CAPITULO III

DINAMICA DE FLUIDOS

3.1 DEFINICION Y CLASIFICACION DE FLUJOS

3.1.1 FLUJO. Estudio del movimiento de un fluido. En el estudio de dicho movimiento se involucra las leyes del movimiento de la Física, las propiedades del fluido y características del medio ambiente o -- conducto por el cual fluyen. La rama de la Hidráulica que se encarga de estudiar dicho movimiento le corresponde a la Hidrodinámica.

La clasificación de flujos puede realizarse de muchas maneras,- atendiendo al cambio de velocidad y dirección que sufren las partículas debido al espacio recorrido, al cambio de velocidad, dirección y posición de las partículas respecto al tiempo, a las variaciones de- las propiedades respecto al tiempo o a los procesos Termodinámicos - que se puedan presentar en dichos movimientos. Así, un flujo puede- ser: laminar, turbulento, ideal, permanente, no permanente, uniforme, no uniforme, estable, inestable, estacionario, reversible, irreversible, adiabático, etc.

3.1.2 FLUJO LAMINAR: Es aquel en el que el movimiento de las partículas tiene solamente el sentido y la dirección del movimiento principal del fluido. Se puede presentar en un conducto cerrado trabajando a presión (tubería), en un conducto abierto (canal) o en conducto definido por el medio estudiado (chorros de líquido, hilos o volumenes definidos de gases, no miscibles en el medio circundante, etc.).

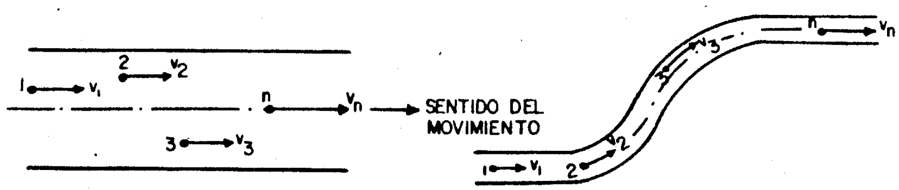


Figura 3.1. Trayectoria de las partículas en un flujo laminar.

FLUJO TURBULENTO: Es aquel en el que las partículas del fluido tienen desplazamiento en sentidos diferentes al del movimiento principal del fluido. Se pueden presentar en el mismo tipo de conductos referidos al régimen laminar.

En este tipo de flujo al moverse las partículas con movimiento errático tiene como consecuencia el que se presenten colisiones entre ellas, y ésto genera cambios en la cantidad de movimiento (al ser los choques inelásticos), que se manifiestan como una pérdida de energía.

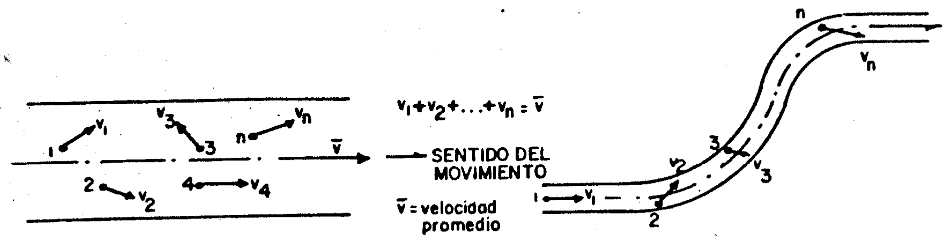


Figura 3.2. Trayectoria de las partículas en un flujo turbulento con componentes de velocidad en direcciones distintas al sentido del flujo.

La clasificación de flujos en laminar o turbulento se determina por el número de Reynolds expuesto en el tema 1.

Para calcular las pérdidas de energía, que en el flujo laminar son ocasionadas por la fricción, se utiliza la ecuación:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad \text{(Ley de Newton de la viscocidad)}$$

y en el flujo turbulento que son ocasionadas por los cambios en la cantidad de movimiento, se utiliza la ecuación:

$$h = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \text{(Ecuación de Darcy -Weisbach)}$$

Donde:

f = Coeficiente de fricción

L = Longitud del tubo

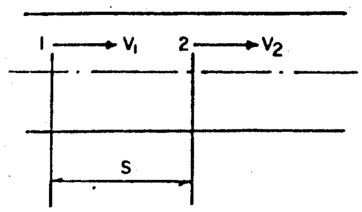
V = Velocidad media

D = Diámetro

g = Aceleración de la gravedad

EL SABER DE MIS HIJOS HARA MI GRANDEZA
BIBLIOTECA
ESCUELA DE INGENIERIA

3.1.4 FLUJO UNIFORME: Se dice que un flujo es uniforme cuando en - - cualquier parte del fluido el vector de velocidad es idéntico con -- respecto al espacio.



$$V_1 = V_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = 0$$

Figura 3.3. Representación teórica del flujo uniforme.

El flujo es no uniforme cuando existen cambios de velocidad con- respecto al espacio.

$$\frac{\partial V}{\partial S} \neq 0$$

3.1.5 FLUJO PERMANENTE: Se dice que un flujo es permanente cuando las propiedades de un fluido y las condiciones del movimiento del mismo - no cambian en un punto con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \; ; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \; ; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \; ; \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Donde:

P = Presión

ρ = Densidad

V = Velocidad media

Z = Posición respecto a una referencia

T = Temperatura

3.2 METODOS DE ANALISIS PARA LA APLICACION DE LAS ECUACIONES BASICAS

En la solución de cualquier problema de Hidrodinámica necesariamente debemos plantear un método de análisis, Así como en la Mecánica básica se utiliza el diagrama de cuerpo libre, en este capítulo- emplearemos los términos de sistema y volumen de control.

Sistema.- Se define como una cantidad de masa de cierto mate--- rial y se diferencía de lo demás que se conoce como medio circundante. La masa del sistema permanece inalterable bajo cualquier proceso.

