II. Fórmulas de Interés Compuesto

La palabra interés significa una renta, ya sea del rendimiento que esperamos obtener al invertir nuestro dinero, o del costo por financiamiento al utilizar dinero ajeno.

El propósito de este capítulo es presentar una serie de fórmulas de equivalencia considerando el interés compuesto, ya que es el más frecuentemente encontrado en la práctica que el interés simple.

2.1. Valor del dinero en el tiempo

Existe una relación entre el interés y el tiempo, que conduce a que cantidades iguales de dinero no tienen el mismo valor, si se encuentran en puntos diferentes en el tiempo, y si existe un interés de por medio.

Para tener una idea más clara de este concepto, podemos poner de ejemplo el de reconocer que sería más deseable recibir una cantidad de dinero ahora, que recibir esa misma cantidad en el futuro.

2.2. Flujo de caja

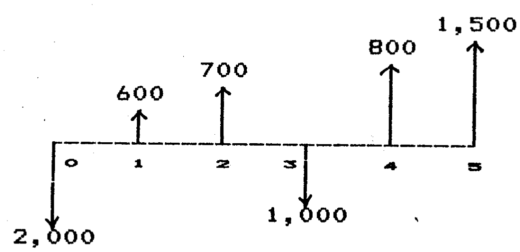
Cada alternativa se convierte en un flujo de caja, el cuál es un diagrama en el que se registran los ingresos y egresos en diferentes puntos del tiempo.

Supongamos que tenemos una alternativa la cuál presenta los siguientes ingresos y egresos durante un período de 5 años.

Año	Ingresos y Egresos
0	- 2,000
1	+ 600
2	+ 700
3	- 1,000
4	+ 800
5	+ 1,500

Los ingresos se representaran con signo positivo y los egresos con signo negativo.

Nuestro diágrama de flujo de caja para la alternativa será:



2.3. Equivalencia

Para poder juzgar las ventajas relativas de las alternativas, y tomar una decisión, deben transformarse los flujos de caja diferentes de manera que puedan compararse. Para esto, se determina un valor equivalente en algún punto del tiempo para cada una de las alternativas.

Cuando es indiferente tener una cantidad de dinero en este momento o la seguridad de recibir otra cantidad de dinero en el futuro o una serie de sumas futuras de dinero, se dice que la suma presente es equivalente a la suma futura o a la serie de sumas futuras.

Suponga que se tienen dos alternativas con las siguientes formas de pago anual provenientes de un préstamo de $ 3'000,000 a un interés anual del 20%. Los intereses se obtienen del adeudo al principio de año por la tasa de interés, y la cantidad total pagada será la suma del pago del préstamo más los intereses.

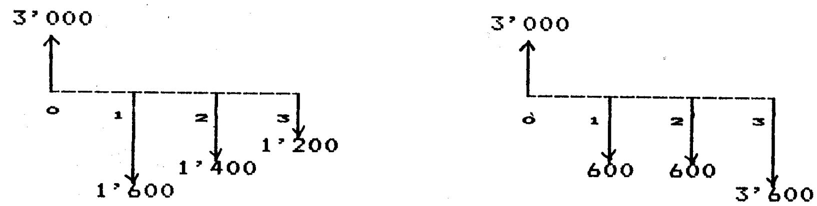
Alternativa A

Año	Adeudo al principio del año	Pago del préstamo	Intereses	Cantidad total pagada
1	3'000,000	- 1'000,000	- 600,000	- 1'600,000
2	2'000,000	- 1'000,000	- 400,000	- 1'400,000
3	1'000,000	- 1'000,000	- 200,000	- 1'200,000

Alternativa B

Año	Adeudo al principio del año	Pago del préstamo	Intereses	Cantidad total pagada
1	3'000,000	0	- 600,000	- 600,000
2	3'000,000	0	- 600,000	- 600,000
3	3'000,000	- 3'000,000	- 600,000	- 3'600,000

Los diagramas de flujo de caja para cada una de las alternativas serán:



Alternativa A Alternativa B

En las dos alternativas anteriores existen una diferencia en los planes de pago, sin embargo estos son equivalentes.

2.4. Suposiciones al resolver problemas de análisis económico.

La mayoría de los problemas de análisis económico tienden a ser muy complicados, por lo que se necesitarán las siguientes suposiciones de simplificación para manejar un problema.

1. Convención de fin de período. En los problemas, por lo general, se supone que todos los ingresos y egresos ocurren al final del período de interés.

2. Punto de vista de los estudios de análisis económico. Cuando se efectúan los cálculos para un análisis económico es necesario conocer el propósito de dicho análisis, el cuál nos llevara a tomar la mejor decisión. Seleccionar un punto de vista limitado nos llevara a decisiones subóptimas.

2.5. Interés Simple e Interés Compuesto

Cuándo se utiliza el interés simple, los intereses son función únicamente del importe de la inversión o del préstamo, el número de períodos y de la tasa de interés.

Al utilizar el interés compuesto, los intereses a su vez generan intereses.

Para ilustrar la diferencia entre estos dos conceptos, suponga que se han pedido prestados $ 1'000,000 para pagarlos dentro de dos años a una tasa de interés del 10 % anual. Si se utiliza interés simple, entonces, la cantidad a pagar sería:

1'000,000 + 1'000,000*2*0.10 = 1'200,000

Por otra parte, si se utiliza interés compuesto, el adeudo al final del segundo año sería como se muestra a continuación:

Año	Adeudo al principio del año	Intereses	Adeudo al final del año
1	1'000,000	100,000	1'100,000
2	1'100,000	110,000	1'210,000

Como se puede observar, existe una diferencia entre los adeudos obtenidos mediante estos dos enfoques. Esta diferencia se debe precisamente a los interés ($10,000) que produjeron los intereses ($100,000) generados en el primer año.

2.6. Fórmulas de equivalencia asumiendo interés compuesto discreto

Se supondrá en esta sección que los períodos de interés son discretos, es decir, las tasas de interés utilizadas serán anuales, semestrales, mensuales, etc.

Se usará la siguiente notación para simplificar la presentación:

i = Tasa de interés por período de interés
n = Número de períodos de interés
P = Una cantidad presente de dinero
F = Una cantidad futura de dinero
La cantidad futura F es una cantidad a n períodos del presente, que es equivalente a P con una tasa de interés i.
A = Ingresos o desembolsos de fin de período de una serie uniforme (pagos iguales) que continúa por n períodos, siendo la serie completa, equivalente a P ó F con una tasa de interés i.

a). Flujo de caja en forma de pago único

Suponga que se invierte una cantidad presente de dinero "P" a una tasa de interés "i" por período.

