CAPITULO 4.

REDUCCION DEL NUMERO DE VARIABLES DE UN PROBLEMA USANDO ANALISIS DIMENSIONAL

4.1.- INTRODUCCION.-

En este capítulo se presenta un procedimiento para la obtención de parámetros adimensionales basado en el teorema de Buckingham-Vaschy, así como una serie de problemas en los que se aplica dicho procedimiento y se explica la forma de realizar el experimento para algunos de ellos.

4.2.- CARACTERISTICAS DE UN PARAMETRO ADIMENSIONAL.-

Se llama parámetro adimensional a toda variable sin dimensiones, es decir, aquellas variables en las que los exponentes X, Y, y Z de la ec. (2.2) son iguales a cero:

$$[A] = [M^0 L^0 T^0] = [1] \quad \text{--------(4.1)}$$

Para indicar que una variable, no tiene dimensiones se puede utilizar la notación $[1]$; como ejemplo de lo anterior, verificaremos si la variable $\mathbb{R}$ dada por:

$$\mathbb{R} = \frac{V L}{\nu}$$

Es un parámetro adimensional. Donde V, es velocidad, L longitud y ν viscocidad cinemática; las dimensiones de cada una de estas variables y de otras más, las podemos ver en la tabla 4.1

Así tenemos que V tiene dimensiones $[LT^{-1}]$, L dimensiones de -

Variable	Símbolo	Dimensiones	
		MLT	FLT
Características geométricas			
longitud	L	L	L
perímetro mojado	P_m	L	L
área	A	L^2	L^2
volumen	$\forall$	L^3	L^3
Propiedades de los fluidos			
masa	m	M	FT^2L^{-1}
densidad	ρ	$M L^{-3}$	FT^2L^{-4}
peso específico	γ	$M L^{-2}T^{-2}$	FL^{-3}
viscosidad cinemática	ν	$L^2 T^{-1}$	L^2T^{-1}
viscosidad dinámica	μ	$M L^{-1}T^{-1}$	$F T L^{-2}$
módulo de elasticidad volumétrico u elástico	$E_\forall$	$M L^{-1}T^{-2}$	$F L^{-2}$
tensión superficial	σ	$M T^{-2}$	$F L^{-1}$
Características del flujo			
velocidad	V	$L T^{-1}$	$L T^{-1}$
aceleración	a	$L T^{-2}$	$L T^{-2}$
presión	p	$M L^{-1}T^{-2}$	$F L^{-2}$
fuerza	F	$M L T^{-2}$	F
esfuerzo cortante	τ	$M L^{-1}T^{-2}$	$F L^{-2}$
gasto	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
trabajo, energía	W, E	$M L^2T^{-2}$	FL
momento	M	$M L^2T^{-2}$	FL
potencia	P	$M L^2T^{-3}$	FLT^{-1}
impulso	I	$M L T^{-1}$	FT
Otras			
ángulo	α	ninguna	ninguna
pendiente	S	ninguna	ninguna
velocidad angular, frecuencia	ω, f	T^{-1}	T^{-1}
velocidad del sonido	c	LT^{-1}	LT^{-1}
aceleración de la gravedad	g	LT^{-2}	LT^{-2}
tiempo	t	T	T
temperatura*	T	θ	θ
calor específico	c_p, c_v	$L^2 T^{-2}\theta^{-1}$	$L^2 T^{-2}\theta^{-1}$
transporte de sedimento, en peso	G_s	$M L T^{-3}$	$F T^{-1}$
transporte de sedimento, en vol	Q_s	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
peso	W	$M L T^{-2}$	F

* La dimensión θ está referida a la dimensión de temperatura

TABLA 4.1 DIMENSIONES DE LAS VARIABLES FISICAS UTILIZADAS EN HIDRAULICA

(REF. 8)

$[L]$ y ν $[L^2T^{-1}]$, por lo tanto:

$$\mathbb{R} = \frac{[L\,T^{-1}]\,[L]}{[L^2\,T^{-1}]} = [1]$$

Esto significa que la variable ($\mathbb{R}$) no tiene dimensiones, o sea es un parámetro adimensional. A esta variable se le conoce con el nombre de Número de Reynolds.

Como el número de Reynolds, existen varios parámetros adimensionales útiles en hidráulica, tales como el número de Weber, el número de Euler, etc., los cuales se pueden ver en la tabla 4.2- en la que se presenta breve información acerca de cada uno de ellos.

En todo problema la etapa mas dificil es identificar las variables que intervienen, las cuales podrán ser variables dependientes e independientes.

4.3.- MATRIZ DE LOS EXPONENTES.-

Si se colocan en un renglón las variables que intervienen en un problema y en una columna las unidades de referencia, se podrá construir la matríz de los exponentes colocando en cada cruce de renglón y columna el exponente de la unidad de referencia correspondiente, obteniéndose así la llamada "Matriz de los exponentes"

Para su mejor comprensión presentamos el siguiente ejemplo:

Si en un problema físico intervienen las variables longitud (L), gasto (Q), velocidad (V) y densidad (ρ); en función de las unidades de referencia masa (M), longitud (L) y tiempo (T), la ma--

triz de los exponentes nos quedará:

	L	Q	V	ρ
M	0	0	0	1
L	1	3	1	-3
T	0	-1	-1	0

Símbolo	Nombre	Expresión	Variable de mayor significancia	Problema en que interviene
R	Reynolds	$\frac{VL}{\nu}$, $\frac{\rho n D^2}{\mu}$	Viscosidad	Flujo laminar, fricción; conductos a presión
F	Froude	$\frac{V}{\sqrt{gL}}$	Gravedad	Escurrimiento a superficie libre; ondas
M	Mach	$\frac{V}{C}$	Velocidad del sonido dentro del fluido	Flujo compresible; ondas de Mach; ondas de choque
E	Euler	$\frac{\rho V^2}{\Delta p}$, $\frac{\Delta h}{V^2/2g}$	Presión	Cavitación; empujes
W	Weber	$\frac{\rho L V^2}{\sigma}$	Tensión superficial	Ondas capilares
C	Cauchy	$\frac{\rho V^2}{E}$	Compresibilidad	Ondas de choque
S	Strouhal	$\frac{fL}{V}$	Periodicidad	Formación de vórtices; movimiento de ondas
τ_*	Shields	$\frac{R_H S}{\Delta D} = \frac{\tau}{(\gamma_s-\gamma)D}$	Esfuerzo cortante sobre el fondo	Inicio y transporte de sedimentos*
ϕ_E	Einstein (función de transporte)	$\frac{g_B}{\gamma_s (g \Delta D^3)^{1/2}}$	Transporte de sedimentos	Cuantificación del arrastre*

* Los números de Shields y Einstein se han incluido como ejemplo de parámetros adimensionales de utilida en Hidráulica fluvial, campo en el que existen otros parámetros igualmente importantes. Algo similar s presenta en Hidráulica marítima pero no se incluyen para no aumentar considerablemente la tabla.