En Hidráulica interpretaremos con el nombre de sistema a una -- cantidad fija de masa sobre la cual se analizan las fuerzas que se están ejerciendo sobre ella y su resultante inercial $\left(m \frac{dv}{dt}\right)$. La característica primordial del concepto de sistema es:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right) sist = 0$$

Proceso.- Se define como el conjunto de estados por los que pasa un sistema. Un estado es el conjunto de características físicas que - definen en un momento dado a un sistema, tales como la presión, velocidad, posición, densidad, temperatura y otras propiedades químicas - internas.

Volumen de Control.- Es una región fija constante en el espacio que es utilizada para estudiar procesos en donde el movimiento se presenta fuera y dentro de este espacio, generalmente el volumen de control se hace coincidir con la forma de la tubería, canal, depósito, - etc., donde se está estudiando el fenómeno.

En Hidráulica, una manera alterna de analizar los efectos ocasionados por las fuerzas, consiste en fijar un volumen (de espacio), a través del cual están fluyendo partículas de fluido; cuando este método es utilizado, a este volumen se le denomina volumen de control y su característica principal expresada matemáticamente, es la siguiente:

$$\frac{d\,Vvc}{dt} = 0$$

Vvc = Volumen dentro del volumen de control.

Superficie de Control.- Recipiente real o supuesto que define - al volumen de control. En la superficie de control se pueden definir áreas de control que son superficies a través de las cuales entra o- sale fluido.

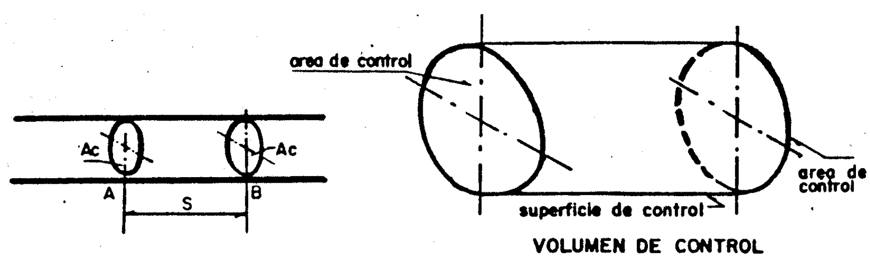


Figura 3.4. Flujo a presión en una tubería en la cual se estudia las características del flujo entre dos secciones A y B que definen junto con el área perimetral el volumen de control.

3.3 ECUACION DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad se desarrolla a partir del Principio General de la Conservación de la Masa, el cual establece que la masa dentro de un sistema, permanece constante, esto es:

$$\frac{d\ (m_{sist})}{dt} = 0$$

Para el desarrollo de ésta, utilizaremos el siguiente ejemplo:

Supongamos un depósito en forma de cubo de $1m^3$ de volumen el cual inicialmente, se encuentra lleno de agua hasta la mitad ($.5m^3$) y la otra mitad de aire. La densidad del agua la tomaremos como 1000 Kg_m/m^3 y el aire a 1.2 Kg_m/m^3, el depósito se alimenta por una tubería en la parte superior del mismo, que proporciona 5 Kg_m/seg de agua y en la parte inferior se conecta una tubería por la que se extraen 3 Kg_m/seg. El volumen de control lo haremos coincidir con las paredes del depósito.

Deseamos determinar cual será la masa de los 2 fluidos en el depósito 10 segundos después, partiendo de las condiciones iniciales.

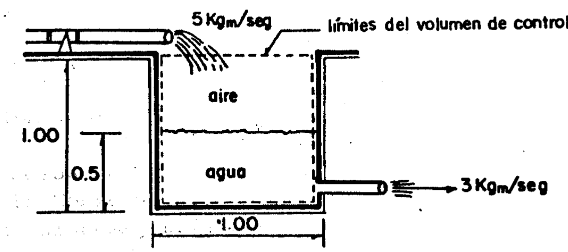


Figura 3.5. Volumen de control en forma de cubo, que contiene dos fluídos distintos. Sirve para estudiar el cambio de masas.

La masa inicial del depósito es de:

$$m_o = 1000\ Kg_m/m^3 \times 0.5\ m^3 + 1.2\ Kg_m/m^3 \times 0.5\ m^3$$

$$m_o = 500.6\ Kg_m$$

La masa que entra al depósito en 10 segundos será:

$$m_{ent} = 5\ Kg_m/seg \times 10\ seg. = 50\ Kg_m$$

La masa que sale del depósito en 10 seg. será:

$$m_{sal} = 3\ Kg_m/seg \times 10\ seg. = 30\ Kg_m$$

Por lo tanto, la masa final en el depósito será de:

$$m_f = 500.6 \text{ Kg}_m + 50 \text{ Kg}_m - 30 \text{ Kg}_m = 530.6 \text{ Kg}_m$$

El resultado anterior es un caso particular de la ecuación de -- continuidad, la cual presentada en una forma general nos queda:

$$m_{f_{vc}} = m_{o_{vc}} + \dot{m}_{ent}\ \Delta t - \dot{m}_{sal}\ \Delta t$$

Esta ecuación nos representa la forma general de la ecuación de continuidad.

Donde:

$\dot{m}_{ent}$ = La rapidéz con que entra la masa al volumen de con- - trol.
$\dot{m}_{sal}$ = La rapidéz con que sale masa del volumen de control
Δt = El tiempo que transcurre entre las condiciones iniciales y finales.

Sin embargo, la ecuación presentada de esta forma, es poco aplicable a la solución de problemas hidráulicos. Por éste motivo la representación de ésta se hace en base a las características geométricas del depósito, los conductos y las propiedades de los fluidos.

