CAPITULO 3

APLICACION DEL ANALISIS DIMENSIONAL PARA REVISION DE HOMOGENEIDAD DE DIMENSIONES Y TRANSFORMACION DE UN SISTEMA A OTRO

Se analizan las siguientes ecuaciones:

1.- Ecuación que determina el empuje vertical ascendente.

2.- Ecuación que determina el gasto en venturímetro.

3.- Ecuación que mide la cantidad de movimiento.

4.- Ecuación que determina el gasto en pozos con acuífero confinado.

5.- Ecuación que determina el gasto en vertedores rectangulares en pared gruesa (tipo cimacio).

6.- Fórmula de Darcy-Weisbach para pérdidas por fricción.

7.- Fórmula de Chezy que determina la velocidad en flujo uniforme.

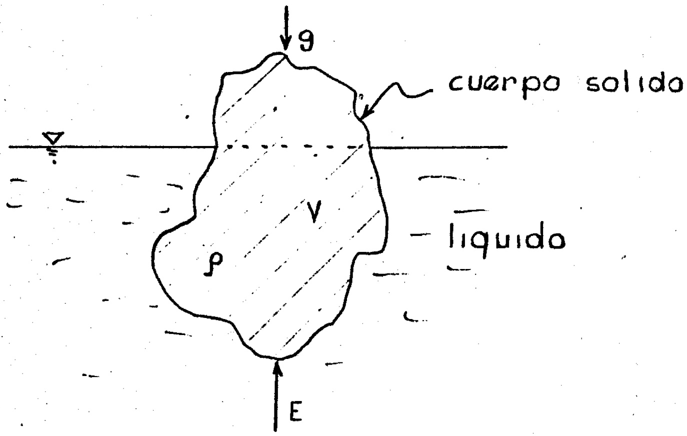
  7.1.- Fórmula de Manning-Strickler.

  7.2.- Fórmula de Bazin.

  7.3.- Fórmula de Kutter.

1.- Ecuación que determina el empuje vertical ascendente producido por un líquido en cuerpos sólidos. (ref. 2)

$$E = \gamma \cdot V = \rho\, g\, V$$



Donde:

- E= Empuje $[M L T^{-2}]$
- ρ= Densidad del fluido $[M L^{-3}]$
- g= Gravedad $[L T^{-2}]$
- V= Volúmen del fluido desalojado $[L^{3}]$

Analizando dimensiones tenemos:

$$[\cancel{M} L \cancel{T^{-2}}] \overset{?}{=} [\cancel{M} \cancel{L^{-3}}]\,[L \cancel{T^{-2}}]\,[\cancel{L^{3}}]$$

$$[L] = [L]$$

Por lo tanto la ecuación es dimensionalmente homogenea.

2.- Ecuación que determina el gasto en un venturímetro conectado en una tubería a presión (fig. 3.1), tomada de la ref. 3.

$$Q = (C_d)(A_2)\sqrt{2(g)(\Delta h)\left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)}$$

Donde:

Q = Gasto $[L^3 T^{-1}]$

A_2= Area del conducto en estrangulamiento $[L^2]$

g = Gravedad $[L T^{-2}]$

Δh= Deflexión en manómetro de mercurio $[L]$

γ_m= Peso específico del mercurio $[M L^{-2} T^{-2}]$

γ = Peso específico del agua $[M L^{-2} T^{-2}]$

Cd= Coeficiente de descarga: lo supondremos adimensional $[1]$

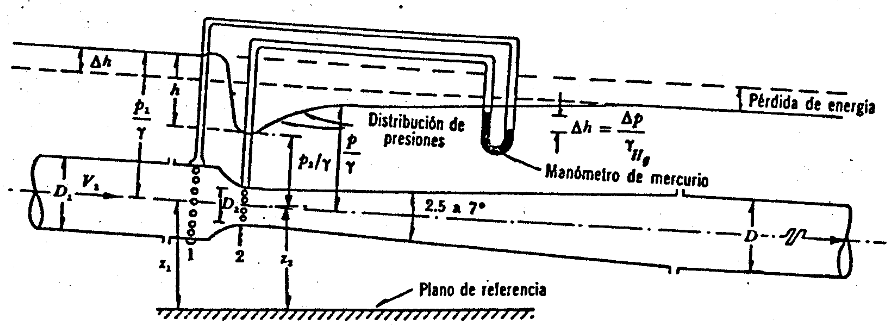


Fig. 3.1 Venturímetro en una tubería.

Analizando dimensiones tenemos:

$$Q = C_d \cdot A_2 \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)}$$

$$\left[L^3 T^{-1}\right] \stackrel{?}{=} [1] \left[L^2\right] \left[L T^{-2}\right]^{1/2} [L]^{1/2} \cdot \frac{\left[M L^{-2} T^{-2}\right]^{1/2}}{\left[M L^{-2} T^{-2}\right]^{1/2}}$$

$$\left[L^3 T^{-1}\right] \stackrel{?}{=} \left[L^2\right] \left[L^{1/2} T^{-1}\right] \left[L^{1/2}\right]$$

$$\left[L^3 T^{-1}\right] = \left[L^3 T^{-1}\right]$$

Por lo tanto la ecuación es dimensionalmente homogenea y Cd no -tiene dimensiones.

La función básica de los venturímetros consiste en producir un --estrangulamiento en la sección transversal de la tubería, el cual modifica las presiones, con la medición de ese cambio es posible-conocer el gasto que circula por la sección partiendo de la ecuación de Bernoulli.