V, velocidad; L, longitud característica; ρ, masa específica (densidad) del fluido; σ, tensión superfici del fluido; Δp, presión; C, velocidad del sonido en el fluido; E, módulo de elasticidad; f, frecuencia; R_H, radio hidráulico; S, pendiente hidráulica; Δ densidad relativa sumergida de las partículas de sedimento; D, diámetro representativo de los sedimentos; g_B, gasto de arrastre en la capa de fondo; γ_s, peso específico de las partículas; Δh, carga de presión; n, velocidad angular.

TABLA 4.2 NUMEROS ADIMENSIONALES UTILIZADOS COMUNMENTE EN HIDRAULICA.-

4.4.- RANGO DE LA MATRIZ DE LOS EXPONENTES.-

El rango (r) de la matríz de los exponentes será el orden de la mayor matríz cuadrada cuyo determinante sea diferente de cero. Este rango nos determina la independencia que existe entre las ecuaciones formadas por los exponentes para cada unidad de referencia, tomando en cuenta que se pretende obtener una combinación de productos de potencias cuyo exponente final sea cero para cumplir con la adimensionalidad; para el ejemplo anterior tenemos que su rango es 3, tomando las tres últimas columnas:

$$\text{DET} = 0 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Como el rango (r) es 3, esto significa que tendremos un sistema de ecuaciones por resolver formado por 3 ecuaciones independientes.

4.5.- TEOREMA DE BUCKINGHAM-VASCHY.-

El teorema básico que permite reducir el número de variables de un problema es el teorema de Buckingham-Vaschy o teorema π, el cual toma en cuenta el número de variables "m" y el rango de la matríz de los exponentes "r", enunciándose de la siguiente manera:

" Si se tiene una función que relaciona "m" variables X:

$$F\ (\ X_1\ ,\ X_2\ ,\ \ldots,\ X_m\ ) = 0 \text{ ----- } (4.2)$$

Y "r" es el rango de la matríz de los exponentes de las variables X; existirá otra función:

$$f(\pi_1 . \pi_2 . . . . \pi_{m-r}) = 0 \qquad \text{———(4.3)}$$

Donde π_i son parámetros adimensionales."

Esto es, en un problema físico en el que intervienen "m" varia-- bles se desconoce inicialmente la función que las relaciona, pe- ro, con la ayuda del análisis dimensional es posible reducir la- cantidad de las Xm variables a m-r nuevas variables adimensiona- les, y mediante el experimento respectivo se podrá conocer la -- forma de la función.

Para pasar de la ecuación (4.2) a la (4.3) se necesita determi-- mar las π_i variables adimensionales, para lo cual hay varios - métodos. Uno de ellos es el método de Buckingham.

En nuestro caso aplicaremos el método tomado de la ref. 8 el -- cual se basa en algunas consideraciones del método de Buckingham más una serie de reglas que lo hacen mas ventajoso y rápido.

4.6.- METODO PARA DETERMINAR PARAMETROS ADIMENSIONALES.-

El método que aplicaremos para la determinación de parámetros - adimensionales lo dividiremos en pasos bien definidos.

4.6.1.- Se forma la matríz de los exponentes y se determina su - rango.

El número de parámetros adimensionales será:

$n = m - r$ - - - - - - - - - - -(4.4)

Donde "m" es el número de variables que intervienen en -

el problema y "r" es el rango de la mayor matríz cuadradada de los exponentes, de acuerdo con el método de Buckingham.

4.6.2.- Se buscará formar parámetros adimensionales ya conocidos como los que aparecen en la tabla 4.2,como ejemplo, si en un problema intervienen las variables velocidad (V), diámetro (D), densidad (ρ) y viscocidad dinámica (μ) se podrá formar el número Reynolds:

$$\pi_1 = \mathbb{R} = \frac{V D \rho}{\mu}$$

Como primera inspección para este paso se puede ver que si entre nuestras variables aparece viscocidad existe posibilidad de formar el número de Reynolds, o bién si aparece gravedad se podría formar el número de Froude, tomando en cuenta el resto de las variables.

4.6.3.- El siguiente paso consistirá en tomar en cuenta las variables que describen la geometría del problema y cuya dimensión es una longitud, así formaremos parámetros adimensionales dividiendo cada variable con unidades de longitud (L) entre cualquier longitud característica de otra variable en el problema.

Por ejemplo: si en un problema intervienen diámetro (D), longitud (L), y rugosidad (K), se podrán formar parámetros adimensionales de la siguiente forma:

$$\frac{L}{D}, \frac{K}{D}$$

Así mismo, si en el pròblema aparecen variables con las-mismas dimensiones se pueden formar parámetros adimensionales del tipo:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad etc.$$

4.6.4.- Si después de haber aplicado los pasos anteriores aún - quedaran parámetros adimensionales por determinar, será-necesario construir un sistema de ecuaciones homogéneas, una por cada unidad de referencia, en las que las incógnitas serán los exponentes "Yi" de las variables del -- problema y los coeficientes serán los respectivos ele -- mentos de la matríz de los exponentes.

De acuerdo con el método de Buckingham, cada parámetro - adimensional por obtener tendrá la forma:

$$\pi_i = X_1^{Y_1} X_2^{Y_2} \ldots X_m^{Y_m} \qquad i = 1, 2 \ldots (m-n) \quad --- (4.5)$$

El método se entenderá más facilmente resolviendo el siguiente ejemplo: Si consideráramos un problema donde -- intervienen las variables Gasto (Q), potencia (P), carga hidráulica (H), y peso específico (γ), cada parámetro -- adimensional tendrá la forma:

$$\pi_i = Q^{Y_1} P^{Y_2} H^{Y_3} \gamma^{Y_4}$$

En este caso existirá un solo parámetro adimensional --- considerando que la matríz de exponentes es de rango 3.