A continuación,las variables de la ecuación de continuidad en la forma general las pondremos en función de éstas características:

$$m_o = \int_{vc} \rho_o \, d\,Vol$$

$$m_f = \int_{vc} \rho_f \, d\,Vol$$

Sustituyendo estas 2 ecuaciones en la general:

$$\int_{vc} \rho_f \, dVol = \int_{vc} \rho_o \, dVol + \dot{m}_{ent}\ \Delta t - \dot{m}_{sal}\ \Delta t$$

Como el volumen de control no cambia con respecto al tiempo - - $\left(\frac{d\ Vol\ vc}{dt}\right) = 0$, el cambio en la masa del volumen, se debe a un cambio de la densidad inicial con respecto a la final.

$$\Delta\rho = \rho_f - \rho_o$$

Restando el término $\int_{vc} \rho_o \, d\,Vol$ de ambos miembros de la ecuación y dividiendo entre Δt:

$$\int_{vc} \frac{\Delta\rho}{\Delta t} \, dVol = \dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal}$$

cuando $\Delta t \rightarrow 0$, la ecuación anterior queda de la forma:

$$\int \frac{d\rho}{dt}\, dVol = \dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal}$$

Es necesario aclarar que la densidad en el depósito no es la densidad del aire ni la del agua, sino la densidad combinada de los 2 -- fluidos en el volumen de control, o sea:

$\frac{d\rho}{dt}$ = cambio de densidad de la masa en el volumen de control con respecto al tiempo.

Lo siguiente será expresar las variables $\dot{m}ent$, $\dot{m}sal$, en términos de las características geométricas del conducto y la densidad del fluido que fluye a través de éste.

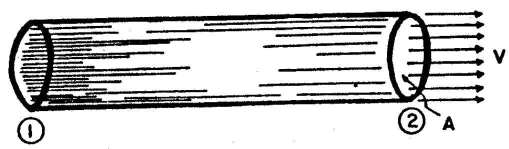


Figura 3.6. Flujo a través de un conducto cuyas limitaciones físicas (pared) definen junto a las secciones (1) y (2) un volumen de - control. Las áreas (1) y (2) se consideran como áreas de control, -- siendo estas áreas, de entrada y salida respectivamente.

Supongamos una tubería circular con sección transversal de área - A, donde el fluido tiene una densidad ρ y se mueve a una velocidad constante V, la cantidad de masa que sale por la sección 2 será:

$$\dot{m}sal = VA\rho$$

El término VA se define en hidráulica como el gasto Q y sus di- - mensiones se expresan en m^3/seg. Este concepto es utilizado con mas frecuencia que el concepto de variación de masa ($\dot{m}$), por la razón de que la densidad de un líquido se considera como constante.

Ahora, hagamos en la tubería sobre la sección 2, un corte a un ángulo θ, y dejemos todas las demás variables constantes.

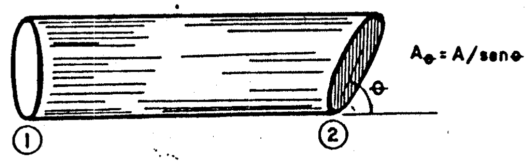


Figura 3.7. Volumen de control en el cual se varió el área de salida.

Como se puede observarse $A_\theta > A$, pero el gasto es el mismo, - la explicación a ésto es que la ecuación que define la cantidad de masa de salida sólo es aplicable si el área y la velocidad forman un ángulo de 90°, en caso de no ser así, la ecuación se debe expresar de la siguiente manera:

$$\dot{m}_{sal} = V\, A\, \rho \,\text{sen}\, \theta$$

Siendo esta expresión más general que la anterior.

Ahora incluiremos en esta ecuación la condición de que el flujo tenga velocidad variable en la sección, para ésto consideremos la sección transversal del lecho de un río, donde la velocidad en cada punto es variable.

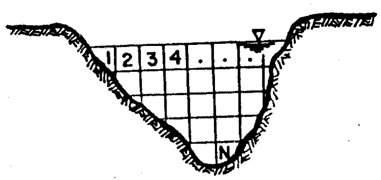


Figura 3.8. Sección transversal de un río.

Para medir el valor del gasto, la sección es dividida en cuadrículas, y se supone la velocidad constante en cada de una de éstas, realizándose mediciones para obtener el gasto de cada una, siendo éste:

$$\dot{m}_{sal_i} = V_i\, A_i\, \rho_i\, \text{sen}\, \theta$$

El subíndice i nos indica el número de la cuadrícula. Suponemos- por generalidad que la densidad y el ángulo θ también cambian de una cuadrícula a otra.

Para obtener el valor de la masa total, sumaremos el valor de - la masa que pasa a través de cada cuadrícula, obteniéndose

$$\dot{m}_{sal} = \sum_{i=1}^{n} V_i \; A_i \; \rho_i \; \text{sen}\; \theta_i$$

Por último, si suponemos que el valor del área de las cuadrículas A_i tiende a cero, ésto implica a su vez que el límite de la sumatoria tiende a infinito, por lo tanto:

$$\dot{m}_{sal} = \lim_{n \to \infty} \Sigma \; V_i \; A_i \; \rho_i \; \text{sen}\; \theta_i$$

Esta última expresión quedaría representada como:

$$\dot{m}_{sal} = \int_{A_{sal}} \rho \, V dA \; \text{sen}\; \theta$$

Realizando un análisis similar en la sección 1 de la figura obtendremos:

$$\dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal} = \int_{A_{ent}} V \; A \; \rho \; \text{sen}\; \theta - \int_{A_{sal}} V \; A \; \rho \; \text{sen}\; \theta$$

$$= \int_{vc} \frac{d\rho}{dt} \; d \; Vol$$

Que es la ecuación generalizada de continuidad.