Los intereses para el primer período son $i*P$, y la cantidad total al final del primer período son $P + i*P = P*(1+i)$.

Suponga que tal cantidad se reinvierten totalmente en el segundo período, los intereses serán $i*P*(1+i)$, y la cantidad al final de este período es $P*(1+i) + i*P*(1+i) = P*(1+i)^2$.

Para el tercer período, los intereses serán $i*P*(1+i)^2$ y la cantidad al final de este período serán $P*(1+i)^2 + i*P*(1+i)^2 = P*(1+i)^3$.

Al final de "n" períodos tendremos la siguiente expresión para obtener una cantidad futura a partir de una cantidad presente a una tasa de interés "i":

$$F = P(1+i)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.1.)$$

Si expresamos la cantidad "P" en términos de F, i y n tenemos:

$$P = F \frac{1}{(1+i)^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.2.)$$

La Figura 2.1. muestra un diagrama de flujo de caja que relaciona una cantidad presente con una cantidad futura.

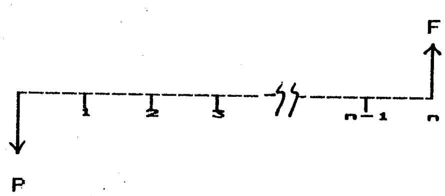


Figura 2.1. Diagrama de flujo de caja que relaciona una cantidad presente con una cantidad futura.

La expresión $(1+i)^n$ de la ecuación 2.1. recibe el nombre de factor del valor futuro de un pago único. Su notación funcional será (F/P,i,n).

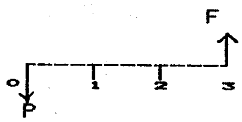
Su recíproco $1/(1+i)^n$ de la ecuación 2.2. recibe el nombre de factor del valor presente de un pago único. Su notación funcional será (P/F,i,n).

Los ejemplos de este tipo involucran a i, n, P y F, y cualquiera de estos cuatro elementos puede ser desconocido.

2.1. Una persona pide prestado la cantidad de 15 millones para pagarla dentro de 3 años a una tasa de interés del 20% anual ¿Cuánto pagaría esta persona al final del tercer año?

P = 15'000,000
i = 0.20
n = 3 años

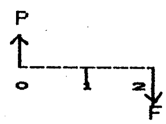
$$F = P\,(1+i)^n = 15'000,000\,(1+0.20)^3$$
$$= 15'000,000\,(1.728)$$
$$= 25'920,000$$



2.2. ¿Cuánto se tendrá que invertir a un interés del 15% anual, para acumular 10 millones dentro de 2 años?

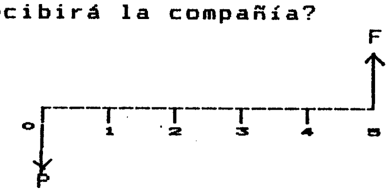
F = 10'000,000
i = 0.15
n = 2 años

$$P = F\,\frac{1}{(1+i)^n} = 10'000,000\,\frac{1}{(1+0.15)^2}$$
$$= 10'000,000\,(0.7561)$$
$$= 7'561,000$$



2.3. Una compañía puede comprar cierto terreno para almacenamiento de equipo a la intemperie. El precio de compra es de 45 millones. Se estima que el terreno sólo se necesitará 5 años y que se podrá vender a 90 millones ¿Que tasa de rendimiento anual recibirá la compañía?

P = 45'000,000
F = 90'000,000
n = 5 años



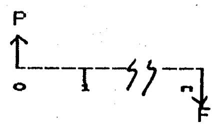
$$F = P\,(1+i)^n \rightarrow (1+i)^n = F/P$$

$$i = \left[\frac{F}{P}\right]^{1/n} - 1 = \left[\frac{90'000,000}{45'000,000}\right]^{1/5} - 1$$

$$= 0.1487 \rightarrow i = 14.87\ \%$$ anual

2.4. Cuánto tiempo tomaría una cantidad P en duplicarse, si la tasa de interés es de 25% anual.

$F = 2\ P$
$i = 0.25$



$$F = P\ (1+i)^n \rightarrow (1+i)^n = F/P$$

$$n\ \ln\ (1+i) = \ln\ F/P$$

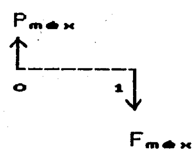
$$n = \frac{\ln\ F/P}{\ln\ (1+i)} = \frac{\ln\ 2}{\ln\ (1+0.25)}$$

$$= 3.106 \approx 3.10 \text{ años}$$

2.5. Considere usted que en este momento tiene 3 millones que a la paridad actual equivalen a mil dólares. Si los bancos en México pagan un interés anual de 15% en depósitos a un año, y los bancos en U.S.A. pagan un 4% anual en depósitos similares, ¿Cuál es el deslizamiento diario a partir del cuál conviene depositar nuestro dinero en U.S.A.?

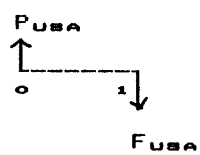
México:

$P = 3'000{,}000$
$i = 0.15$



U.S.A.:

$P = 1{,}000$
$i = 0.04$



$$F_{Mex} = 3'000{,}000*(1+0.15)^1 = 3'450{,}000$$

$$F_{usa} = 1{,}000*(1+0.04)^1 = 1{,}040$$

Igualando las dos ecuaciones y considerando a "d" como deslizamiento diario.

$$1{,}040*(3{,}000+365*d) \geq 3'450{,}000$$

$$d \geq \frac{(3'450{,}000/1040)-3000}{365} \geq 0.87 \text{ pesos/día}$$

Conviene invertir en los bancos de U.S.A. si se presenta un deslizamiento diario mayor de 0.87 pesos por dolar.

b). Flujo de caja en forma de series uniformes

Considere el caso que se muestra en la Figura 2.2., la cuál muestra un diagrama de flujo de caja que relaciona una cantidad futura con una serie de cantidades iguales al final de cada período durante "n" períodos.

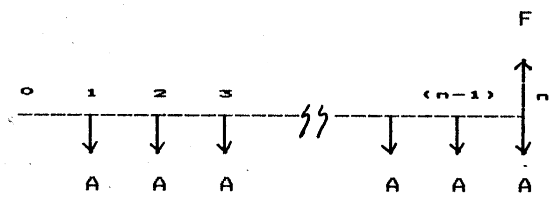


Figura 2.2. Diagrama de flujo de caja que relaciona una cantidad futura con una serie uniforme de flujos de efectivo.