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

3.- Ecuación que mide la cantidad de movimiento para un volúmen de --- control fijo: (ref. 3).

$$F_P + F_T + F_c \stackrel{?}{=} \Sigma\,(\rho \cdot Q \cdot \beta \cdot V) + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \rho \cdot Q\, ds$$

Donde:

F_p, F_T, F_c = Fuerzas normales, tangenciales y peso propio $[MLT^{-2}]$

ρ = Densidad $[M\,L^{-3}]$

Q = Gasto $[L^3\,T^{-1}]$

V = Velocidad $[L\,T^{-1}]$

∂T= Derivada parcial respecto al tiempo $[T]$

ds= Diferencialde longitud $[L]$

β = Coeficiente de Boussinesq: lo consideraremos adimensional $[1]$

Analizando dimensiones tenemos:

$$[M\,L\,T^{-2}] \stackrel{?}{=} [M\,L^{-3}][L^3\,T^{-1}][1][L \cdot T^{-1}] + \frac{\partial}{\partial t} \int [M L^{-3}][L^3\,T^{-1}][L]$$

$$[M\,L\,T^{-2}] \stackrel{?}{=} [M\,L\,T^{-2}] + \frac{\partial}{\partial t} \int [M\,L\,T^{-1}]$$

Para el caso del análisis dimensional en integrales, se sabe que se conservan las dimensiones debido a que la integral representa una-- sumatoria y esta a su vez es afectada por la dimensión de ∂T que -- será $[T']$ cuyo análisis es de la siguiente manera.

$$\frac{\partial}{\partial T}\int [MLT^{-1}] = \frac{[MLT^{-1}]}{[T]} = [MLT^{-2}]$$

Entonces,

$$[MLT^{-2}] = [MLT^{-2}] + [MLT^{-2}]$$

$$[MLT^{-2}] = [MLT^{-2}]$$

Por lo tanto la ecuación es dimensionalmente homogenea y β no tiene dimensiones.

4.- Ecuación que determina el gasto de extracción en un pozo con flujo radial establecido en un acuífero confinado: (ref.5).

$$Q = 2\pi r b K \frac{dh}{dr}$$

Donde:

Q = Gasto $[L^3 T^{-1}]$

2 = Constante $[1]$

r, h y b = variables con dimensiones de longitud $[L]$ de acuerdo a la figura 3.2

K = Coeficiente de permeabilidad: lo cual consideraremos adimensional $[1]$

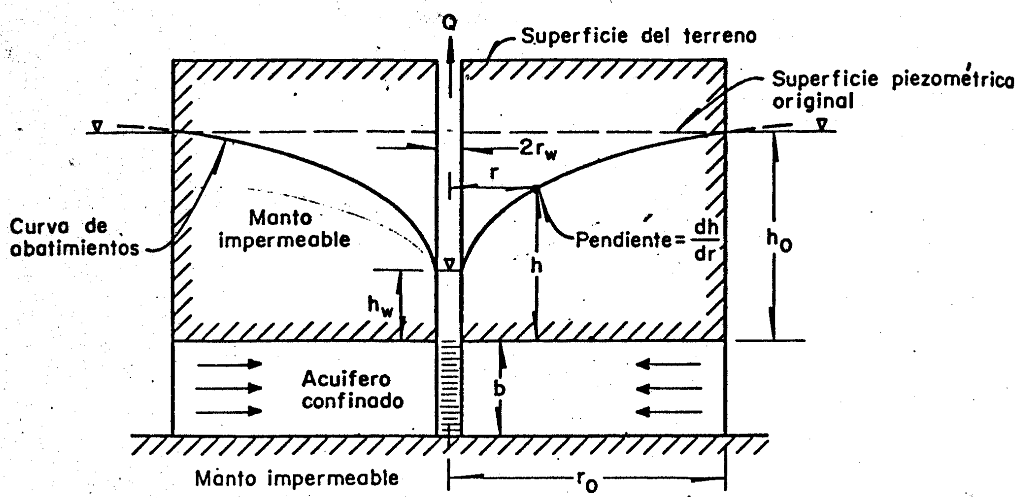


Fig 3.2 Flujo radial establecido de un acuífero confinado a un pozo.

Analizando dimensiones tenemos:

$$[L^3 T^{-1}] \overset{?}{=} [1] [L] [L] [1] \frac{[L]}{[L]}$$

$$[L^3 T^{-1}] \overset{?}{=} [L] [L]$$

$$[L^3 T^{-1}] \neq [L^2]$$

Por lo tanto la ecuación no es dimensionalmente homogenea; para que lo sea "K" deberá tener dimensiones.

Con el fin de determinar las unidades de "K" supondremos a esta -
como incógnita en análisis dimensional:

$$\left[L^{3}T^{-1}\right] = \left[1\right]\left[L\right]\left[L\right]\left[K\right]\frac{\left[L\right]}{\left[L\right]}$$

$$\left[L^{3}T^{-1}\right] = \left[L^{2}\right].\left[K\right]$$

$$\left[K\right] = \left[L^{1}T^{-1}\right]$$

Esto significa que "K" en la ecuación tiene dimensiones de -----
$\left[L^{1}T^{-1}\right]$ o sea, dimensiones de velocidad.

5.- Ecuación que determina el gasto en vertedores:

$Q = CLH^{3/2}$ (Sistema métrico)

Donde:

Q= Gasto $\left[L^{3}T^{-1}\right]$

L= Longitud de cresta vertedora $\left[L\right]$

H= Carga sobre la cresta $\left[L\right]$

C= Coeficiente de descarga: lo consideraremos adimensional $\left[1\right]$

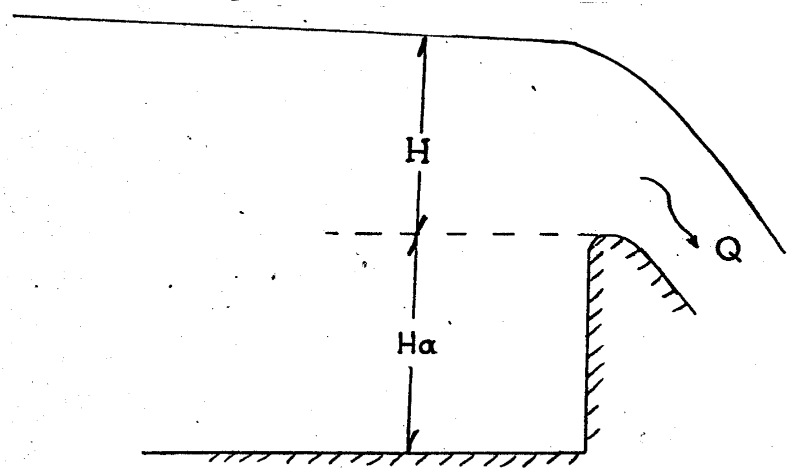


Fig. 3.3

Analizando dimensiones tenemos:

$$\left[L^{3} T^{-1}\right] \stackrel{?}{=} [1][L][L]^{3/2}$$

$$\left[L^{3} T^{-1}\right] \neq \left[L^{5/2}\right]$$

Por lo tanto la ecuación no es dimensionalmente homogenea; para - que lo sea "C" deberá tener dimensiones.