Como se puede observar en el desarrollo de la ecuación de continuidad hasta llegar a la ecuación general, lo que se ha hecho es ir agregando restricciones de ángulos, velocidades, etc., a las ecuaciones algebraicas iniciales, con el propósito de generalizar más la expresión, quedando esta última en forma de una ecuación integral, que en la mayoría de los textos de Mecánica de Fluidos se expresa como:

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \; d \; Vol = - \int \rho \vec{v} \; \vec{dS} \; - \int_{A_{sal}} \rho \; \vec{v} \; \vec{dS}$$

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \; d \; Vol = \oint \rho \; \vec{v} \; \vec{dS}$$

La representación vectorial de esta ecuación se debe al cambio de la variable diferencial dA por su representación de un vector de superficie, como se muestra en la figura:

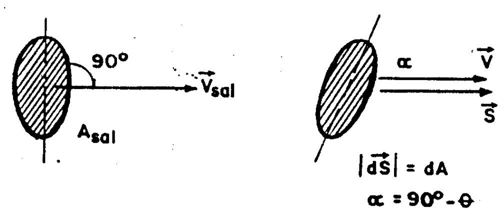


Figura 3.9. Representación vectorial de una superficie.

Como se puede observar $\alpha = 90° - \theta$, de tal manera que el producto vectorial $\vec{V}.\ \vec{ds} = V\ dS \cos\alpha = VdA \cos(90° - \theta) = V\ dA \operatorname{sen}\theta$ que es el término que aparece en la ecuación integral, el signo negativo del primer término a la derecha, se debe a que el ángulo para una sección de entrada siempre será mayor que 90° y por lo tanto el $\cos\alpha$ será negativo; para corregir ésta situación, que es provocada por la inclusión de la notación vectorial, la expresión se afecta con el signo menos.

La expresión que denota la integral de superficie $\oint$ nos indica que las entradas y salidas pueden ser más de una, generalizando aún más el resultado de esta ecuación.

Si deseamos obtener una expresión más sencilla; supongamos una tubería a la cual entra un líquido por la sección 1 y sale por la sección 2 bajo las siguientes condiciones:

a).- El flujo es permanente; $\frac{d\rho}{dt} = 0$

b).- Se trata de un sólo líquido $\rho_1 = \rho_2$

c).- La velocidad es constante en la sección de entrada e igual a V_1 y constante en la sección de salida e igual a V_2.

d).- El ángulo entre la velocidad y el área de entrada es de 90° constante en toda la sección ($\alpha_1 = 180°$) y con la mismas condiciones en el área de salida ($\alpha_2 = 0$)

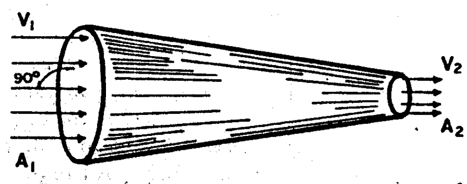


Figura 3.10. Volumen de control de sección variable. El área de control de entrada es mayor que la de salida.

$$\int \frac{d\rho}{dt}\ d\ Vol = 0 = -\int_{A_1} \rho\ \vec{v}.\ \vec{dS} = \int_{A_2} \rho\ \vec{v}.\ \vec{dS}$$

$$0 = -\rho_1 \int v_1\ dA \cos\alpha_1 - \rho \int v_2\ dA \cos\alpha_2$$

$$= -\rho_1 V_1 \cos 180° \int_{A_1} dA - \rho\ V_2 \cos 0° \int_{A_2} dA$$

$$= \rho_1 V_1 A_1 - \rho_2 V_2\ A_2$$

Como $\rho_1 = \rho_2$; entonces: $V_1 A_1 = V_2 A_2$

Esta expresión es la más usada en Hidráulica, pero como se observa sólo será aplicable si cumple las 4 condiciones establecidas para su obtención.

3.4 ENERGIA

3.4.1 ENERGIA DE UN FLUIDO: Esta energía es aquella que el cuerpo puede suministrar al efectuarse un fenómeno físico y será:

1) Energía Potencial.- Es la que suministra el cuerpo, al cambiar de altura; se determina a partir del desplazamiento del cuerpo -- considerado; depende del plano horizontal del marco de referencia que se tome.

$$Ep = Wh$$

2) Energía de Presión (Trabajo).- Es la energía que puede suministrar un cuerpo por la acción de contacto del fluido mismo

$$Ep = PVol$$

3) Energía Cinética.- La energía cinética o de movimiento, está definida por la expresión:

$$Ec. = mV^2$$

Su valor depende de la masa del cuerpo considerado y su velocidad en un momento dado. Es independiente de la dirección en la cual - dicho cuerpo se mueve y del proceso particular mediante el cual adquirió la velocidad.

Siempre que una masa sufra un cambio de velocidad, una fuerza actuará, $F = ma = m\frac{dv}{dt}$

Cuando la fuerza se ejerce sobre una distancia L, el cambio sera:

$$\Delta E = \int_{L_1}^{L_2} FdL = \int_{t_1}^{t_2} F\ Vdt = m\int_0^V Vdv$$

Ahora, la energía cinética asociada con la velocidad y la masa - se encuentra integrando la ecuación anterior, desde una velocidad cero hasta una velocidad V :

$$Ec. = 1/2\ mV^2$$

La energía cinética es una magnitud escalar y es siempre positiva (o cero) ya que V^2 es siempre positiva (o cero).

Energía Interna.- Toda la materia tiene energía que proviene - del movimiento y configuración de sus moléculas. Esta energía se conoce como energía interna y la cantidad de ésta se muestra por propiedades tales como presión, temperatura y composición química.

Esta energía no puede ser medida sino solamente por el cambio de energía interna a otro cambio de energía.

3.4.2 RELACIONES DE ENERGIA

La transferencia de energía, puede comprenderse aún mejor si tomamos en cuenta la reversibilidad o la irreversibilidad de un proceso.

Reversibilidad.- Los procesos reversibles son aquellos en los que después de completarse el proceso, se puede volver a seguir en orden inverso los distintos estados del proceso original y todas las cantidades de energía absorvidas por el medio circundante o cedidas por éste, pueden retornarse a sus estados originales. En síntesis, cuando en un sistema se realiza un proceso y el sistema vuelva a su estado inicial sin haber sufrido ningún cambio ni en el sistema, ni en el medio circundante, se dice que el proceso es reversible.