Si se tiene una cantidad "A" al final de cada período durante "n" períodos, la cantidad total al final de "n" períodos será la suma de las cantidades futuras de las cantidades individuales de la serie uniforme.

Sabemos que una cantidad futura en forma individual se encuentra por medio de la ecuación 2.1., en la que $F = P(1+i)^n$

Utilizando lo anterior y haciendo P = A obtenemos que la cantidad futura del primer período será $A*(1+i)^{n-1}$, la cantidad del segundo período será $A*(1+i)^{n-2}$, y así sucesivamente hasta el final del último período en el que no habrá intereses.

La cantidad total "F" al final de "n" períodos será:

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + . . + A(1+i) + A \qquad (2.3.)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por (1+i) y restandole la ecuación (2.3.) tenemos

$$\begin{array}{rcl} (1+i)F & = & A(1+i) + A(1+i)^2 + . + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^n \\ -F & = & -A - A(1+i) - A(1+i)^2 + . + A(1+i)^{n-1} \\ \hline (1+i)F - F & = & -A \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + A(1+i)^n \end{array}$$

Despejando "F" obtenemos

$$F = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2.4.)$$

Con la ecuación (2.4.) podremos relacionar una cantidad futura al final de "n" períodos con una serie uniforme "A" dada una tasa de interés "i".

Si expresamos en términos de "A" la ecuación (2.4.) obtenemos

$$A = F \frac{i}{(1+i)^n - 1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2.5.)$$

La expresión $((1+i)^n-1) \ / \ i$ de la ecuación (2.4.) recibe el nombre de factor del valor futuro de una serie uniforme. Su notación funcional será (F/A,i,n).

Su recíproco $i \ / \ ((1+i)^n-1)$ de la ecuación (2.5.) recibe el nombre de factor del fondo de amortización. Su notación funcional será (A/F,i,n).

Si queremos encontrar una cantidad presente "P" a partir de una serie uniforme "A" (ver Figura 2.3.) sustituimos el valor de la cantidad futura de la ecuación (2.1.) en la ecuación (2.4).

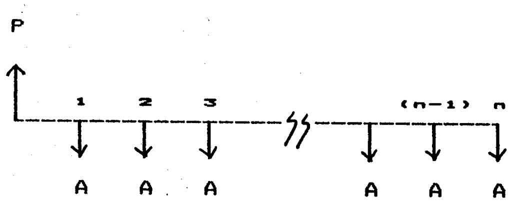


Figura 2.3. Diagrama de flujo de caja que relaciona una cantidad presente con una serie uniforme

$$P \ (1+i)^n = A \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Despejando a "P", tenemos

$$P = A \frac{(1+i)^n - 1}{i \ (1+i)^n} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2.6.)$$

Si expresamos en términos de "A" la ecuación (2.6.) obtenemos

$$A = P \frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.7.)$$

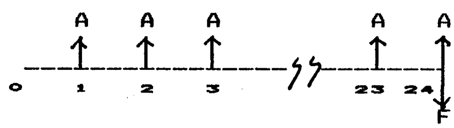
La expresión $((1+i)^n-1) \;/\; (i(1+i)^n)$ de la ecuación (2.6.) recibe el nombre de factor del valor presente de una serie uniforme. Su notación funcional será (P/A,i,n).

Su recíproco $(i(1+i)^n) \;/\; ((1+i)^n-1)$ de la ecuación (2.7.) recibe el nombre de factor del fondo de recuperación de capital. Su notación funcional será (A/P,i,n).

Para la solución de un problema, si las incógnitas cuyos valores se desean conocer son A, P ó F y los valores dados de i y n son conocidos entonces se podrán utilizar directamente las fórmulas anteriores que relacionan un pago único con una serie uniforme.

2.6. Una persona deposita al final de cada mes, durante dos años, la cantidad de 300 mil. Si la cuenta de ahorros paga el 1.5% mensual, ¿Cuánto se acumularía al final del segundo año?

A = 300,000
i = 0.015
n = 24 meses



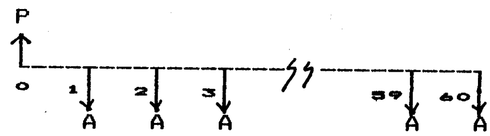
$$F = A \left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

$$= 300{,}000 \left[\frac{(1+0.015)^{24} - 1}{0.015}\right] = 300{,}000 \; (28.6335)$$

$$= 8'590{,}056$$

2.7. Cuál es el tamaño de 60 mensualidades que resultan de la compra de un terreno con valor de 80 millones, si la tasa de interés es de 30% anual, y las condiciones de pago son 10% de enganche y el resto se reparte por igual en mensualidades.

P = 0.90 (80'000,000) = 72'000,000
i = 0.30/12 = 0.025
n = 60 meses



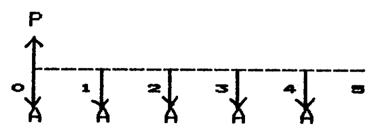
$$A = P\left[\frac{i}{(1+i)^{n}-1} + i\right]$$

$$= 72'000,000\left[\frac{0.025}{(1+0.025)^{60} - 1} + 0.025\right]$$

$$= 72'000,000\ (0.03235) = 2'329,445$$

2.8. Un vehículo tiene una vida útil de 5 años, al principio de cada año se paga una prima de seguro de 500 mil. Si la tasa de interés es de 15% anual ¿Cuál es el capital presente equivalente de las primas pagadas?

A = 500,000
i = 0.15
n = 4 años



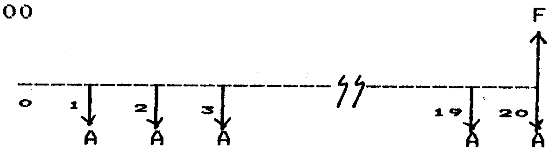
$$P = A\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i(1+i)^{n}}\right] + A$$

$$= 500,000\left[\frac{(1+0.15)^{4} - 1}{0.15*(1+0.15)^{4}}\right] + 500,000$$

$$= 1'427,489 + 500,000 = 1'927,489$$

2.9. Qué gasto uniforme anual al final del año, durante 20 años, es justificable para evitar el gasto de 350 millones dentro de 20 años, si la tasa de interés es de 10%.