Matríz de exponentes:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & Q & P & H & \gamma \\
\hline
M & 0 & 1 & 0 & 1 \\
L & 3 & 2 & 1 & -2 \\
T & -1 & -3 & 0 & -2
\end{array}
$$

$$DET = -1\left[0 - 1(-1)\right] = -1 \neq 0$$

$r = 3$

Por lo tanto tendremos un sistema de 3 ecuaciones con 4- incógnitas:

Para M : $(0)Y_1 + (1)Y_2 + (0)Y_3 + (1)Y_4 = 0$

L : $(3)Y_1 + (2)Y_2 + (1)Y_3 - (2)Y_4 = 0$

T : $-(1)Y_1 - (3)Y_2 + (0)Y_3 - (2)Y_4 = 0$

$Y_2 + Y_4 = 0$ ----- (1)

$3Y_1 + 2Y_2 + Y_3 - 2Y_4 = 0$ ----- (2)

$-Y_1 - 3Y_2 - 2Y_4 = 0$ ----- (3)

Se puede observar que Y_1 representa el exponente de Q, Y_2 el de P, Y_3 el de H y Y_4 el de γ; y que cada unidad de - referencia generó una ecuación.

Para este sistema tendremos m-r soluciones, o sea 4-3=1,- existirá una solución que será el parámetro π_1,esta solución (Y_1 , Y_2, Y_3, Y_4) nos dará los exponentes a los que se debe elevar las variables del problema (Q,P,H,γ) para obtener el parámetro adimensional.

Para resolver el sistema de ecuaciones consideremos como escencial el hecho de que la variable dependiente aparezca en el numerador del parámetro adimensional y con exponente igual a uno, esto es con el fin de poder manejar - dicha variable con mayor facilidad en el parámetro resultante y evitar operaciones de potencias o radicales para los casos en que se desee despejar a la misma. Así podemos mencionar el número de Reynolds, el cual contiene a la variable dependiente "V" en el numerador y con exponente igual a 1.

$$Re = \frac{V\ L}{\nu}$$

Para el sistema en cuestión tendremos más incógnitas - (4) que ecuaciones (3), por lo tanto, es necesario asignar un valor a una de las incógnitas, para este caso obligaremos a que la variable dependiente (P) aparezca - en el numerador del parámetro adimensional, de preferencia con el exponente 1 esto es, $Y_2 = 1$, resolviendo el sistema de ecuaciones obtendremos:

$$Y_1 = -1 \qquad y_3 = -1 \qquad Y_4 = -1$$

Por lo tanto $\pi_1 = \frac{P}{QH\gamma}$ que es un parámetro adimensional.

Para el caso en que sea necesario determinar varios parámetros se deberán seguir ciertos criterios tales como:

a).- Si ninguno de los parámetros adimensionales formados con el procedimiento visto en los incisos 4.6.2 y 4.6.3. contiene la variable dependiente, se deberá obtener uno que si la contenga. Para esto se hace el exponente de la variable dependiente, digamos Y_1 igual a uno ($Y_1 = 1$) y se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener los valores de las demás incógnitas.

El sistema de ecuaciones se resolverá tantas veces como sea necesario para obtener el resto de parámetros adimensionales (ec. 4.4) determinado al inicio del problema; en estos parámetros se considerará $Y_1 = 0$, ya que es conveniente que la variable dependiente aparezca en un solo parámetro adimensional.

b).- Las variables que representan las propiedades del fluido excepto la densidad, tales como viscosidad, módulo de elasticidad, etc., deben aparecer en un sólo parámetro adimensional. Así un parámetro donde aparezcan viscosidad y módulo de elasticidad o viscosidad y tensión superficial debe evitarse.

c).- Hay que buscar parámetros que satisfagan ciertos criterios de sencilléz y naturalidad. Por ejemplo para el parámetro: $\pi_1 = \dfrac{Q^{1/3} H^{1/3} \gamma^{1/3}}{P^{1/3}}$

no se recomienda pues se puede simplificar elevando al cubo : $\pi_1^3 = \dfrac{Q H \gamma}{P}$

el cual es más sencillo y de fácil manejo.

d).-No deben aparecer demasiadas variables en un parámetro adimensional; generalmente intervienen 3 o 4 -- aunque hay algunos con más de 4.

e).-En los parámetros adimensionales deben estar todas - las variables del problema.

f).-Las variables que no tengan ninguna dimensión forman por sí mismo un parámetro adimensional, tal es el caso de ángulos, pendientes, etc.

4.7.- SOLUCION DE PROBLEMAS.-

1.- Determinar una expresión que permita obtener el tiempo "tp" o- período para un péndulo, en función de la longitud "L" y la -- gravedad "g" manteniendo el ángulo "Ø" constante (fig.4.7.1)

La relación entre las variables del problema se puede escribir como:

$$f\ (tp,\ L,\ g) = 0$$

ó: $$tp = f_2\,(L,g)$$

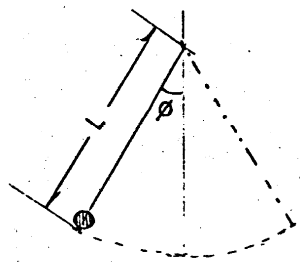


Fig. 4.7.1.

SOLUCION:

a).- MATRIZ DE EXPONENTES Y RANGO.-

La matríz de los exponentes, según inciso 4.3, nos queda:

	tp	L	g
M	0	0	0
L	0	1	1
T	1	0	-2

El rango (r) de esta matríz, de acuerdo al método visto - en el inciso 4.4, es igual a 2, ya que el determinante de la matríz $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ es distinto de cero.