Irreversibilidad.- La irreversibilidad de manera contraria, la encontramos en procesos en los que no podemos seguir en orden inverso los estados del proceso; tal es el caso del movimiento del gas por electricidad, en el que el gas no puede regresar electricidad al sistema eléctrico.

La irreversibilidad de un proceso está presente siempre que:

1) El calor fluya debido a una diferencia de temperatura.

2) Ocurra un choque inelástico.

3) Intervenga el rozamiento.

La irreversibilidad puede ser: Interna y Externa.

Interna.- Cuando el sistema lleva a cabo una transmisión de calor a través de una caída de temperatura.

Externa.- Cuando en el sistema exista la fricción o el rozamiento.

3.5 PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA ENERGIA

Este principio establece que, la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma. Esto lo hemos podido ver al definir los distintos tipos de energía.

Así, un cuerpo en movimiento al desplazarse de un punto (A) a otro punto (B), irá perdiendo energía cinética, mientras que su cantidad de energía potencial irá en aumento. Como ésta, podemos ver en la naturaleza una gran cantidad de transformaciones de energía.

Esta ley puede aplicarse de distintas maneras; por ejemplo, para cualquier sistema, si la energía no se crea ni se destruye:

[ENERGIA QUE ENTRA AL SISTEMA] = [INCREMENTO DE LA ENERGIA ALMACENADA] + [ENERGIA QUE SALE DEL SISTEMA]

Y

[ENERGIA INICIALMENTE ALMACENADA] + [ENERGIA QUE ENTRA AL SISTEMA] - [ENERGIA QUE SALE DEL SISTEMA] = [ENERGIA ALMACENADA FINAL]

3.6 ECUACION DE EULER DEL MOVIMIENTO A LO LARGO DE UNA LINEA DE CORRIENTE.

Línea de Corriente.- Línea continua trazada en un escurrimiento de tal manera que su dirección en cada punto coincide con la dirección del vector velocidad en ese punto. No hay flujo a través de una línea de corriente.

El desplazamiento de una partícula en cualquier instante tiene componentes dx, dy, dz y tiene la misma dirección que el vector velocidad V cuyas componentes son u, v, w, respectivamente. Por lo tanto:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

El sistema está formado por dos ecuaciones diferenciales independientes y cualquier línea continua que los satisfaga, constituye una línea de corriente.

Analizando una partícula de forma prismática de masa $dm = \rho dV$ que se mueve a lo largo de una línea de corriente.

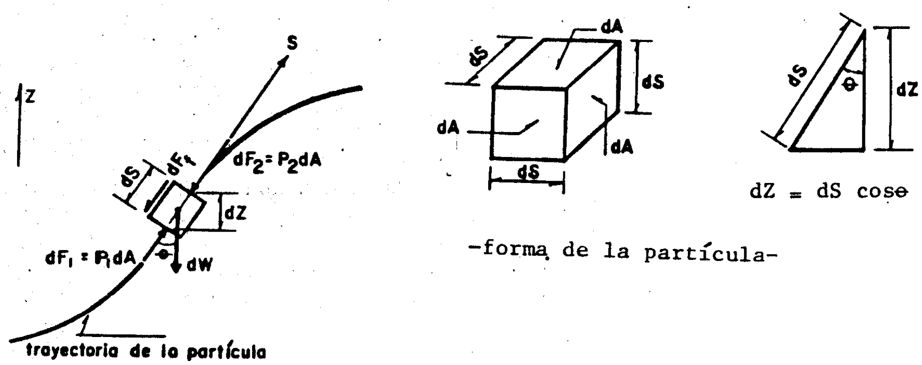


Figura 3.11. Componentes en la dirección de una línea de corriente de las fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido.

De la figura 3.5 tenemos:

$dF_f = \tau\ (4dA) = \tau\ (p_L ds)$ $\qquad P_L =$ perímetro mojado de la partícula

$\tau(p_L\, dS) = \tau\ (4\ dS)\ dS$

$dF_1 = P_1\, dA$

$dF_2 = P_2 dA = (P_1 + dP) dA$

$dW = \gamma(dVol) = \gamma(dA\ dS)$

Aplicando la segunda Ley de Newton, F = ma en el sentido "s":

$(+)\nearrow \Sigma F_S = dm\ a_S \rightarrow dF_1 - dF_2 - dF_f - dW \cos\theta = dma_S$

si $dm = \rho dV = \rho dA\ dS$

Sustituyendo los valores de cada fuerza y de dm

$$P_1 dA - (P_1 + dP)\ dA - \tau p dS - \gamma dA\ dS \cos\theta = \rho dA\ dS\ a_S$$

$$- dP\ dA - \tau p dS - \gamma dA\ dZ = \rho dA\ dS\ a_S$$

$$- dP \frac{dA}{dA} - \frac{\tau\, pdS}{dA} - \frac{\gamma dA\ dZ}{dA} = \rho dS\ a_S$$

$$- dP - \frac{\tau\, pdS}{dA} - \gamma dZ = \rho dS\ a_S$$

Dividiendo la expresión entre γ:

$$-\frac{dP}{\gamma} - \frac{\tau pdS}{\gamma dA} - \frac{\gamma dZ}{\gamma} = \frac{\rho dS\ a_S}{\gamma} \quad \text{si} \quad \gamma = \rho g$$

$$-\frac{dP}{\gamma} - \frac{\tau p dS}{\gamma dA} - dZ = \frac{\rho dS\ a_S}{\rho g}$$

$$-\frac{dP}{\gamma} - \frac{\tau dS}{\gamma \frac{dA}{p}} - dZ = \frac{a_S}{g} dS$$

si $a_S = \frac{dV}{dt}$ y $V = \frac{dS}{dt}$ entonces $a_S = \frac{\partial V}{\partial S}\frac{dS}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{dt}{dt}$

Sustituyendo a_S y si $\frac{dA}{p} = R_H =$ Radio Hidraulico

$R_H =$ Area/perimetro mojado

$$-\frac{dP}{\gamma} - \frac{\tau dS}{\gamma R_H} - dZ = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial V}{\partial S}\frac{dS}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{dt}{dt}\right) dS \quad \ldots .(A)$$

La ecuación anterior es la ecuación de Euler.