F = 350'000,000
i = 0.10
n = 20 años

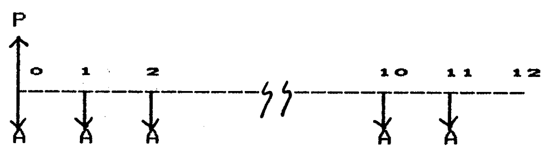


$$A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$= 350'000,000 \quad \frac{0.10}{(1+0.10)^{20} - 1}$$

$$= 350'000,000 \; (0.01746) \quad = \quad 6'110,869$$

2.10. El propietario de un terreno tiene dos opciones de contrato por su propiedad,
1. Contrato de arrendamiento por un año por un alquiler de 28 millones pagado por anticipado.
2. Renta mensual de 2.5 millones pagadera al principio de cada mes.
¿Qué tasa de interés pagada por anticipado hace el pago equivalente a la renta mensual?



P = 28'000,000 - 2'500,000 = 25'500,000
A = 2'500,000
n = 11 meses

Igualando la cantidad presente a las amortizaciones durante 11 períodos obtenemos la tasa de interés.

$$P/A = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] \qquad P/A = 25'500/2'500 = 10.20$$

Proponiendo valores de "i" para 1 y 1.5%, obtenemos:

$$i = 1\% \qquad P/A = \left[\frac{(1+0.01)^{11} - 1}{0.01 \; (1+0.01)^{11}} \right] = 10.3676$$

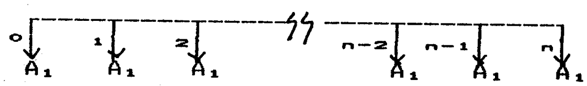
$$i = 1.5\% \qquad P/A = \left[\frac{(1+0.015)^{11} - 1}{0.015\,(1+0.015)^{11}}\right] = 10.0711$$

Interpolando para $P/A = 10.20$, obtenemos una tasa de interés mensual de 1.28 %.

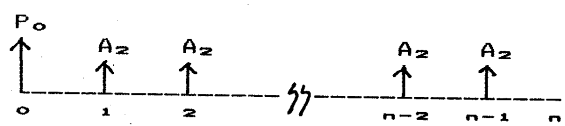
2.11. Se está organizando una serie de cursos de tipo social en una entidad y se requiere una casa para sus instalaciones. Un funcionario de una empresa local de finca raíz acepta arrendar a la organización una casa aceptable y pagar todos los costos de mantenimiento por 4 millones mensuales pagaderos al principio de cada mes. La sociedad puede adquirir un terreno por 110 millones y construir allí una casa con un costo de 140 millones. Si la sociedad es dueña de la casa, debe pagar mensualmente 1.3 millones en mantenimiento, impuestos y seguros. ¿Cuántos años serán necesarios con una tasa de interés del 12%, antes que la nueva casa se pague a sí misma.

Flujo de caja para la opción de arrendamiento :

$A_1 = 4'000,000$



Flujo de caja para la opción de invertir:



$P = 110' + 140'$
$= 250'000,000$

$A_2 = 1'300,000$

Para encontrar el número de períodos que habrán que transcurrir para que la opción de inversión con sus gastos de mantenimiento sean equivalentes a la opción de arrendamiento, será necesario restar los dos flujos de caja anteriores (flujo de caja diferencial).

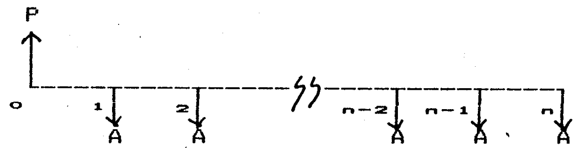
Restando los dos flujos de caja anteriores, obtenemos:

$P = P_o - A_1 = 250'000 - 4'000 = 246'000,000$

$A = A_2 - A_1 = 1'300 - 4'000 = -\ 2'700,000$

Se tomara el valor absoluto de "A"

El diágrama de flujo de caja diferencial será:



$$P = A\,(P/A, i, n)$$

Despejando P/A y sustituyendo el factor del valor presente de una serie uniforme, obtenemos

$$P\ /\ A = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\ (1+i)^n}\right] = \frac{246'000}{2'700} = 91.1111$$

Proponiendo valores de "n" para 240 y 300 meses:

$$n = 240 \qquad P\ /\ A = \left[\frac{(1+0.01)^{240} - 1}{0.01\ (1+0.01)^{240}}\right] = 90.8194$$

$$n = 300 \qquad P\ /\ A = \left[\frac{(1+0.01)^{300} - 1}{0.01\ (1+0.01)^{300}}\right] = 94.9466$$

Interpolando para P / A = 91.1111, obtenemos 244 meses (20 años 4 meses).

c). Flujos de caja en forma de gradiente uniforme

Se presente cuando un proyecto genera un flujo de caja que crece ó disminuye una cierta cantidad constante cada período.

- Aritmético

Supongase el caso que se muestra en la Figura 2.4., el cuál muestra un diagrama de flujo de caja que relaciona una cantidad futura con una serie de cantidades "G" que crecen al final de cada período durante "n" períodos.

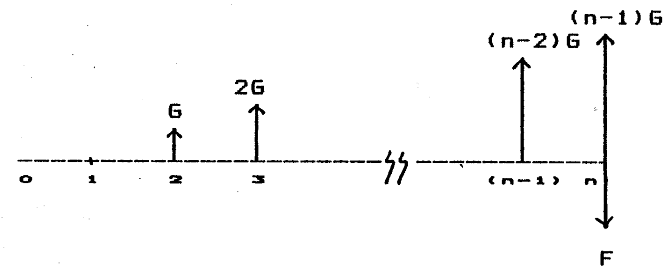


Figura 2.4. Diagrama de flujo de caja que relaciona una cantidad futura con un gradiente uniforme aritmético

Utilizando cantidades "G" que crecen al final del período, la cantidad del segundo período es mayor que el del primero en G, en el tercer período es mayor en G que el del segundo, y así sucesivamente hasta llegar al período "n" en el que tendríamos la cantidad de (n-1)G.

La cantidad total "F" al final del período "n" será la suma de las cantidades futuras de las cantidades individuales de la serie del gradiente uniforme aritmético.

Por conveniencia, puede suponerse que se inicia una serie de cantidades periódicas de "G" al final del segundo período, otra serie de "G" al final del tercer período, y así sucesivamente. Cada una de estas series termina al mismo tiempo, al final del período "n". Véase la Figura 2.5. para ilustrar mejor este paso.