Con el fin de determinar las unidades de "C" supondremos a esta - como incógnita en análisis dimensional:

$$\left[L^{3} T^{-1}\right] = [C]\left[L^{1} L^{3/2}\right]$$

$$[C] = \frac{[L^3 \; T^{-1}]}{[L^{5/2}]}$$

$$[C] = [L^{1/2} \; T^{-1}]$$

Lo que significa que "C" deberá tener dimensiones de $[L^{1/2} \; T^{-1}]$ para que la ecuación sea dimensionalmente homogenea.

La ecuación se puede transformar al sistema inglés aplicando el --- siguiente procedimiento:

T = 1 segundo en sistema métrico y sistema inglés

L = 1 metro en sistema métrico (3.28 ft)

L = 1 ft. en sistema inglés (0.3048 m)

Por lo tanto "C" en sistema inglés nos queda:

$$C_i = (1 m. \times 3.28 ft/m)^{1/2} \, (1 \, Seg)^{-1} = 1.811 \, Cm.$$

$$C_i = 1.811 \, Cm$$

O sea que el coeficiente de descarga para el sistema inglés será- 1.811 veces mayor que el correspondiente valor para el sistema - métrico.

La ecuación para el sistema inglés será:

$Q = 1.81 \, Cm \, L \, H^{3/2}$

Considerando que:

$Q = ft^3/seg$

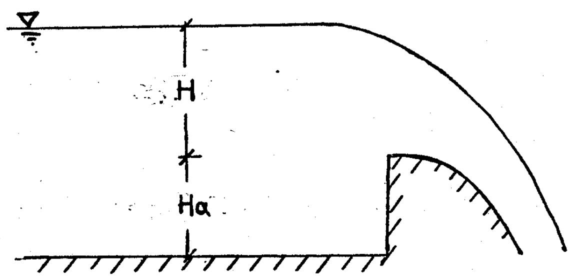
Cm= Coef. de descarga del sistema métrico

$L = ft$

$H = ft$

El coeficiente de descarga es determinado en función de la rela - ción Ha/H (ver fig 3.3), el cual se puede obtener mediante las -- figuras 3.4 (sistema métrico) y 3.5 (sistema inglés), segun sea - el caso.

Ejemplo de aplicación: determinar el gasto en un vertedor de --- acuerdo a los datos que aparecen en la figura 3.6; resolver para el sistema métrico e inglés.



L = 3m.= 9.84ft

Fig. 3.6

a).- Sistema métrico:

$H = 2.5$ m.

$Ha = 2.0$ m.

$L = 3.0$ m.

Factor de descarga C: $Ha/H = \frac{2.0}{2.5} = 0.80$

Con relación Ha/H = 0.80 entramos a la gráfica para el cálculo de C en sistema métrico (fig 3.4) y tenemos que C = 2.135

$$Q = C\,L\,H^{3/2} = (2.135)(3.0)(2.5)^{3/2} = 25.31$$

$$Q = 25.31\ m^3/seg$$

b).- Sistema Inglés: se resolverá tomando en cuenta el coeficiente de descarga determinado para el sistema métrico, por lo tanto deberá ser afectado por el factor 1.81, encontrado en el análisis para transformar la fórmula al sistema inglés.

H = 8.20 ft

Ha = 6.56 ft

Ha/H = 0.80 → C = 2.135

L = 9.84 ft

$$Q = 1.811\,C\,L\,H^{3/2} = 1.811\,(2.135)(9.84)(8.20)^{3/2} = 893.37$$

$$Q = 893.37\ ft^3/seg = 25.30\ m^3/seg$$

Resolviendo para el mismo sistema inglés pero tomando en cuenta el factor de descarga para el sistema inglés, que se obtiene de la gráfica en fig 3.5

$$Ha/H = 6.56/8.20 = 0.80$$

$$\text{fig. } 3.5 \rightarrow C = 3.87$$

a.2).- En pulgadas:

$$Q = C\,L\,H^{3/2} = (3.87)(9.84\times12)(8.20\times12)^{3/2} = 446{,}046.32$$

$$Q = 446{,}046.32 \text{ pulg}^3/\text{seg} = 258.10 \text{ ft}^3/\text{seg}$$

$$258.10 \text{ ft}^3/\text{seg} \neq 894.10 \text{ ft}^3/\text{seg}$$

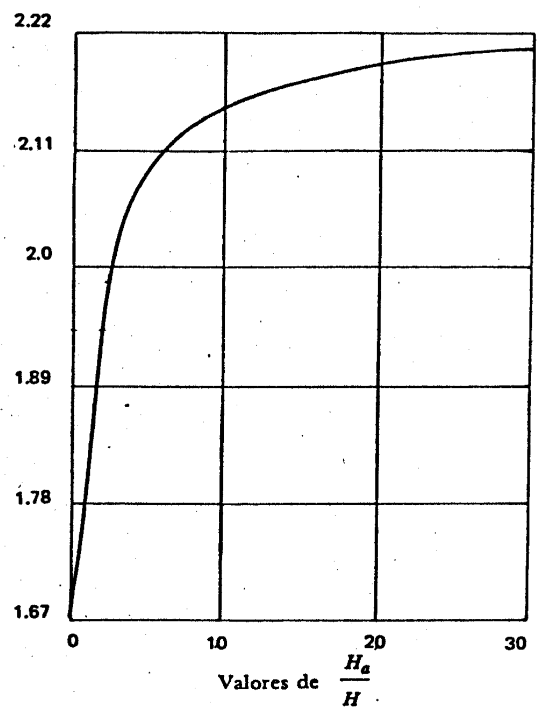


Fig. 3.4 Coeficientes de descarga en crestas de cimacio de pared vertical para el sistema métrico (ref. 7)

$$Q = C\,L\,H^{3/2} = (3.87)(9.84)(8.20)^{3/2} = 894.10$$

$$Q = 894.10\ ft^3/seg = 25.31\ m^3/seg$$

Los anteriores resultados demuestran la validéz de las formulas - para los dos sistemas.