Si el flujo es permanente:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{dP}{\gamma} - \frac{\tau dS}{\gamma R_H} - dZ = \frac{1}{g}\left(V\frac{dv}{dS}\right) dS$$

$$-\frac{dP}{\gamma} - \frac{\tau dS}{\gamma R_H} - dZ = \frac{1}{g} V\, dv \quad \ldots\ldots (B)$$

Ecuación de Euler para un flujo de tipo permanente considerando las - fuerzas de fricción.

Integrando la ecuación de Euler entre los puntos 1 y 2 en una li nea de corriente.

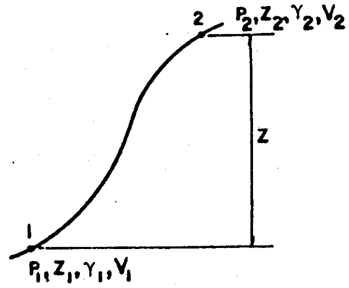


Figura 3.12. Trayectoria de las partículas entre dos puntos, (1) y (2) a través de una línea de corriente.

Si $\gamma_1 = \gamma_2$ por ser un mismo líquido:

$$\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{\gamma} + \int_{Z_1}^{Z_2} dZ + \int_{V_1}^{V_2}\frac{VdV}{g} + \int \frac{\tau dS}{\gamma R_H} = 0$$

$$\frac{P}{\gamma}\Bigg]_{P_1}^{P_2} + Z\Bigg]_{Z_1}^{Z_2} + \frac{V^2}{2g}\Bigg]_{V_1}^{V_2} + \int\frac{\tau dS}{\gamma R} = 0$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} + Z_2 - Z_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_r = 0$$

$$-\frac{P_1}{\gamma} - Z_1 - \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_r = 0$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_r \quad \ldots\ldots (C)$$

Ecuación del movimiento para una linea de corriente para un flujo --- permanente.

El término $\int \frac{\tau\, dS}{\gamma R_H}$, Se interpreta como la energía por unidad de peso,- utilizada para vencer las fuerzas de fricción y que se transforma en- energía calorífica no aprovechable en el movimiento. Por esta razón- se considera una pérdida de energía y se designa por h_r.

La ecuación anterior (C) analiza el movimiento de una partícula de fluido a través de una trayectoria en base a la energía disponible en un punto inicial y en un punto final, además de considerar- las perdidas de energía útil durante su recorrido. Cada variable de - la ecuación representa una forma de energía, siendo:

$\frac{P}{\gamma}$ = Trabajo o energía de flujo por unidad de presión.

Z = Energía potencial por unidad de peso

$\frac{V^2}{2g}$ = Energía cinética por unidad de peso de fluido que se mueve a través de la trayectoria

h_r = Pérdidas de energía útil por unidad de peso

$E_1 = \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g}$ = Energía de la partícula en el punto uno

$E_2 = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_r$ = Energía de la partícula en el punto dos-

$E_1 = E_2 + h_r$ (Ley de la conservación de la Energía, Primer - -- principio de la Termodinámica).

Si despreciamos las pérdidas de energía en la ecuación (C) - obtenemos la ecuación de Bernoulli para el movimiento de una partícula através de una linea de corriente; quedando de la siguiente manera:

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad \ldots \quad (\ D\ )$$

Cada linea de corriente tendrá distinto valor de energía cinética. - Si consideramos un conjunto de lineas de corriente las velocidades de las partículas serán distintas en cada linea de corriente en una sección transversal estudiada y por lo tanto su energía cinética también.

La solución a este problema es la de incluir un factor de corección para la energía cinética que se conoce como coeficiente de Coriolis (α)

El factor de corrección se usa cuando se considera el escurrimiento completo como si fuera un tubo de corrientes (conjunto de li- - neas de corriente contiguas) con velocidad promedio V en cada sección transversal. La energía cinética por unidad de peso no es el prome-- dio de $\frac{v^2}{2g}$ sino de $\frac{V^2}{2g}$ entonces: $\alpha\frac{V^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$

Donde:

v = velocidad de la partícula en una*(dist. de velocidades) linea de corriente.

V = velocidad media del flujo en la sección estudiada

α ; corrige el error de considerar el valor medio de la velocidad

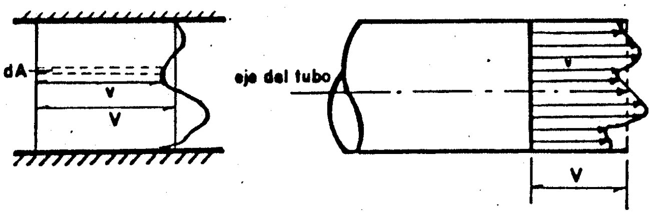


Figura 3.13. Distribución de velocidades en un conducto cerrado para un flujo turbulento.