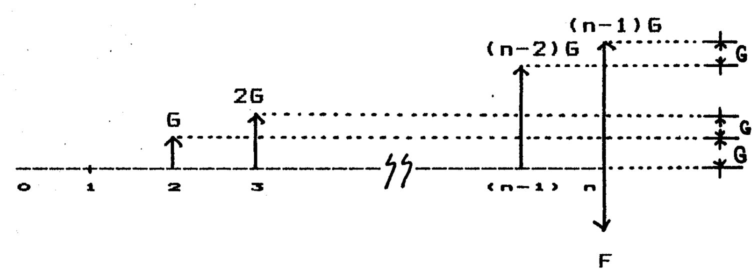


Figura 2.5. Diagrama de flujo de caja que relaciona series uniformes de cantidades "G" de una serie de gradiente uniforme en forma aritmética

Se tiene de la ecuación (2.4.) que

$$F = A \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

Utilizando lo anterior y haciendo A = G, la cantidad total "F" al final del período "n" será:

$$F = G \frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} + G \frac{(1+i)^{n-2} - 1}{i} + \ . \ .$$

$$. \ . + G \frac{(1+i)^{2} - 1}{i} + G \frac{(1+i) - 1}{i}$$

$$= \frac{G}{i} \Big[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ . \ .$$

$$+ (1+i)^{2} + (1+i) - (n-1) \Big]$$

$$= \frac{G}{i} \Big[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ . \ .$$

$$+ (1+i)^{2} + (1+i) + 1 \Big] - \frac{n\,G}{i}$$

Pero como

$$\Big[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ . \ + (1+i)^{2} + (1+i) + 1 \Big]$$

$$= \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

Entonces tenemos

$$F = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \right] - \frac{n\,G}{i}$$

$$F = G \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i} - n \right] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2.8.)$$

La ecuación (2.8.) se utilizará para determinar la equivalencia que relaciona una cantidad futura con una serie de flujo de caja en forma de gradiente aritmético.

La expresión $(1/i)\ (\ ((1+i)^n-1)/i\ -\ n\ )$ de la ecuación (2.8.) recibe el nombre del factor del valor futuro de un gradiente uniforme en forma aritmética. Su notación funcional será (F/G,i,n).

Para encontrar una cantidad presente "P" a partir de un gradiente uniforme "G" en forma aritmética (ver Figura 2.6.), sustituimos el valor de la cantidad futura de la ecuación (2.1.) en la ecuación (2.8.).

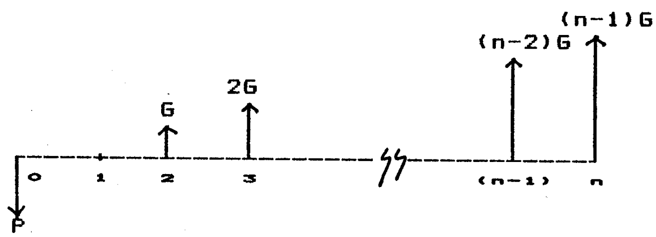


Figura 2.6. Diagrama de flujo de caja que relaciona una cantidad presente con un gradiente uniforme aritmético.

$$P(1+i)^n = G\ \frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$P = G\ \frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right] \qquad (2.9.)$$

La expresión $(1/i)\ (\ ((1+i)^n-1)/i\ -\ n\ )\ \ (1/(1+i)^n)$ de la ecuación (2.9.) recibe el nombre de factor del valor presente de un gradiente uniforme en forma aritmética. Su notación funcional será (P/G,i,n).

Si queremos encontrar una serie uniforme de cantidades iguales durante "n" períodos de una serie de gradiente uniforme "G" en forma aritmética (ver Figura 2.7.), sustituimos el valor de la cantidad futura de la serie de gradiente uniforme de la ecuación (2.8.) en la ecuación (2.5.).

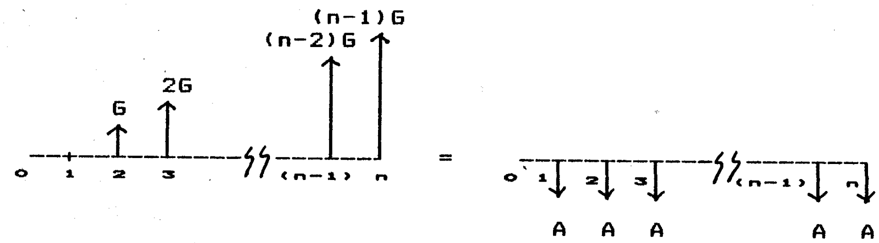


Figura 2.7. Diagrama de flujo de caja que relaciona una serie uniforme con un gradiente uniforme aritmético

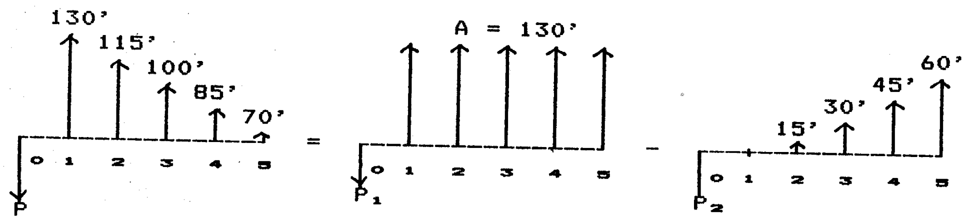
$$A = G \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$= G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2.10.)$$

La expresión $(1/i - n/((1+i)^n-1))$ de la ecuación (2.10.) recibe el nombre de factor de una serie uniforme a partir de un gradiente uniforme aritmético. Su notación funcional será (A/G,i,n).

En los problemas que se involucren a las variables i y n como conocidas y a cualquiera de las variables P, F, G ó A como incógnita, entonces la solución es sencilla, simplemente se utilizan las fórmulas anteriores que nos relacionan un gradiente uniforme en forma aritmética.