El número de parámetros adimensionales, según inciso 4.6.1 será:

$$n=m-r = 3-2 = 1$$

Es decir, solo se tendrá un parámetro adimensional π_1 y de acuerdo a la ec. (4.3), la función se puede escribir como:

$$f(\pi_1) = 0 \text{ ------ } (4.6)$$

b).- DETERMINAR PARAMETROS ADIMENSIONALES CONOCIDOS QUE RELACIONE LAS VARIABLES, según inciso 4.6.2:

Tomando en cuenta las variables que intervienen en el problema y consultando la tabla 4.2, no se encuentra alguno que los relacione.

c).- FORMAR PARAMETROS ADIMENSIONALES DIVIDIENDO VARIABLES CON LAS MISMAS DIMENSIONES, según inciso 4.6.3:

Para este caso no existe dicha opción.

d).- RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES, según inciso 4.6.4:

El sistema de ecuaciones homogeneas que permitirá obtener el parámetro π_1 es:

$$\left.\begin{aligned} 0Y_1 + 0Y_2 + 0Y_3 &= 0 \\ 0Y_1 + Y_2 + Y_3 &= 0 \\ Y_1 + 0Y_2 - 2Y_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{-------}(4.7)$$

Donde Y_1 , Y_2 y Y_3 son los exponentes de las variables tp, L y g que define el parámetro π_1 , según la ec. (4.5).

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.7); tomando en cuenta que se tienen 2 ecuaciones y 3 incógnitas será necesario darle valor a una de ellas, como la variable dependiente, tp, se desea que aparezca en el numerador del parámetro π_1 y elevado al exponente uno, se asumirá $Y_1 = 1$, sustituyendo en la ec. (4.7) y resolviendo el sistema se tendrá:

$Y_1 = 1$

$Y_2 = -1/2$

$Y_3 = 1/2$

Por lo que el parámetro π_1 es:

$$\pi_1 = t_p\sqrt{g/L}$$

Verificando las dimensiones se tiene que:

$$t_p\sqrt{g/L} = \frac{[T]\,[L\,T^{-2}]^{1/2}}{[L]^{1/2}} = [1]$$

Por lo tanto si es adimensional.

De acuerdo con la ec. (4.6) tendremos:

$$f\left(t_p\sqrt{g/L}\right) = 0$$

O bién:

$$t_p\sqrt{g/L} = C$$

Finalmente:

$$t_p = C\sqrt{L/g}$$

EXPERIMENTO.-

Para este problema en particular realizamos el experimento respectivo con el fin de obtener el valor de "C", para el cual fué necesario el uso de un cordón unido a un cuerpo sólido en un extremo y el otro extremo se utilizó como --- vértice a un ángulo constante $\emptyset$ para obtener el movimiento similar al de un péndulo. La longitud "L" entre el vértice y el cuerpo sólido se varió tantas veces como pruebas realizamos tomándose el tiempo "tp" para cada período se tabularon los datos obtenidos y se aplicó la fórmula:

$$C=tp\sqrt{g/L}$$

Para cada una de las pruebas se obtuvo un valor de "C" cuyo promedio será el que satisfaga la ecuación.

$$tp=c\sqrt{L/g}$$

y podrá ser comparada con la fórmula utilizada comúnmente:

$$tp=2\pi\sqrt{L/g}$$

Prueba	L (cm)	N=Nº Ciclos	t(seg)	tp=t/N	$C=tp\sqrt{g/L}$
1	94	4	7.80	1.95	6.30
2	84	4	7.35	1.84	6.28
3	74	4	6.90	1.72	6.26
4	60	4	6.40	1.60	6.26
5	54	4	5.90	1.47	6.27

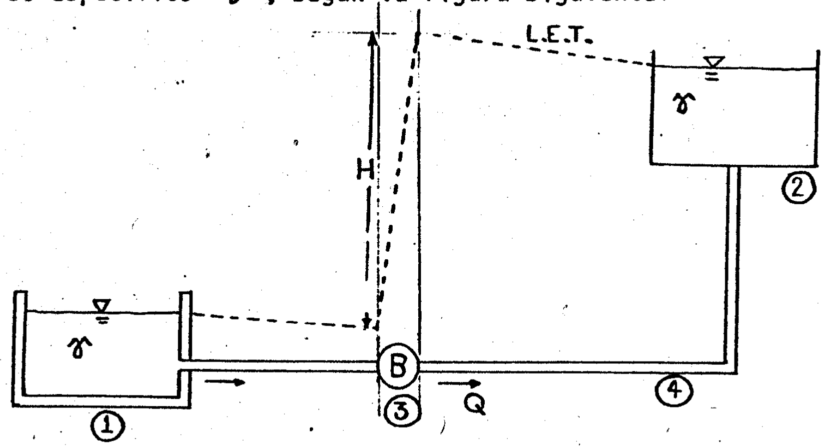
Nota: Se utilizó $\emptyset = 30°$.

$$\bar{C} = \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5}{5} = \frac{31.37}{5} =$$

$$\bar{C} = 6.274$$

$$tp = 6.274\sqrt{L/g}$$

2.- Determinar una expresión que permita obtener una relación entre el gasto "Q", la potencia "P", la carga hidráulica "H" y el peso específico "γ", según la figura siguiente:



Donde:

(1) y (2) son depósitos de almacenamiento

(3) - - - Bomba

(4) - - - Tubería de conducción.

L.E.T. Línea de energía totales

La relación de variables se puede escribir como:

$$f\ (Q,P,H,\gamma) = 0$$

O bién

$$P = F\ (Q,H,\gamma)$$

SOLUCION.

a).- MATRIZ DE LOS EXPONENTES Y RANGO.

La matríz de exponentes, según inciso 4.3, nos queda:

	Q	P	H	γ
M	0	1	0	1
L	3	2	1	-2
T	-1	-3	0	-2

Y su rango es:

$r=3$

El número de parámetros adimensionales será:

$n = m - r = 4 - 3 = 1$

Es decir, habrá un solo parámetro adimensional π_1, por lo que de acuerdo con la ec. (4.3) tendremos:

$f\ (\pi_1) = 0$ -------- (4.8)

b).- DETERMINAR PARAMETROS ADIMENSIONALES CONOCIDOS, QUE RELACIONEN LAS VARIABLES.

No existe alguno.

c).- FORMAR PARAMETROS ADIMENSIONALES DIVIDIENDO VARIABLES CON LAS MISMAS DIMENSIONES.

Para este caso no existe dicha opción.

d).- RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES.