La energía cinética total correspondiente al peso del volumen del líquido que atravieza la sección en la unidad de tiempo considerando el factor α, es igual

$$Ec. = \left(\alpha\frac{V^2}{2g}\right)\frac{W}{t} = \alpha\frac{V^2}{2g}\left(\gamma\frac{Vol}{t}\right) = \alpha\frac{V^2}{2g}\gamma Q = \alpha\frac{V^2}{2g}\gamma VA$$

$$\left(\alpha\frac{V^2}{2g}\right)\frac{W}{t} = \alpha\frac{\gamma V^3}{2g}$$

Siendo V = velocidad media

Del mismo modo, si procedemos estrictamente, la energía cinética correspondiente al peso W del líquido que atravieza la sección en la unidad de tiempo corresponde a la suma de tales valores considerados para cada partícula de la sección:

Siendo v la velocidad de cada partícula.

$$Ec. = \left(\frac{v^2}{2g}\right)\frac{dw}{dt} = \frac{v^2}{2g}\left(\gamma\frac{dVol}{dt}\right) = \frac{v^2}{2g}\left(\gamma\, dQ\right) = \frac{v^2}{2g}\left(\gamma v\, dA\right)$$

$$\therefore \left(\frac{v^2}{2g}\right)\frac{dw}{dt} = \frac{v^3\gamma\, dA}{2g}$$

Energía cinética correspondiente al peso de cada dV de líquido que atravieza un dA.

Integrando la expresión anterior obtenemos la energía cinética total en la sección

$$\int\frac{v^2}{2g}\frac{dw}{dt} = \frac{\gamma}{2g}\int v^3 dA$$

Según lo dicho anteriormente las expresiones (a) y (c) expresan lo — mismo; igualandolas:

$$\alpha\frac{\gamma V^3 A}{2g} = \frac{\gamma}{2g}\int v^3 dA$$

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A\left(\frac{v}{V}\right)^3 dA$$

α = 2.0 para flujos laminares — y varía entre 1.01 y 1.10 — para flujos turbulentos.

Donde $V = \frac{Q}{A} = \frac{\int v dA}{\int dA}$

En base a lo expuesto anteriormente podemos construir la ecuación de la energía para un tubo de corriente, siendo ésta:

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \quad .... \quad (E)$$

Si no hay pérdidas de energía y los coeficientes $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, la ecuación (E) adopta la forma de la ecuación de Bernoulli para un tubo de corriente

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

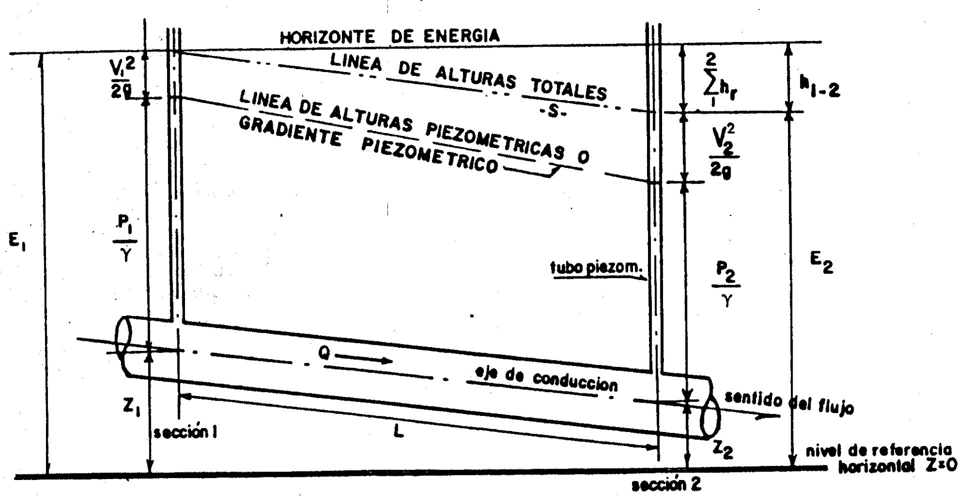


Figura 3.14. Interpretación de la ecuación de la energía para flujo permanente de un líquido en un conducto forzado.

De la figura :

$$E_1 = E_2 + \sum_1^2 h_r \quad \text{(Ecuación de la energía)}$$

$E = \frac{P}{\gamma} + Z + \alpha \frac{V^2}{2g} =$ Carga hidráulica disponible o altura total de energía en una sección cualquiera

$P = \frac{P}{\gamma} + Z$ = Carga o altura piezométrica de la sección

$\frac{P}{\gamma} =$ Energía de presión (carga estática)

$Z =$ Energía potencial

$\frac{V^2}{2g} =$ Energía cinética (carga de velocidad)

$\alpha =$ factor de corrección de la energía cinética, por efecto de la distribución no uniforme de velocidades en las secciones estudiadas.

$S =$ Pendiente de energía, gradiente de energía, gradiente de fricción

$$S = \frac{\sum_1^2 hr}{L} = \frac{h_{1-2}}{L}$$

$\sum_1^2 hr =$ pérdida de carga hidraúlica debida al efecto de la fricción.

Si $CH = \frac{P}{\gamma} + Z + \alpha \frac{V^2}{2g}$ Representa la carga hidráulica, (Energía por unidad de peso en una determinada sección) del principio de la conservación de la energía, la ecuación (C) se simplifica así:

$$CH_1 = CH_2 + \sum_1^2 hr \quad . . . . (F)$$

En una determinada sección, la energía de un volumen v de líquido, respecto al plano horizontal de referencia, es:

$E = W\,CH$; $E = (C\,H)\,\gamma\,Vol$

Y por definición de energía y potencia, en esa sección, esta última vale:

$$P = \frac{dE}{dt} = \gamma (C\,H) \frac{dVol}{dt}$$

Además por definición de gasto, la energía del líquido por unidad de tiempo, esto es, su potencia vale:

$P = \gamma Q\,(C\,H)$

Donde:

γ = Peso específico del líquido, en kg/m^3

CH = Carga hidráulica (energía total respecto al plano de referencia), en m

Q = Gasto de la sección considerada, en m^3/seg

P = Potencia de líquido, en kg m/seg

Esto es, si se multiplican ambos miembros en la ecuación (F)- por γQ, para un flujo permanente, esta expresión se puede expresar -- en la forma

$$P_1 = P_2 + \sum_1^2 Pr$$

Si al aplicar la ecuación:

$$CH_1 - \sum_1^2 hr = C\,H_2$$

entre dos secciones estudiadas, existe entre ellas una máquina hidráulica (turbina o bomba), se procederá de la siguiente manera:

$CH_1 - \sum_1^2 hr - Ct = CH_2$, Si existe turbina y $CH_1 - \sum_1^2 hr + C_b = CH_2$ si- existe bomba.