2.12. El alcalde de un pequeño pueblo pensó que era necesario reconstruir y reforzar el dique que protege al pueblo de un río cercano. El ingeniero del pueblo estima que el costo del proyecto, al final del primer año, será de 130 millones. Estima que durante los años siguientes, los costos de reparación anuales disminuirán en 15 millones, de modo que los costos del segundo año sean de 115 millones; el tercer año 100 millones, etc. El alcalde quiere saber cuál será el costo presente equivalente a los primeros cinco años de trabajos de reparación, si el interés es de 12% anual.



$$P = A\,(P_1/A,i,n) \quad - \quad G\,(P_2/G,i,n)$$

$$= A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$= 130'\left[\frac{(1+0.12)^5 - 1}{0.12\,(1+0.12)^5}\right]$$

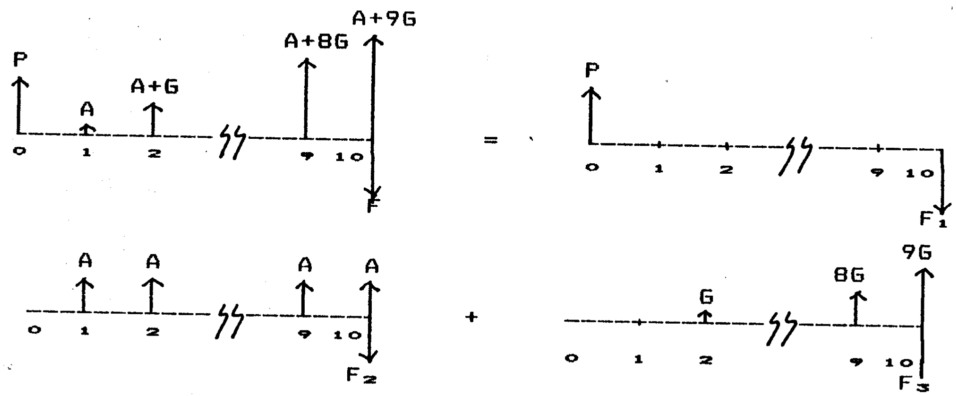
$$- \frac{15'}{0.12}\left[\frac{(1+0.12)^5 - 1}{0.12} - 5\right]\left[\frac{1}{(1+0.12)^5}\right]$$

$$= 130'\ (3.6047) \quad - \quad 125'\ (1.3528)\ (0.5674)$$

$$= 468'620{,}910 \quad - \quad 95'955{,}239 \quad = \quad 372'665{,}670$$

2.13. Está bajo consideración la compra de un lote baldío en la ciudad. El precio es de 80 millones. El dueño de esta propiedad pagará impuestos anuales sobre la propiedad de 250 mil; se estima que estos impuestos aumentarán 25 mil cada año de ahí en adelante. Se cree que si se compra esta propiedad, será necesario esperar 10 años antes de que pueda venderse a un precio atractivo. ¿Cuál debe ser el precio de venta en 10 años, para que la inversión rinda el 15% anual?

P = 80'000,000
A = 250,000
G = 25,000
n = 10 años
i = 0.15



$$F = P\ (F_1, i, n) + A\ (F_2, i, n) + G\ (F_3, i, n)$$

$$= P\ (1+i)^n + A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$+ \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] - \frac{n\ G}{i}$$

$$= 80'000,000\ (1+0.15)^{10} + 250,000 \left[\frac{(1+0.15)^{10} - 1}{0.15}\right]$$

$$+ \frac{25,000}{0.15} * \left[\frac{(1+0.15)^{10} - 1}{0.15}\right] - \frac{10\ (25,000)}{0.15}$$

$$= 80'000,000\ (4.0456) + 250,000\ (20.3037)$$

$$+ 25,000\ (135.3581) - 25,000\ (66.6667)$$

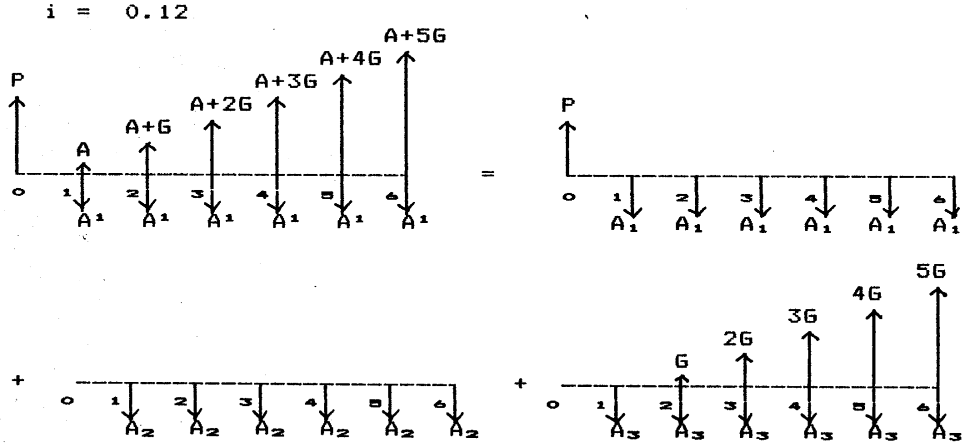
$$= 323'644,619 + 5'075,930 + 3'383,953 - 1'666,667$$

$$= 330'437,835$$

2.14. Un equipo de construcción costará 18 millones nuevo, y tendrá una vida esperada de 6 años, sin valor de rescate al final de su vida. Los egresos por impuestos, seguros, mantenimiento, combustibles y lubricantes se estiman en 4.5 millones para el primer año, 5.1 millones para el segundo, 5.7 millones para el tercero, y continuará aumentando 600 mil al año en adelante.

¿Cuál es el costo anual uniforme equivalente de este equipo si la tasa de interés es del 12% ?

$P = 18'000,000$
$A_2 = 4'500,000$
$G = 600,000$
$n = 6$ años
$i = 0.12$



$$A^1 = P(A_1,i,n) + A_2 + G(A_3,i,n)$$

$$= P\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i\right] + A_2$$

$$+ \frac{G}{i} - \frac{n\,G}{i}\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$= 18'\left[\frac{0.12}{(1+0.12)^6 - 1} + 0.12\right] + 4.5$$

$$+ \frac{0.6}{0.12} - \frac{6\,(0.6)}{0.12}\left[\frac{0.12}{(1+0.12)^6 - 1}\right]$$

$$= 18'000,000\ (0.2432) + 4'500,000$$
$$+ 600,000\ (8.3333) - 600,000\ (6.1613)$$

$$= 4'378,063 + 4'500,000 + 5'000,000 - 3'696,772$$

$$= 10'181,291$$

- **Geométricos**

Existen situaciones en que los flujos de caja de un período al siguiente pueden aumentar o disminuir de acuerdo a un porcentaje fijo, como el que se muestra en la Figura (2.8.), la cuál relaciona una cantidad presente con una serie gradiente uniforme en forma geométrica.