El sistema se resolvió en el inciso 4.6.4, como parte de la teoría del método, obteniéndose los siguientes valores:

$Y_1 = 1$

$Y_2 = 1$

$Y_3 = -1$

$Y_4 = -1$

Por lo que el parámetro π_1 es:

$$\pi_1 = \frac{P}{Q\,H\,\gamma}$$

Verificando dimensiones:

$$\frac{[P]}{[Q][H][\gamma]} = \frac{[M\,L^2T^{-3}]}{[L^3T^{-1}][L][M\,L^{-2}\,T^{-2}]} = [1]$$

Por lo tanto si es adimensional.

De acuerdo con la ecuación (4.8) se tiene que:

$$f = \left(\frac{P}{Q\,H\,\gamma}\right) = 0$$

O bién;

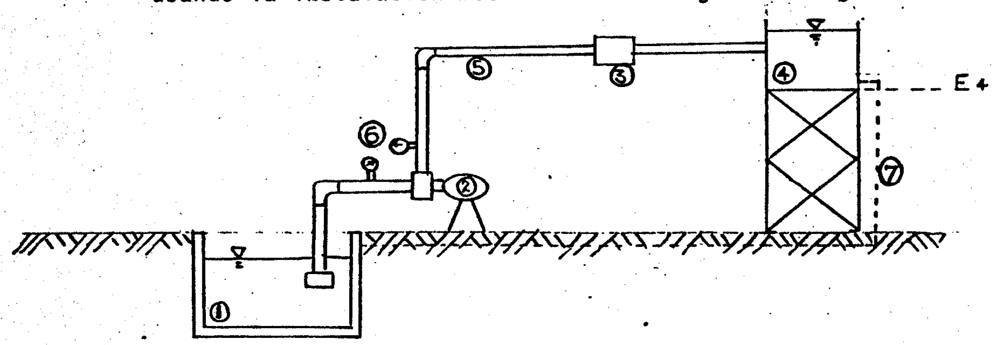
$$\frac{P}{Q\,H\,\gamma} = C \text{ - - - - - - - - } (4.9)$$

Finalmente:

$$P = C\,QH\gamma \text{ - - - - - - - - } (4.10)$$

EXPERIMENTO.-

El experimento para obtener el valor de "C", se puede realizar - usando la instalación mostrada en la siguiente figura:



① Cárcamo de bombeo

② Bomba

③ Medidor de gasto

④ Depósito elevado

⑤ Tubería (succión y descarga)

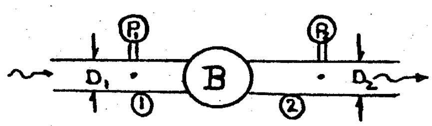
⑥ Manómetros

⑦ Tubería de retorno al cárcamo

Se selecciona una bomba de una potencia comercial conocida, -- ejem. 2HP, tubería de cierto diámetro y material (ejem. fierro - galvanizado de 1 1/2"), una vez hecha la instalación mostrada en la figura se procede a las mediciones.

Se coloca la base del depósito ④ a la elevación E4 y se acciona la bomba, al cabo de unos cuantos minutos (ejem. 10 min.) se -- hacen dos mediciones: presiones en los dos manómetros (P_1, P_2) - y el gasto en el medidor ③.

Atendiendo a la ecuación de la energía entre dos secciones, po-- demos determinar la carga hidráulica (H):



$Q = CTE.$

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H = (Z_2 - Z_1) + \left(\frac{P_2}{\gamma} - \frac{P_1}{\gamma}\right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right)$$

Los valores de Z_1 y Z_2 son dados por las elevaciones, P_1 y P_2 son valores conocidos a través de las mediciones, V_1 y V_2 se de-

terminan a partir de la ecuación de continuidad ($V = Q/A$).
Conociendo H, P, Q, y γ se sustituyen en la ec. (4.9) para obtener el correspondiente valor de C.
El experimento se repite tantas veces como se considere necesario, variando la elevación del depósito ④ (E-4) para obtener nuevos valores H y Q para volver a ser sustituidos en la ec. (4.9) obteniéndose el respectivo de "C"; después de varias pruebas se tomará un valor promedio de "C" que será sustituido en la ecuación (4.10), este promedio será válido para el rango de elevaciones consideradas en el experimento y de acuerdo a las características del mismo.

3.- Desarrollar una expresión, utilizando parámetros adimensionales, que permita obtener la altura de ola máxima (n) generada en un enbalse por un derrumbe. Si se acepta que:

$$n = f\,(V_o\,,\ d,\ V_c,\ g)$$

Donde:

V_o = vólumen por unidad de ancho del derrumbe m.

d = Profundiad del vaso en ese punto, m.

V_c = Velocidad de caida del derrumbe, m/S

g = Gravedad, m/s

SOLUCION.-

a).- MATRIZ DE EXPONENTES Y RANGO.-

La matríz de los exponentes, según inciso 4.3 nos queda:

	n	Vo	d	Vc	g
M	0	0	0	0	0
L	1	2	1	1	1
T	0	0	0	-1	-2

Y su rango r es:

$r = 2$

El número de parámetros adimensionales es:

$n = m - r = 5 - 2 = 3$

Es decir tendremos tres parámetros adimensionales π_1, π_2 y π_3 que relacionen las variables del problema y de acuerdo con la ec. (4.3) la función se puede escribir como:

$$f (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \text{ - - - - - - } (4.11)$$

b).- DETERMINAR PARAMETROS ADIMENSIONALES CONOCIDOS QUE RELACIONE - LAS VARIABLES.

Según la tabla 4.2 podemos formar el número de Froude ($\mathbb{F}$):

$$\pi_1 = \frac{V_c}{\sqrt{gd}} = \mathbb{F}$$

c).- FORMAR PARAMETROS ADIMENSIONALES DIVIDIENDO VARIABLES CON LAS-- MISMAS DIMENSIONES:

Para este problema vemos que "n" y "d" tienen las mismas dimensiones por lo que podemos formar π_2.