Donde:

CH = Carga hidráulica disponible

C_t = Energía cedida a la turbina (por unidad de peso)

C_b = Energía añadida por la bomba (por unidad de peso)

$\sum_1^2 hr$ = Suma de pérdidas en la trayectoria

$\sum_1^2 hr = h_f + h_L$

Donde:

h_L = Pérdidas locales debidas a cambios de diámetro, cambios de energía o accesorios.

Formula típica: $h_L = K \frac{V^2}{2g}$

h_f = Pérdidas por fricción debidas al flujo a través del conducto -- (tubería)

Fórmula básica para tuberías: $h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$ conocida como fórmula de DARCY-WEISBACH.

3.7 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

El cambio en la cantidad de movimiento es proporcional a las fuerzas aplicadas y tiene lugar en la dirección y sentido de la fuerza. La cantidad de movimiento es proporcional a la masa y a la velocidad del fluido, esto es:

$$C = mv = \text{cantidad de movimiento}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt}$$

Para el caso de un flujo permanente, el cambío de la velocidad respecto al tiempo es cero, y la ecuación queda de la siguiente forma

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dm}{dt} v$$

La ecuación es la representación matemática de la ley de impulso

El cambio de masa respecto al tiempo puede deberse a dos situaciones; un cambio en el volumen o un cambio en la densidad, bajo ésta consideración la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\frac{dC}{dt} = \rho \frac{d\ Vol}{dt} \bar{V} + \frac{d\rho}{dt} Vol \ \bar{V}$$

Para el caso de un fluido incompresible,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Entonces la ecuación queda:

$$\frac{dC}{dt} = \rho \frac{d\ Vol}{dt} \bar{V}$$

El término $\frac{d\ Vol}{dt}$ representa el gasto, así:

$$\frac{dC}{dt} = \int \rho Q \ \bar{V}$$

o bién

$$F = \int \rho Q \ \bar{V}$$

Adoptando una representación vectorial, al igual que en desarrollo de la ecuación de continuidad, tendremos:

$$F = \frac{dm}{dt} \bar{V} = \int \rho \ Vds \quad Cos\,\alpha \ \bar{V}$$

Expresión de cantidad de movimiento para un volumen de control para un flujo permanente y fluido incompresible.

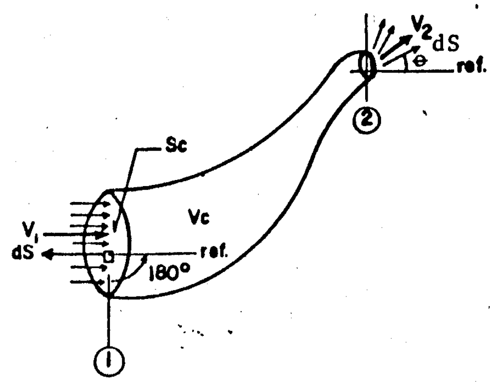


Figura 3.15. Fuerzas internas que actúan en un volumen de control con flujo uniforme perpendicular a las superficies (1) y (2).

Expresión de la cantidad de movimiento lineal para un volumen de control:

$$\Sigma F \text{ internas } V_C = \Sigma F \text{ externas } V_C$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F \underset{\text{horizont.}}{int_x} = \int_{Aent} \rho V \overline{V} \, dS \cos 180° + \int_{Asal} \rho V \overline{V} \, dS \cos 0° \cos\theta$$

$$= -\rho_1 V_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 V_2 A_2 \cos\theta$$

Para un flujo permanente:

$$Q_1 = Q_2 = V A$$

Considerando el fluido incompresible

$$\rho_1 = \rho_2 = \text{constante} = \rho$$

$$\Sigma F \, int_x = \rho Q \, (V_2 \cos\theta - V_1)$$

$$\Sigma F \underset{\text{vert.}}{int_y} = \int_{Asal} \rho V_1 \overline{V} \, dS \, sen\theta \cos 0°$$

$$= \rho \, V(V \, A) sen\theta$$

$$\Sigma F \, int_y = \rho \cdot V \, Q \, sen\theta$$

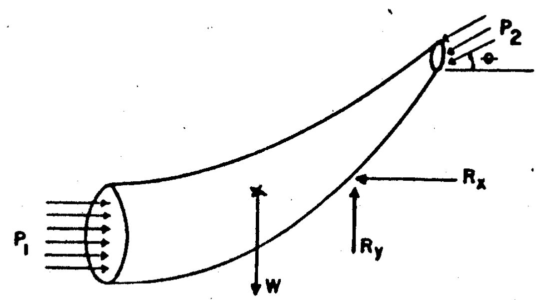


Figura 3.16. Fuerzas externas en el volumen de control.

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F\ ext_x = F\ p_1 - F\ p_2 \cos\theta - Rx$

$+\uparrow \Sigma F\ ext_y = - F\ p_2 \ \text{sen}\,\theta - W + Ry$

Aplicando ΣF int. = ΣF ext. para el sentido x,y:

$\rho Q\ (V_2 \cos\theta - V_1) = F\ p_1 - F\ p_2 \cos\theta - Rx$

$\rho Q\ (V_2\ \text{sen}\,\theta) = - F\ p_2\ \text{sen}\,\theta - w + Ry$

Rx, Ry son fuerzas de empuje sobre el tubo

Para obtener las fuerzas de presión y las velocidades aplicamos las ecuaciones de Bernoulli, continuidad y expresiones de la presión.