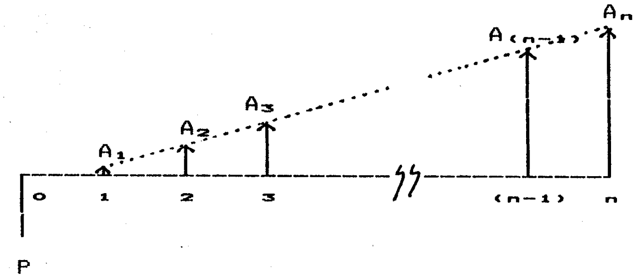


Figura 2.8. Diagrama de flujo de caja que relaciona una cantidad presente con un gradiente uniforme geométrico.

El flujo de caja para el k^{th} período se puede expresar como:

$$A_k = A_1 (1+j)^{k-1} \qquad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Donde j = Porcentaje fijo de cambio del flujo de caja entre un período y el siguiente

La cantidad total "P" al principio del período cero será la suma de las cantidades presentes de las cantidades individuales de la serie del gradiente uniforme geométrico.

Se tiene de la ecuación (2.2.) que

$$P = F \frac{1}{(1+i)^n}$$

Utilizando lo anterior y haciendo $F_k = A_k$ para el k^{th} período, la cantidad total "P" al principio del período cero será:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_1 (1+j)^{k-1}}{(1+i)^k}$$

$$= \frac{A_1}{(1+j)} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1+j}{1+i}\right]^k$$

Haciendo $X = (1+j) / (1+i)$, tenemos

$$P = \frac{A_1}{(1+j)} \sum_{k=1}^{n} X^k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.11.)$$

$$\text{Siendo } S_n = \sum_{k=1}^{n} X^k = 1 + X + X^2 + . + X^n \qquad (2.12.)$$

Multiplicando la ecuación (2.12.) por (X) y el resultado lo restamos a dicha ecuación

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1 + X + X^2 + \; . \; . + X^n \\ - X S_n & = & \quad - X - X^2 - \; . \; . - X^n - X^{n+1} \\ \hline S_n - X S_n & = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - X^{n+1} \end{array}$$

$$S_n (1 - X) = 1 - X^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X} = \frac{1 - ((1+j)/(1+i))^{n+1}}{1 - (1+j)/(1+i)}$$

Sustituyendo el valor de "S_n" en la ecuación (2.11.) tenemos

$$P = \frac{A_1}{(1+j)} \left[\frac{1 - ((1+j)/(1+i))^{n+1}}{1 - (1+j)/(1+i)} \right]$$

Simplificando el denominador

$$(1+j) \; (\; 1 - (1+j)/(1+i) \;) = \frac{(1+j)(1+i) - (1+j)^2}{(1+i)}$$

$$= \frac{(1+i+j+ij) - (1+2j+j^2)}{(1+i)} = \frac{i(1+j) - j(1+j)}{(1+i)}$$

$$= \frac{(i-j) \; (1+j)}{(1+i)}$$

Sustituyendo el resultado en la ecuación

$$P = A_1 \left[\frac{1 - ((1+j)/(1+i))^n \; ((1+j)/(1+i))}{(i-j) \; ((1+j)/(1+i))} \right]$$

$$P = A_1 \left[\frac{1- ((1+j)/(1+i))^n}{(i-j)} \right] \quad \text{Si } i \neq j \qquad (2.13.)$$

Cuándo i = j tenemos

$$P = \frac{A_1}{(1+j)} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1+j}{1+i} \right]^k$$

$$\text{Cómo} \quad \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1+j}{1+i} \right]^k = n$$

$$\text{Entonces} \quad P = \frac{n A_1}{(1+j)} \quad \text{para } i = j \quad . . (2.14.)$$

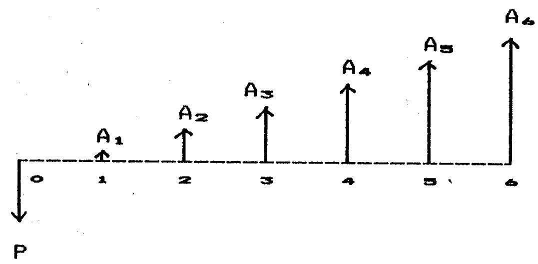
Las expresiones $[1 - ((1+j)/(1+i))^n) / (i-j)$ y $(n/(1+j))$ de las ecuaciones (2.13.) y (2.14.) respectivamente reciben el nombre de factor del valor presente de un gradiente uniforme en forma geométrica. Su notación funcional será (P/A,i,j,n).

2.15. El contrato de arrendamiento de un local comercial se estipula que semestralmente subirán las rentas 10%, Cuál será la cantidad presente que debemos tener para asegurar la renta por 3 años, si la renta inicial es de 6 millones semestralmente. El arrendador espera obtener un rendimiento de:

a). 15 % semestral
b). 10 % semestral

a). Cómo la tasa de interés es diferente al porcentaje de cambio ($i \neq j$), entonces utilizaremos la fórmula (2.13.).

$$P = A_1 \left[\frac{1- ((1+j)/(1+i))^n}{(i-j)} \right]$$



Donde : A_1 = 6'000,000
i = 15 %
j = 10 %

$$P = 6'000,000 \left[\frac{1 - ((1+0.10)/(1+0.15))^{6}}{(0.15 - 0.10)} \right]$$

$$= 6'000,000\ (4.6821) = 28'092,600$$

b). Cómo la tasa de interés es igual al porcentaje de cambio ($i = j$), entonces utilizaremos la fórmula (2.14.).

$$P = \frac{n\ A_1}{(1+j)}$$

$$= 6'000,000 \frac{6}{(1 + 0.10)} = 6'000,000\ (5.4545)$$

$$= 32'727,000$$

2.7. Fórmulas de equivalencia asumiendo interés compuesto continuo

En esta sección se desarrollarán las mismas fórmulas presentadas anteriormente, pero asumiendo una capitalización continua.

Debido a que la capitalización continua rara vez se emplea en las operaciones de las empresas, sólo se desarrollaran las fórmulas de equivalencia para flujos de caja en forma de pago único. El desarrollo de las fórmulas de equivalencia para flujos de caja en forma de serie uniforme y gradiente uniforme se lleva a cabo de la misma manera que las de interés compuesto discreto.

a). **Flujo de caja en forma de pago único**

Suponga que se invierte una cantidad presente de dinero "P" a una tasa de interés "r" por período, la cuál se capitaliza continuamente, los intereses generados a cada instante deben ser agregados a la cantidad presente "P" al final de cada infinitesimal período de interés.