$$\pi_2 = \frac{n}{d}$$

Como el volúmen por unidad de ancho tiene dimensiones de longitud al cuadrado y ya no debe aparecer "n", el tercer parámetro -- será:

$$\pi_3 = \frac{Vo}{d^2}$$

De acuerdo con la ec. (4.11) se tiene que:

$$f\left(\mathbb{F}, \frac{n}{d}, \frac{Vo}{d^2}\right) = 0$$

O bién:

$$\frac{n}{d} = f_2\left(\mathbb{F}, \frac{Vo}{d^2}\right)$$

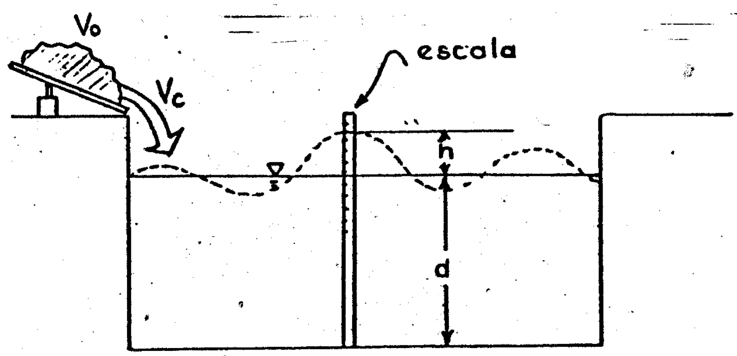
$$\frac{n}{d} = \frac{Vo}{d^2} \quad f_3\ (\mathbb{F})$$

Finalmente:

$$\frac{nd}{Vo} = f_3\ (\mathbb{F}) \qquad \text{- - - - - - -} \quad (4.12)$$

EXPERIMENTO.-

Para realizar el experimento será necesario contar con un depósito para agua de dimensiones adecuadas, ejem. 2 m. x 4 m. y 2 m. de profundidad; adaptación para derrumbes de material, que bién puede ser una rampa que trabaje a volteo; escala graduada que permita medir la altura de ola máxima a partir de la altura del vaso "d".

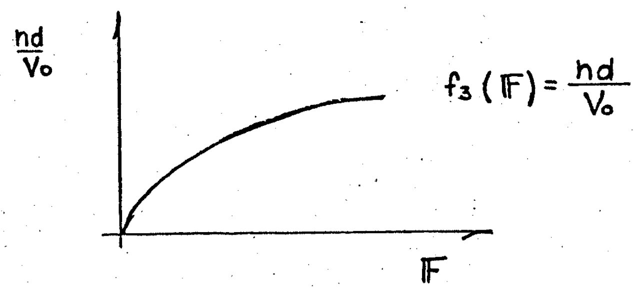


Se deberá conocer el volúmen "Vo" del material que trabaje como derrumbe, la velocidad "Vc" podría calcularse con las fór-- mulas conocidas en dinámica.

Se dejará caer el material provocando el oleaje esperando, midiéndose la altura de la ola máxima, así mismo serán datos conocidos el volúmen "Vo", la velocidad de caida "Vc", la gravedad "g" y la altura del vaso "d". Este procedimiento se repetirá tantas veces como se considere necesario, variando el volúmen del material en derrumbe, o bién la altura del vaso "d", lo cual originará valores diferentes de "n" y "$\mathbb{F}$"; para analizar la función que relaciona estas variables, se tabularán los datos obtenidos en las pruebas realizadas, calculándose los -- respecitvos valores de $\mathbb{F}$ y nd/Vo, de la manera siguiente:

Prueba	d	Vo	Vc	g	n	$\mathbb{F}=Vc/\sqrt{gd}$	nd/Vo
1							
2							
.							
.							
.							
.							
n							

De acuerdo a la ec. (4.12) se graficará en el eje de abscisas los valores de $\mathbb{F}$ y en el eje de ordenadas: nd/Vo, los cuales generarán la curva respectiva que será la función que los relaciona y generalizando este resultado es posible utilizar dicha gráfica para determinar cualquier altura de ola "n" en función del número de Froude. Esto es, podremos entrar directamente a la gráfica con $\mathbb{F}$ que en la intersección con la gráfica se tendrá el respectivo valor para n.d/Vo y tomando en cuenta que se conoce d y Vo despejaremos n para encontrar su valor.



4.- La velocidad de propagación de las ondas del sonido (C) en un líquido depende de su módulo de elasticidad (E_v) y de la densidad (ρ). Establecer por análisis dimensional, una relación posible entre estas magnitudes.

La relación entre las variables del problema se puede escribir como:

$$f\ (C,\ Ev, \rho) = 0$$

ó

$$C = f_2\ (Ev, \rho)$$

SOLUCION.-

a).- MATRIZ DE LOS EXPONENTES Y RANGO.-

La matríz de los exponentes, según inciso 4.3 nos queda:

	C	Ev	ρ
M	0	1	1
L	1	-1	-3
T	-1	-2	0

Y su rango es:

$$r = 2$$

El número de parámetros adimensionales es:

$$n = m - r = 3 - 2 = 1$$

Es decir solo se tendrá un parámetro adimensional π_1 y de acuerdo a la ec. (4.3) la función se puede escribir como:

$$f\,(\pi_1) = 0 \quad ------- \quad (4.13)$$

b).- DETERMINAR PARAMETROS ADIMENSIONALES CONOCIDOS QUE RELACIONEN LAS VARIABLES.

Se puede formar un parámetro conocido, el de Cauchy, que de acuerdo con la tabla 4.2, se escribe como:

$$\pi_1 = \frac{\rho C^2}{Ev}$$

De acuerdo con la ec. (4.13), se tiene que:

$$f\left(\frac{\rho C^2}{Ev}\right) = 0$$

O bién:

$$\frac{\rho C^2}{Ev} = \text{Constante } (K)$$

Finalmente:

$$C = K\sqrt{\frac{Ev}{\rho}}$$

5.- El flujo que desplaza un ventilador está dado por, $Q=f(P,\rho,n,\mu,D)$; desarrollar una expresión que permita obtener "Q" en función de las demás variables.

Donde:

Q =Caudal

P =Potencia

ρ =Densidad

n = Velocidad angular

μ = Viscosidad dinámica

D = Diámetro

SOLUCION.-

a).- MATRIZ DE LOS EXPONENTES Y RANGO

La matríz de los exponentes, según inciso 4.3, nos queda:

	Q	P	ρ	n	μ	D
M	0	1	1	0	1	0
L	3	2	-3	0	-1	1
T	-1	-3	0	-1	-1	0

Y su rango r es:

$r=3$

El número de parámetros adimensionales es:

$n = m - r = 6 - 3 = 3$

Es decir, tendremos tres parámetros adimensionales π_1, π_2 y π_3 que relacionen las variables del problema y de acuerdo con la ec. (4.3) la función se puede escribir como:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \text{ ------ } (4.14)$$

b).- DETERMINAR PARAMETROS ADIMENSIONALES CONOCIDOS QUE RELACIONEN LAS VARIABLES.