Esta fórmula ($Q=CLH^{3/2}$) es válida solo para dimensiones de longitud en metros o fts. según sea el sistema aplicado, ya que el - factor de descarga "C" se calculó tomando en cuenta dimensiones - en fts. y metros.

Como comprobación resolveremos el mismo problema usando centímetros y pulgadas.

a.1).- En centímetros:

$$Q = C\,L\,H^{3/2} = (2.135)(300)(250)^{3/2} = 2\,531,798.55$$

$$Q = 2\,531,798.55\ cm^3/seg = 2.53\ m^3/seg$$

$$2.53\ m^3/seg \neq 25.30\ m^3/seg$$

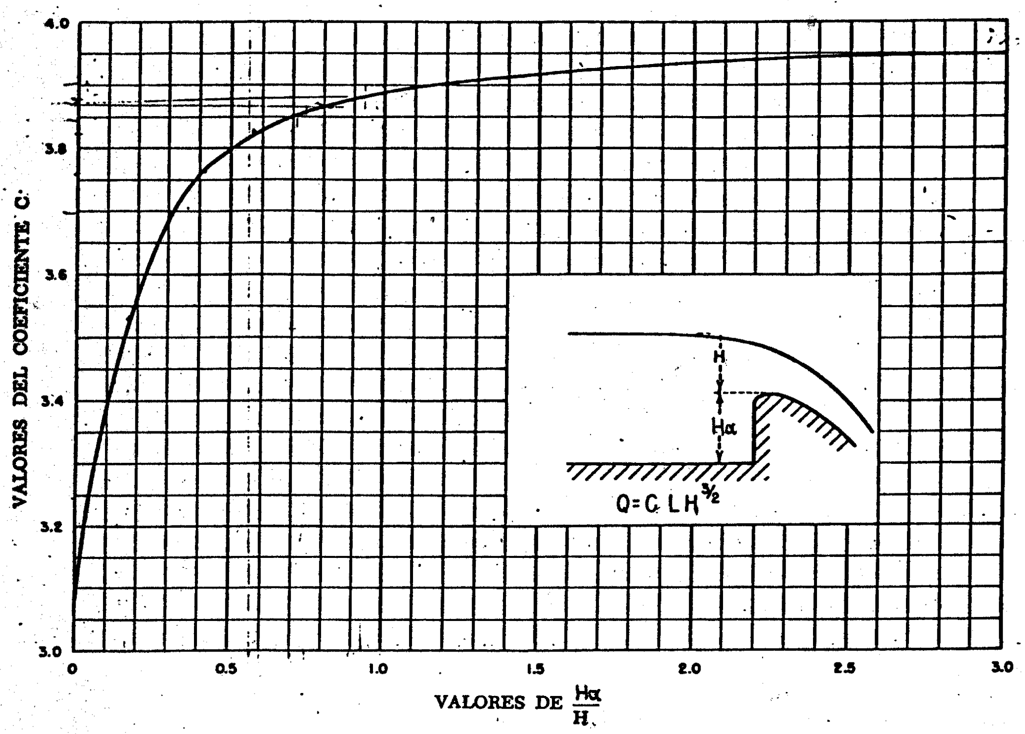


Fig. 3.5 Coeficientes de descarga en crestas de cimacio de pared vertical para el sistema Inglés. (ref.6)

6.- Fórmula de Darcy-Weisbach para el cálculo de pérdidas por fricción en tuberías con flujo permanente: (ref. 3)

$$hf = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

Donde:

hf = Perdidas por fricción $[L]$

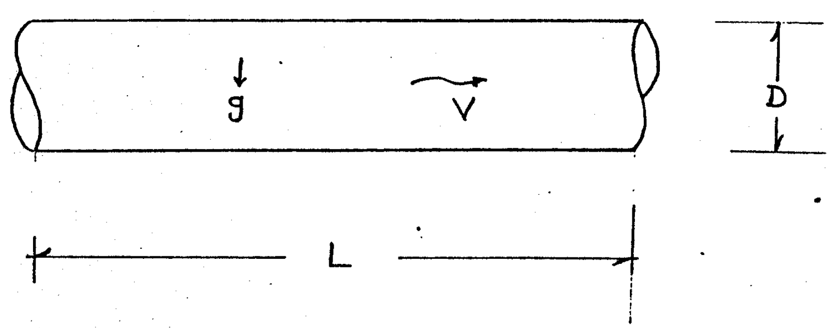
g = Gravedad $[L\,T^{-2}]$

D = Diámetro de la tubería $[L]$

L = Longitud del tubo $[L]$

V = Velocidad media $[L\,T^{-1}]$

f = Factor de fricción: se considera adimensional $[1]$; este factor depende directamente del número de Reynolds (Re), rugosidad absoluta (ξ) y diámetro de la tubería (D), se determina mediante el diagrama universal de Moody - (fig. 3.7)



