar este proceso tenemos la siguiente figura:



Aqui vemos que el promedio móvil $\hat{a}'_T$ se queda rezagado con-respecto a la demanda esperada en el período T, en una cantidad igual a $(\frac{N-1}{2})\hat{b}'_T$, entonces para pronosticar para el período T+δ, primero - actualizamos el promedio móvil $\hat{a}'_T$, agregándole la diferencia que - es el producto $(\frac{N-1}{2})\hat{b}'_T$ y entonces ya podemos extrapolar el valor para el período T+δ, agregando el producto de la pendiente $\hat{b}'_T$ por la - - distancia δ, o sea, $\delta \cdot \hat{b}'_T$, asi el pronóstico final queda expresado - de la siguiente manera:

$$P_{T+\delta} = \hat{a}'_T + \hat{b}'\left(\frac{N-1}{2}\right) + \hat{b}'(\delta)$$

$$P_{T+\delta} = \hat{a}'_T + \hat{b}'\left[\frac{N-1}{2} + \delta\right]$$

EJEMPLO. -

El número de rollos de poliestireno que se han vendido en las últimas cinco semanas es:

$X_1=30$, $X_2=33$, $X_3=36$, $X_4=34$, $X_5=37$

¿Cuál es el pronóstico de venta para la sexta semana?

Usando (13) y con una N=5, obtenemos

$$\hat{a}'_5 = \frac{\sum_{t=T-N+1}^{T} X_t}{N} = \frac{\sum_{t=1}^{5} X_t}{5} = \frac{30+33+36+34+37}{5} = \frac{170}{5} = 34$$

Usando (14)

$$\hat{b}'_5 = \frac{12}{5(5^2-1)}\left[-\frac{(5-1)}{2}(30) - \frac{5-3}{2}(33) - \frac{5-5}{2}(36) + \frac{5-3}{2}(34) + \frac{5-1}{2}(37)\right]$$

$$= \frac{12}{5(25-1)}\left[-\frac{4}{2}(30) - \frac{2}{2}(33) - 0(36) + \frac{2}{2}(34) + \frac{4}{2}(37)\right]$$

$$= \frac{12}{5(24)}\left[-60-33+34+74\right] = \frac{1}{10}(15) = 1.5$$

$$\hat{b}'_5 = 1.5$$

sustituyendo $\hat{a}'_5$ y $\hat{b}'_5$ en (17) y con una $\delta = 1$, obtenemos

$$P_{T+\delta} = P_{5+1} = 34 + 1.5\left[\frac{5-1}{2} + 1\right] = 34 + 1.5\left[\frac{4}{2} + 1\right]$$

$$P_6 = 34 + 1.5(3) = 34 + 4.5 = 38.5$$

$$P_6 = 38.5$$

El pronóstico de venta para la sexta semana es $P_6 = 38.5$ rollos.

Si en la sexta semana se vendieron 39 rollos, ¿Cuál es el pronóstico de venta para la séptima semana?

Utilizando las ecuaciones (15) y (16) tenemos:

$$\hat{a}'_6 = \hat{a}'_5 + \frac{1}{N}(X_6 - X_1) = 34 + \frac{1}{5}(39-30) = 34 + \frac{9}{5} = 34 + 1.8$$

$$\hat{a}'_6 = 35.8$$

y

$$\hat{b}'_6 = \hat{b}'_5 + \frac{12}{5(5^2-1)}\left[\frac{5-1}{2}X_6 + \frac{5+1}{2}X_1 - (5)\cdot\hat{a}'_5\right]$$

$$\hat{b}'_6 = 1.5 + \frac{12}{5(24)}\left[\frac{4}{2}(39) + \frac{6}{2}(30) - 5(34)\right]$$

$$= 1.5 + \frac{1}{10}\left[78 + 90 - 170\right] = 1.5 + \frac{1}{10}(-2) = 1.5 - 0.2$$

$$\hat{b}'_6 = 1.3$$

Sustituyendo $\hat{a}'_6$ y $\hat{b}'_6$ en (17) y con una $\delta = 1$

$$P_{6+1} = P_7 = 35.8 + 1.3\left[\frac{5-1}{2} + 1\right] = 35.8 + 1.3(2+1) = 35.8 + 1.3(3)$$

$$P_7 = 35.8 + 3.9 = 39.7$$

$$P_7 = 39.7$$

El pronóstico de venta para la séptima semana es

$P_7 = 39.7$ rollos.