Según la tabla 4.2 podemos formar en no. de Reynolds ($\mathbb{R}$):

$$\pi_1 = \frac{\rho n D^2}{\mu}$$

c).- FORMAR PARAMETROS ADIMENSIONALES DIVIDIENDO VARIABLES CON LAS MISMAS DIMENSIONES.

Para este caso no existe dicha opción.

d).- RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES.

El sistema de ecuaciones homogeneas que permitirá obtener π_2 y π_3 será:

$$\left.\begin{array}{l} 0Y1 + Y2 + Y3 + 0Y4 + Y5 + 0Y6 = 0 \\ 3Y1 + 2Y2 - 3Y3 + 0Y4 - Y5 + Y6 = 0 \\ -Y1 - 3Y2 + 0Y3 - Y4 - Y5 + 0Y6 = 0 \end{array}\right\} \text{- - - - (4.15)}$$

Donde Y1,Y2,Y3,Y4,Y5 y Y6 son los exponentes de las variables Q, P, ρ, n, μ y D que definirán a los parámetros π_2 y π_3 según la ec. (4.5)

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.15); tomando en cuenta que se tienen 3 ecuaciones y 6 incógnitas será necesario darle valores a 3 de ellas, esta asignación de valores se realizará en dos ocaciones ya que necesitamos formar dos parámetros, π_2 y π_3.

Para π_2: suponemos Y5 = 0 con el fin de que "μ" no aparezca en este parámetro puesto que ya apareció en π_1, además ---

cumpliremos con el inciso 4.6.4, subinciso b)., también tomaremos $Y_1 = Y_2 = 1$ para que "Q" y "P" aparezcan en el numerador de π_2, con estos valores podremos resolver el sistema de ecuaciones, obteniendo:

$Y_1 = 1$ $\quad Y_4 = -4$

$Y_2 = 1$ $\quad Y_5 = 0$

$Y_3 = -1$ $\quad Y_6 = -8$

El parámetro π_2 nos queda:

$$\pi_2 = \frac{Q\ P}{\rho\ n^4\ D^8}$$

Verificando dimensiones:

$$\frac{[Q][P]}{[\rho][n]^4[D]^8} = \frac{[L^3T^{-1}][ML^2T^{-3}]}{[ML^{-3}][T^{-1}]^4[L]^8} = [1]$$

Por lo tanto si es adimensional.

Para π_3: Suponemos $Y_1 = Y_5 = 0$, con el fin de que "Q" y "μ" no aparezcan de nuevo, así también tomaremos $Y_2 = 1$, que obliga a la variable "P" a aparecer en el numerador de π_3, resolviendo el sistema tendremos.

$Y_1 = 0$ $\quad Y_4 = -3$

$Y_2 = 1$ $\quad Y_5 = 0$

$Y_3 = -1$ $\quad Y_6 = -5$

El parámetro π_3 nos queda:

$$\pi_3 = \frac{P}{\rho\ n^3\ D^5}$$

Verificando las dimensiones:

$$\frac{[P]}{[\rho][n]^3[D]^5} = \frac{[ML^2T^{-3}]}{[ML^{-3}][T^{-1}]^3[L]^5} = [1]$$

Por lo tanto si es adimensional.

De acuerdo con la ec. (4.14) se tiene que:

$$f\left(\frac{\rho n D^2}{\mu},\ \frac{Q\,P}{\rho\, n^4\, D^8},\ \frac{P}{\rho\, n^3\, D^5}\right) = 0$$

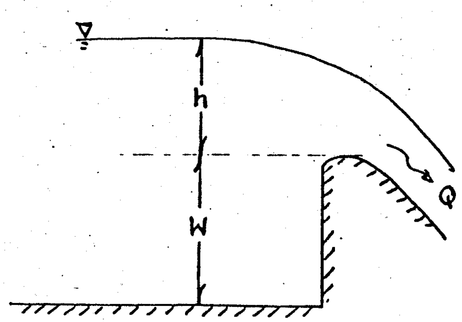
o bién

$$\frac{Q\,P}{P\, n\, D} = f_2\left(\mathbb{R}e,\ \frac{P}{\rho\, n^3\, D^5}\right)$$

ó:

$$Q = \frac{\rho n^4\, D^8}{P}\, f_2\left(\mathbb{R}e, \frac{P}{\rho\, n^3\, D^5}\right)$$

6.- En un vertedor rectangular de cresta aguda sin contracción lateral,- el gasto por unidad de ancho (q = Q/b) depende de: q= f(h,w,g); donde "h" es la carga sobre la cresta del vertedor; "W" altura del vertedor y "g" la gravedad (ver fig); determinar una expresión que permita obtener "q" en función de las demás variables.



La relación entre las variables se puede escribir como:

$$f\ (q,\ g,\ w,\ g\ ) = 0$$

ó

$$q = f_2\ (\ h,\ w,\ g\ )$$

SOLUCION.-

a).- MATRIZ DE LOS EXPONENTES Y RANGO.-

La matríz de los exponentes, según inciso 4.3 nos queda:

	q	h	w	g
M	0	0	0	0
L	2	1	1	1
T	-1	0	0	-2

Y su rango r es:

$$r = 2$$

El número de parámetros adimensionales es:

$$n = m - r = 4 - 2 = 2$$

Es decir habrá 2 parámetros adimensionales π_1 y π_2; por lo que de acuerdo con la ec. (4.3) se tiene que:

$$f\ (\pi_1, \pi_2\ ) = 0 \quad - - - - - - - \quad (4.16)$$

b).- DETERMINAR PARAMETROS ADIMENSIONALES CONOCIDOS QUE RELACIONE LAS VARIABLES.-

No existe alguno.

c).- FORMAR PARAMETROS ADIMENSIONALES DIVIDIENDO VARIABLES CON LAS MISMAS DIMENSIONES.