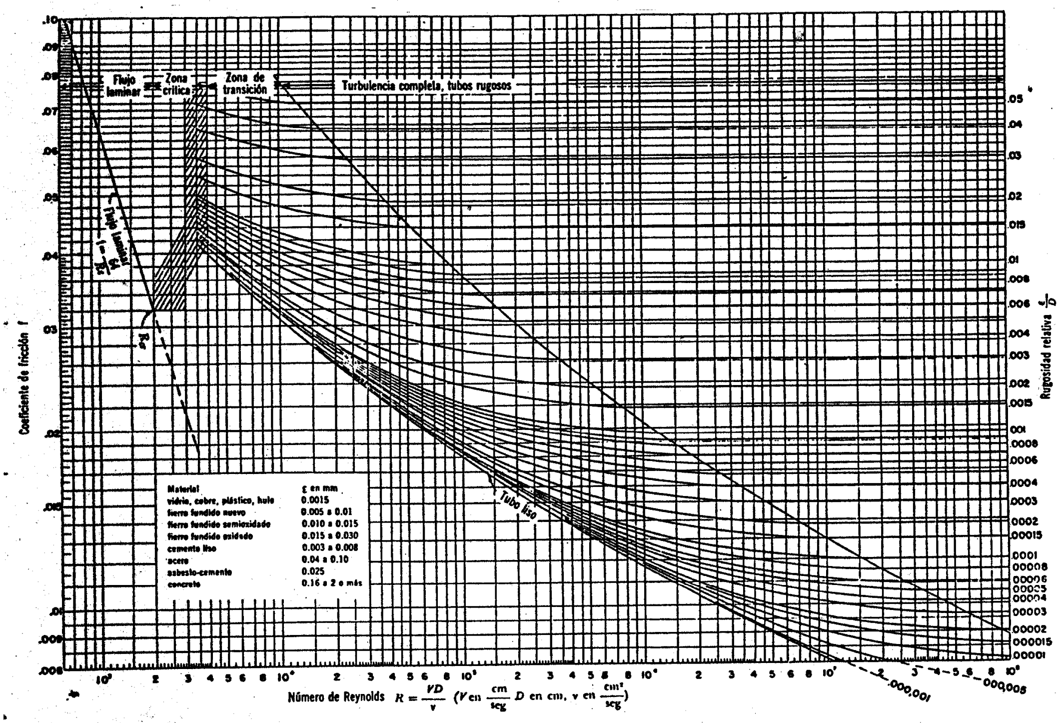


Fig 3.7 Coeficiente de fricción para cualquier tipo y tamaño de tubo; diagrama universal de Moody.

Analizando dimensiones tenemos:

$$[L] \stackrel{?}{=} [1] \frac{[L]}{[L]} \frac{[L\,T^{-1}]^2}{[1][L\,T^{-2}]}$$

$$[L] \stackrel{?}{=} \frac{[L^2\,T^{-2}]}{[L\,T^{-2}]}$$

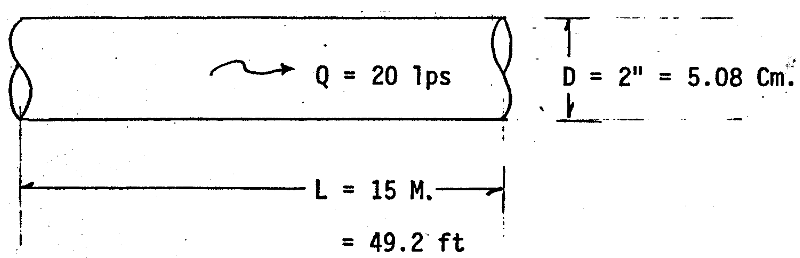
$$[L] \stackrel{?}{=} \frac{[L^2]}{[L]}$$

$$[L] = [L]$$

Por lo tanto la ecuación es dimensionalmente homogenea y "f" no -
tiene dimensiones.

Para el uso de la fórmula de Darcy-Weisbach se deberan adoptar -- las dimensiones de acuerdo al sistema a utilizar para el cálculo- de pérdidas, el resultado del cálculo de pérdidas en los distin-- tos sistemas deberá ser el mismo. Como comprobación de lo ante-- rior descrito resolveremos el siguiente problema para el sistema- métrico e Inglés.

a).- Sistema Métrico:



Tubería de cobre: ϵ = 0.0015 m m (rugosidad absoluta)

Viscosidad cinemática: $\nu = 1 \text{ X } 10^{-6}$ M2/seg

$= 1.07 \times 10^{-5}$ ft2/seg

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.0\,20\ m^3/seg}{0.785\ (0.0508\ m)^2} = 9.87$$

$$V = 9.87\ m/seg$$

$$\mathbb{R}e = \frac{V\,D}{\nu} = \frac{(9.87\ m/seg)(0.0508\ m.)}{1 \times 10^{-6}\ m^2/seg} = 5.01 \times 10^5$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.0015\ mm.}{50.80\ mm.} = 0.00003$$

$$\frac{\epsilon}{D} = 0.00003$$

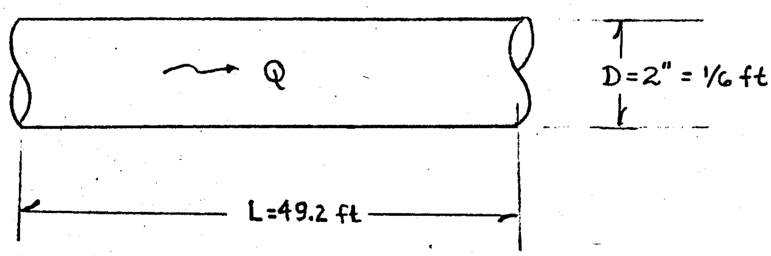
Revisando el diagrama de Moody (fig 3.7) para obtener "f" partiendo de Re. y $\frac{E}{D}$: f = 0.0135

$$hf = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$hf = (0.0135)\ \frac{(15\ m.)}{(0.0508m)} \cdot \frac{(9.87\ m/seg)^2}{(2 \times 9.81\ m/seg^2)} = 19.80$$

$$hf = 19.80\ m.$$

b).- Sistema Inglés:



$$Q = 0.02\ m^3/seg = \frac{0.02\ m^3/seg}{(0.3048\ m/ft)^3} = 0.706$$

$$Q = 0.706\ ft^3/seg$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.706\ ft^3/seg}{(0.785)(1/6\ ft)^2} = 32.4$$

$$V = 32.4\ ft/seg$$

$$Re = \frac{V\,D}{\nu} = \frac{(32.4\ ft/seg)(1/6\ ft)}{1.07 \times 10^{-5}\ ft^2/seg} = 5.04 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0.00003$$

diagrama de Moody : $f = 0.0135$

$$hf = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$hf = (0.0135)\frac{(49.2\ ft)}{(1/6\ ft)} \cdot \frac{(32.4\ ft/seg)^2}{2\,(32.2\ ft/seg^2)} = 64.96$$

$$hf = 64.96\ ft$$

$$64.96\ ft = 19.80\ m.$$

Lo que comprueba que la fórmula y el gráfico de Moody son válidos para el sistema métrico e inglés.

7.- Fórmula de Chezy para el cálculo de velocidad en flujo uniforme:

(ref. 1)

$$V = C\sqrt{RS}$$

Donde:

V = Velocidad $[LT^{-1}]$ en m/seg o ft/seg

R = Radio hidráulico $[L]$ en m o ft.

S = Pendiente $[1]$

C = Factor de resistencia al flujo: lo consideraremos adimensional $[1]$.

Analizando dimensiones tenemos:

$$[LT^{-1}] \stackrel{?}{=} [1][L]^{1/2}[1]^{1/2} = [L]^{1}$$

$$[LT^{-1}] \neq [L]$$

Por lo tanto la ecuación no es dimensionalmente homogénea, para lo cual "C" deberá tener dimensiones.

Con el objeto de determinar las dimensiones de "C", supondremos a esta como incógnita en el análisis dimensional:

$$\left[L\,T^{-1}\right] = \left[C\right]\left[L\right]^{1/2}\left[1\right]^{1/2}$$

$$\left[C\right] = \frac{\left[L\,T^{-1}\right]}{\left[L\right]^{1/2}} = \left[L^{1/2}\,T^{-1}\right]$$

$$\left[C\right] = \left[L^{1/2}\,T^{-1}\right]$$

Esto significa que "C" deberá tener dimensiones de $\left[L^{1/2}\,T^{-1}\right]$ para que la ecuación de Chezy sea dimensionalmente homogenea.

Para la determinación del factor de resistencia al flujo (C), se-han desarrollado varias formulas empíricas (ref. 4) tales como -- la fórmula de Manning-Strickler, fórmula de Bazin, fórmula de --- Kutter, etc., estas fórmulas dependen de coeficientes estableci-- dos por su autor en función de la rugosidad del material en el -- que se presenta el flujo, dichos coeficientes pueden verse en la-tabla T-1 tomada de la ref. 4.

A continuación presentamos el análisis dimensional para algunas - de las fórmulas que determinan el factor "C", los cuales aprove-- charemos para transformar al sistema inglés.

	Manning y Kutter n	Kutter m	Bazín B
I Secciones cerradas parcialmente llenas			
Fierro fundido nuevo	0.012	0.20	0.06
Fierro fundido usado		0.25	0.12
Fierro colado	0.012	0.20	
Barro vitrificado nuevo		0.25	
Barro vitrificado usado	0.017	0.30 - 0.35	
Tubos de alcantarillado	0.017 - 0.020	0.30 - 0.35	
Túneles de concreto pulido	0.011 - 0.013	0.20 - 0.25	0.22
II Secciones abiertas			
Madera cepillada	0.010	0.15 - 0.20	0.06
Madera de acabado rugoso		0.30 - 0.35	
Mampostería de ladrillo bien acabada	0.013	0.25	0.16
Cemento pulido		0.20 - 0.25	0.10 - 0.16
Concreto pulido	0.012	0.20	0.11 - 0.22
Concreto rugoso	0.017	0.65	0.45
Piedra brasa bien acabada	0.017	0.65	
En tierra arroyos y ríos	0.025	1.75	1.4 - 1.6
En tierra con material grueso y plantas	0.035	2.0 - 2.5	1.75
Con cantos rodados	0.04 - 0.05	3.5 - 5.0	hasta 3.5
Con gran rugosidad de fondo y maleza tupida	hasta 0.09		
Roca acomodada			
Roca a volteo			
Grava gruesa (10 a 15 cm)			
Grava media (5 a 10 cm)			
Grava fina (2 a 3 cm)			
Cantos rodados (15 a 20 cm)			

Tabla T-1 Distintos tipos de factores de rugosidad

(REF. 4)

7.1 Fórmula de Mannig-Strickler: (REF. 4)

$$C_m = \frac{R^{1/6}}{n}$$

Donde:

C = Factor de fricción de Chezy $[L^{1/2}\ T^{-1}]$

R = Radio hidráulico $[L]$ (en metros o ft)

n = Coeficiente de rugosidad de Manning: lo consideraremos --- adimensional $[1]$

Analizando dimensiones tenemos:

$$[L^{1/2}\ T^{-1}] \stackrel{?}{=} \frac{[L^{1/6}]}{[1]}$$

$$[L^{1/2}\ T^{-1}] \neq [L^{1/6}]$$

Lo que indica que la ecuación no es dimensionalmente homogenea por lo tanto "n" tiene dimensiones.

Para determinar las dimensiones de "n" se supondrá como incógnita- en el análisis dimensional.

$$[L^{1/2}\ T^{-1}] = \frac{[L^{1/6}]}{[n]}$$

$$[n] = [L^{1/6}]\,[L^{1/2}\ T^{-1}]^{-1}$$

$$[n] = [L^{-1/3}\ T^{1}]$$

Lo que indica que para que la ecuación sea dimensionalmente homoge- nea "n" deberá tener dimensiones de $[L^{-1/3}\ T^{1}]$, "n" se obtiene de la tabla T-1.