Para este problema vemos que "h" y "w" tienen las mismas dimensiones por lo que podemos formar π_1 :

$$\pi_1 = \frac{h}{W}$$

d).- RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES.-

El sistema de ecuaciones homogeneas que permitirá obtener π_2 será:

$$\left.\begin{aligned} 0Y_1 + 0Y_2 + 0Y_3 + 0Y_4 &= 0 \\ 2Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 &= 0 \\ -Y_1 + 0Y_2 + 0Y_3 - 2Y_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{------} (4.17)$$

Donde y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 son los exponentes de las variables q, h, w, g; que definen el parámetro π_2 , según ec.- (4.5).

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.17); tomando en cuenta que se tienen 2 ecuaciones y 4 incógnitas será necesario darle valor a dos de ellas; como la variable dependiente "q" se desea que aparezca en el numerador del parámetro π_2 y elevado al exponente uno, por lo tanto se asumirá $Y_1 = 1$; considerando que "W" aparece en el parámetro π_1 ya no será necesario que aparezca en π_2 por lo cual supondremos $Y_3 = 0$. Sustituyendo en la ec. (4.17) y resolviendo el sistema se tendrá:

$Y_1 = 1$

$Y_2 = -3/2$

$Y_3 = 0$

$Y_4 = -1/2$

Por lo que el parámetro π_2 es:

$$\pi_2 = \frac{q}{h^{3/2} g^{1/2}} = \frac{Q/b}{h^{3/2} g^{1/2}}$$

Verificando las dimensiones tendremos:

$$\frac{\frac{[Q]}{[b]}}{[h]^{3/2}[g]^{1/2}} = \frac{\frac{[L^3\ T^{-1}]}{[L]}}{[L]^{3/2}\ [L\ T^{-2}]^{1/2}} = [1]$$

Por lo tanto es adimensional.

De acuerdo con la ec. (4.16) se tiene que:

$$f\left(\frac{h}{W}, \quad \frac{q}{h^{3/2}\ g^{1/2}}\right) = 0$$

o bién:

$$q = \sqrt{h^3\ g}\ f_2\ (h/W)$$

7.- Desarrollar una expresión que permita obtener las perdidas de carga (Δh) entre dos secciones separadas una longitud (L) de una tubería de diámetro (D) tomando en cuenta la velocidad (V), la densidad (γ), viscocidad dinámica (μ), la rugosidad absoluta (K) y la gravedad (g).

SOLUCION.-

a).- MATRIZ DE EXPONENTES Y RANGO.-

La matríz de los exponentes, según inciso 4.3, nos queda:

	Δh	V	L	D	ρ	μ	K	g
M	0	0	0	0	1	1	0	0
L	1	1	1	1	-3	-1	1	1
T	0	-1	0	0	0	-1	0	-2

Y su rango r es:

r=3

El número de parámetros adimensionales es:

n = m - r = 8 - 3 = 5

Es decir tendremos cinco parámetros adimensionales π_1, π_2, π_3 π_4, π_5 que relacionan las variables del problema y de acuerdo con la ec. (4.3) la función se puede escribir como:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) \text{ ----------- } (4.18)$$

b).- DETERMINAR PARAMETROS ADIMENSIONALES CONOCIDOS QUE RELACIONE LAS VARIABLES.

Según la tabla 4.2 podemos formar el número de Reynolds (IR):

$$\mathbb{R} = \frac{VD\rho}{\mu} = \pi_1$$

c).- FORMAR PARAMETROS ADIMENSIONALES DIVIDIENDO VARIABLES CON LAS MISMAS DIMENSIONES.

Para este problema vemos que "Δh", "L", "D" y "K" tienen las mismas dimensiones por lo que podemos formar los siguien tes parámetros adimensionales:

$$\pi_2 = \frac{L}{D}, \quad \pi_3 = \frac{K}{D}, \quad \pi_4 = \frac{\Delta h}{L}$$

d).-RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES.

El sistema de ecuaciones homogeneas que permitirá obtener-- π_5 será:

$$\left.\begin{array}{l} 0Y_1 + 0Y_2 + 0Y_3 + 0Y_4 + Y_5 + Y_6 + 0Y_7 + 0Y_8 = 0 \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - 3Y_5 - Y_6 + Y_7 + Y_8 = 0 \\ 0Y_1 - Y_2 + 0Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 - Y_6 + 0Y_7 - 2Y_8 = 0 \end{array}\right\} \text{--- } (4.19)$$

Donde: Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, Y_8, son los exponentes- de las variables Δh, V, L, D, ρ, μ, K, g que definirán el - parámetro π_5, según la ec. (4.5)

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.19); tomando en - cuenta que tienen 3 ecuaciones y 8 incógnitas será necesa-- rio darle valores a 5 de ellas. Considerando que "μ", "K", y "Δh" aparecen en los parámetros π_1, π_3 y π_4 respectiva-- mente ya no será necesario que aparezcan en π_5 por lo cual- supondremos $Y_6 = 0$, $Y_7 = 0$, $Y_1 = 0$.

Como "D" ya aparece en π_1, π_2 y π_3 hacemos $Y_4 = 0$, también- podemos observar que la variable "g" no aparece en ningún - parámetro ya determinado por lo cual adoptaremos $Y_8 = 1$, - con estos valores podremos resolver el sistema de ecuacio-- nes, obteniendo:

$Y_1 = 0$	$Y_3 = 1$	$Y_5 = 0$	$Y_7 = 0$
$Y_2 = -2$	$Y_4 = 0$	$Y_6 = 0$	$Y_8 = 1$

El parámetro π_5 nos queda:

$$\pi_5 = \frac{gL}{V^2}$$

Verificando dimensiones tenemos:

$$\frac{[g][L]}{[V]^2} = \frac{[L\,T^{-2}][L]}{[L\,T^{-1}]^2} = [1]$$

Por lo tanto es adimensional.

De acuerdo con la ecuación (4.18) se tiene que:

$$f\left(\mathbb{R}, \frac{L}{D}, \frac{K}{D}, \frac{\Delta h}{L}, \frac{Lg}{V^2}\right) = 0$$

O bién:

$$\frac{\Delta h}{L} = f_2\left(\mathbb{R}, \frac{L}{D}, \frac{K}{D}, \frac{Lg}{V^2}\right)$$

Finalmente:

$$\Delta h = L\, f_2\left(\mathbb{R}, \frac{L}{D}, \frac{K}{D}, \frac{Lg}{V^2}\right)$$