Esta fórmula de Manning-Strickler cumple para el sistema métrico-la cual transformaremos al sistema inglés considerando que:

T = 1 seg en sistema métrico e inglés

L = 1 M en sistema métrico (1m = 3.28 ft)

L = 1 ft en sistema inglés (1 ft = 0.3048 m)

Sabemos que: $Cm = \frac{R^{1/6}}{n_m}$

Por tanto: $Ci = \frac{R^{1/6}}{n_i}$

Y teniendo que: $n_m = \left[L^{-1/3}\ T^{1}\right]$

$$n_i = (1\ m \times 3.28\ ft/m)^{-1/3}\ (1\ seg)^1\ n_m = 0.673\ n_m$$

Por lo tanto $n_i = 0.673\ n_m$

$$C_i = \frac{R^{1/6}}{0.673\ n_m} = \frac{R^{1/6}}{n_i}$$

$$C_i = 1.486\ \frac{R^{1/6}}{n}$$

Substituyendo el valor de "C" obtenido por Manning-Strickler en la ecuación de Chezy obtenemos:

Sistema métrico:

$$V = C\sqrt{RS} = \frac{(R^{1/6})}{(n)}(R^{1/2}\ S^{1/2})$$

$$V = \frac{1}{n}\ R^{2/3}\ S^{1/2}$$

Ecuación mas utilizada para el cálculo de velocidad en canales en- el sistema métrico.

Sistema Inglés:

$$V = C\sqrt{RS} = (1.486)\frac{(R^{1/6})}{(n)}(R^{1/2}\ S^{1/2})$$

$$V = \frac{1.49}{n}(R^{2/3})(S^{1/2})$$

Ecuación mas utilizada para el cálculo de velocidad en canales en- sistema inglés.

Ejemplo de aplicación: Determinar la velocidad del agua en un ca- nal, considerando los sig. datos: R= 4.1 ft = 1.249 m; S=0.005, n=0.012 ; se resolverá tanto para el sistema métrico como para el sistema inglés.

a).- Sistema métrico:

$$V = 1/n \; R^{2/3} \; S^{1/2}$$

$$V = \frac{(1)}{(0.012)} \; (1.249)^{2/3} \; (0.005)^{1/2} = 6.83 \; m/seg.$$

$$V = 6.83 \; m/seg. = 22.42 \; ft/seg.$$

b).- Sistema Inglés:

$$V = \frac{1.49}{n} \; R^{2/3} \; S^{1/2}$$

$$V = \frac{(1.49)}{(0.012)} \; (4.1)^{2/3} \; (0.005)^{1/2}$$

$$V = 22.49 \; ft/seg. = 6.85 \; m/seg.$$

Estas formulas cumplen solamente utilizando unidades en metros o - piés según sea el sistema adoptado y "n" es el mismo valor para -- ambos sistemas.

7.2).- Fórmula de Bazin:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{B}{\sqrt{R}}}$$

Donde:

C = Factor de resistencia al flujo $[L^{1/2}\ T^{-1}]$

87 = Constante $[1]$

1 = Sumando con dimensiones de $[L^{-1/2}]$,que verificaremos

R = Radio Hidráulico $[L]$

B = Coeficiente de rugosidad de Bazin: lo consideraremos adimensional $[1]$

Analizando demensiones tenemos:

$$[L^{1/2}\ T^{-1}] \overset{?}{=} \frac{[1]}{[L^{-1/2}] + \frac{[1]}{[L]^{1/2}}}$$

$$[L^{1/2}\ T^{-1}] \overset{?}{=} \frac{[1]}{\frac{[1]}{[L]^{1/2}}}$$

$$[L^{1/2}\ T^{-1}] \neq [L]^{1/2}$$

Por lo tanto la ecuación no es dimensionalmente homogenea, para -- que lo sea "B" deberá tener dimensiones.

Con el objeto de determinar las dimensiones de "B", supondremos a esta variable como incógnita en el análisis dimensional.

$$\left[L^{1/2} T^{-1}\right] = \frac{[1]}{\frac{[B]}{[L]^{1/2}}} = \frac{[L]^{1/2}}{[B]}$$

$$[B] = \frac{[L]^{1/2}}{\left[L^{1/2} T^{-1}\right]} = [T]$$

Esto significa que "B" deberá tener dimensiones de $[T]$, o sea segundos, para que la ecuación sea dimensionalmente homogenea, lo cual suena ilógico un factor de rugosidad en dimensiones de tiempo, por lo tanto, esta dimensión puede ser absorbida por la constante 87 en forma inversa $\left[T^{-1}\right]$ para consevar la homogeneidad dimensional de la ecuación. "B" se obtiene de la tabla T-1

Esta fórmula cumple para el sistema métrico, la cual transformaremos al sistema inglés aplicando el siguiente procedimiento:

T = 1 Segundo en sistema métrico e inglés

L = 1 Metro en sistema métrico (3.28 ft)

L = 1 ft en sistema inglés (0.3048 m)

Sabemos que C = $\left[L^{1/2} \; T^{-1}\right]$

Y que "C" para el sistema métrico:

$$C_m = \frac{87}{1 + \frac{B}{\sqrt{R}}}$$

$$C_m = \left[L^{1/2}\, T^{-1}\right]$$

$$C_i = \left[(1\,m. \times 3.28\,ft/m)^{1/2} \cdot (1\,seg)^{-1}\right] C_m =$$

$$C_i = 1.811\, C_m$$

O se que:

$$C_i = 1.811\left(\frac{87}{1 + \frac{B}{\sqrt{R}}}\right) = \frac{157.6}{1 + \frac{B}{\sqrt{R}}}$$

$$C_i = \frac{157.6}{1 + \frac{B}{\sqrt{R}}}$$

R deberá utilizarse en metros o fts.

Para verificar la congruencia entre las fórmulas para el sistema métrico y sistema inglés resolveremos el siguiente problema de aplicación considerando dimensiones de longitud en metros y fts.

Ejemplo de aplicación:

Determinar la velocidad del agua en un canal, para el sistema métrico y sistema inglés, calculando el factor de resistencia "C" con la fórmula de Bazin, considerando R = 4.1 ft., S = 0.005 y B = 0.12

a).- Sistema métrico: R = 4.1 ft x 0.348 m/ft = 1.249 m.

$$C = \frac{87}{1 + \frac{B}{\sqrt{R}}} = \frac{87}{1 + \frac{0.12}{\sqrt{1.249}}} = 78.56$$

$$V = C\sqrt{R \cdot S} = 78.56\sqrt{1.249 \times 0.005} =$$

$$V = 6.20 \text{ m/seg}$$

b).- Sistema Inglés:

$$C = \frac{157.6}{1 + \frac{B}{\sqrt{R}}} = \frac{157.6}{1 + \frac{0.12}{\sqrt{4.1}}} = 148.78$$

$$V = C\sqrt{R \cdot S} = 148.78\sqrt{4.1 \times 0.005} =$$

$$V = 21.30 \text{ ft/seg} = 6.49 \text{ m/seg}$$

NOTA: La fórmula de Chezy solo es aplicable usando unidades de medida en metros o bien en fts. de acuerdo al sistema utilizado; para comprobar esto resolveremos el inciso a) para cm. y el inciso b) para pulgadas:

a).- Utilizando centímetros: R = 124.9 cm.

$$C = \frac{87}{1 + \frac{B}{\sqrt{R}}} = \frac{87}{1 + \frac{0.12}{\sqrt{124.9}}} = 86.07$$

$$V = C\sqrt{R\,S} = 86.07\sqrt{124.9 \times 0.005} = 68.02\ cm/seg$$

$$68.02\ cm/seg = 0.68\ m/seg \neq 6.20\ m/seg$$

b).- Utilizando pulgadas: R= 4.1 ft = 49.2 pulg.

$$C = \frac{157.6}{1 + \frac{B}{\sqrt{R}}} \quad \frac{157.6}{1 + \frac{0.12}{\sqrt{49.2}}} = 154.95$$

$$V = C\sqrt{R\,S} = 154.95\sqrt{49.2 \times 0.005} = 78.85\ pulg/seg$$

$$78.85\ pulg/seg = 6.40\ ft/seg \neq 21.30\ ft/seg$$

7.3).- Fórmula de Kutter: (simplificación de la fórmula de G. y K.)

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{m+\sqrt{R}}$$

Donde:

C= Factor de fricción de Chezy $[L^{1/2}\ T^{-1}]$

R = Radio hidráulico $[L]$ (en metros o fts.)

m = Coef. de rugosidad con dimensiones iguales al término -- que suma. (se obtiene de la tabla T-1)

100 = Constante: se supone adimensional $[1]$

Analizando dimensiones tenemos:

$$[L^{1/2}\ T^{-1}] \stackrel{?}{=} \frac{[1]\ [L]^{1/2}}{[L^{1/2}]+[L]^{1/2}}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{[L]^{1/2}}{[L]^{1/2}}$$

$$[L^{1/2}\ T^{-1}] \neq [1]$$

Por lo tanto la ecuación no es dimensionalmente homogenea, para - que lo sea $[100]$ deberá tener dimensiones.

Para determinar las dimensiones de $[100]$, supondremos a este -- factor como incógnita en el análisis dimensional:

$$\left[L^{1/2}\,T^{-1}\right] = \frac{[100]\,[L]^{1/2}}{[L]^{1/2}}$$

$$\left[L^{1/2}\,T^{-1}\right] = [100]\,[1]$$

$$[100] = \left[L^{1/2}\,T^{-1}\right]$$

Esto significa que 100 deberá tener dimensiones de $\left[L^{1/2}\,T^{-1}\right]$ para que la ecuación sea dimensionalmente homogenea.

Esta fórmula cumple para el sistema métrico, la cual transformaremos al sistema inglés considerando que:

T = 1 seg en sistema métrico e inglés

L = 1 M. en sistema métrico (1m = 3.28 ft)

L = 1 ft en sistema inglés (1 ft = 0.3048 m)

Sabiendo que $C = \left[L^{1/2}\,T^{-1}\right]$ y que $Cm = \dfrac{100\sqrt{R}}{m+\sqrt{R}}$

$$C_m = L^{1/2}\,T^{-1}$$

$$C_i = \left[(1\,m. \times 3.28\,f/m)^{1/2} \, (1\,seg)^{-1} \right] C_m =$$

$$C_i = 1.811\,C_m$$

$$C_i = 1.811\left(\frac{100\sqrt{R}}{m+\sqrt{R}}\right) = \frac{181\sqrt{R}}{m+\sqrt{R}}$$

$$C_i = \frac{181\sqrt{R}}{m+\sqrt{R}}$$

Ejemplo de aplicación: resolveremos el mismo problema analizado con la fórmula de Bazin, por lo tanto: R = 4.1 ft = 1.249 m, S = 0.005.

El valor de "m" será el correspondiente al β de Bazin (tabla T-1)

m = 0.20

a).- Sistema Métrico:

$$C_m = \frac{100\sqrt{R}}{m+\sqrt{R}}$$

$$C_m = \frac{100\sqrt{1.249}}{0.20 + \sqrt{1.249}} = 84.82$$

$$V = C\sqrt{RS} = 84.82\sqrt{1.249 \times 0.005} =$$

$$V = 6.70\ m/seg = 22.00\ ft/seg$$

b).- Sistema inglés:

$$C_i = \frac{181\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} = \frac{181\sqrt{4.1}}{0.20 + \sqrt{4.1}} = 164.73$$

$$V = C\sqrt{RS} = 164.73\sqrt{4.1 \times 0.005} =$$

$$V = 23.58\ ft/seg = 7.18\ m/seg$$

- Estas fórmulas solo se cumplen utilizando dimensiones en metros ó fts. según sea el sistema adoptado. Y "m" es el mismo valor para ambos sistemas.