Sea "m" el número de períodos de interés en que se puede subdividir un período, entonces tenemos que

Tasa de interés por período $= r / m$

No. de períodos de interés en "n" períodos $= n\, m$

Se tiene de la ecuación (2.1.) que $F = P\,(1+i)^n$.

Sustituyendo con los datos anteriores, tenemos que

$$F = P\,(1 + r/m)^{nm}$$

Cuándo el número de períodos de interés "m" tiende a infinito, la ecuación anterior se puede expresar como

$$F = P \lim_{m \to \infty} (1 + r/m)^{nm}$$

Arreglando términos, tenemos

$$F = P \left[\lim_{m \to \infty} (1 + r/m)^{m/r} \right]^{rn}$$

Si $m \to \infty$, entonces $r/m \to 0$

Sea $X = r/m$ y $X \to 0$, sustituyendo

$$F = P \left[\lim_{X \to 0} (1 + X)^{1/x} \right]^{rn}$$

Cómo $\lim_{X \to 0} (1 + X)^{1/x} = e$, entonces tenemos que

$$F = P\, e^{rn} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.15.)$$

La ecuación anterior se utilizará para determinar la equivalencia que relaciona una cantidad futura "F" con una cantidad presente "P" cuándo el interés se capitaliza continuamente.

Para encontrar una cantidad presente "P" a partir de una cantidad futura "F" cuándo se presenta el interés compuesto en forma continua, despejamos el valor de "P" de la ecuación (2.15.)

$$P = F \frac{1}{e^{rn}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2.16.)$$

La notación funcional del factor e^{rn} de la ecuación (2.15.) será (F/P,r,n). Su recíproco ($1/e^{rn}$) de la ecuación (2.16.) será (P/F,r,n).

2.16. En países con altas tasas de inflación como Bolivia, donde se han llegado a padecer inflaciones del 30 mil % anual, se puede considerar para propósitos prácticos, que la capitalización es continua, ya que los precios de los bienes y de los servicios suben casi a cada momento. Si se asume que la inflación en este país es de 0.50% cada seis horas, y un automóvil mediano cuesta 20 millones ¿cuánto costará dicho automóvil dentro de un año?

Puesto que la tasa de inflación cada seis horas es de 0.50 %, entonces, la tasa anual nominal es de 730%.

P = 20'000,000
r = (0.5%/6 hrs)*(24 hrs/día)*(365 días/año)
  = 730% /año
n = 1

$F = P*e^{rn} = 20'000,000*e^{7.30*1} = 20'000,000*(1480.30)$

$= 29,606'000,000$

2.17. Un banco ofrece en venta bonos del ahorro que pagarán al comprador 15 millones después de diez años, pero no pagará nada antes de esos diez años. Si el interés se calcula en 15% con capitalización continua, ¿a qué precio vende los bonos el banco?

F = 15'000,000
n = 10
i = 0.15

$P = F*e^{-rn} = 15'000,000*e^{-0.15*10}$

$= 15'000,000*(0.2231)$

$= 3'346,952$

2.18. Cuánto tiempo se necesita para que una cantidad de dinero se duplique, si la tasa de interés es del 25% capitalizada:

a). anualmente

$F = 2*P$
$i = 0.25$

$$n = \frac{\ln (F/P)}{\ln (1+i)} = \frac{\ln 2}{\ln (1+0.15)}$$

$$= 3.10 \text{ años}$$

b). trimestralmente

$F = 2*P$
$i = 0.25/4 = 0.0625$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln (1+0.0625)} = 11.43 \text{ trimestres}$$
$$= 2.86 \text{ años}$$

c). continuamente

$$F = P*e^{rn} \Rightarrow F/P = e^{rn} \Rightarrow \ln F/P = rn$$

$$n = \frac{\ln F/P}{r} = \frac{\ln 2}{0.25} = 2.77 \text{ años}$$

2.8. Interés nominal e Interés efectivo

El interés nominal es la tasa de interés por período sin considerar el efecto de ninguna capitalización.

El interés efectivo es la tasa de interés por período tomando en cuenta el efecto de la capitalización durante el período.

Analicemos el ejemplo entre pagar el 1% mensual y el 12% anual de un préstamo de 1 millón.

$$F_{i=12\%\ anual} = 1'000,000\ (1+0.12)^{1} = 1'120,000$$

$$F_{i=1\%\ mensual} = 1'000,000\ (1+0.01)^{12} = 1'126,800$$

Existe una diferencia en la cantidad a pagar debido a que la tasa de interés del 1% se capitaliza mensualmente durante un año, la cuál viene representando el interés efectivo; y la tasa de interés del 12% se capitaliza al año, la cuál viene siendo el interés nominal.

La fórmula general para determinar el interés efectivo por período sería:

$$I_{ef} = \frac{P*(1+r/M)^{M} - P}{P} = (1+r/M)^{M} - 1$$

donde I_{ef} = Interés efectivo por período
r = Interés nominal por período
M = Número de sub-períodos en los cuales se divide el período y que se tomaran en cuenta el efecto de la capitalización.

Del ejemplo

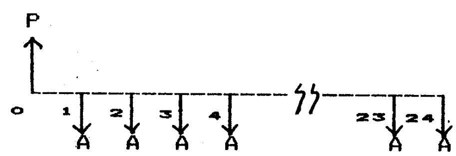
$$I_{ef} = (1+0.12/12)^{12} - 1 = 0.1268 = 12.68\ \%$$

2.19. Una persona pidió un préstamo a un banco por 5 millones a un interés del 1.5% mensual, los cuales deberá pagar en 24 mensualidades iguales. Calcular:

a). El tamaño de las mensualidades, el interés nominal y el interés efectivo.

b). El interés nominal si el banco cobra por adelantado los intereses.

a).



P = 5'000,000

$$A = P\ (A/P,i,n)$$

$$= P \left[\frac{i\ (1+i)^{n}}{(1+i)^{n} - 1}\right]$$

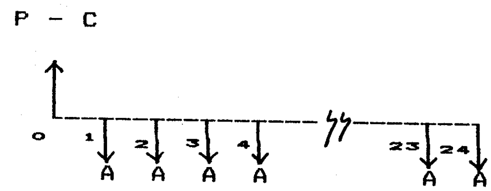
$$= 5'000{,}000 \left[\frac{0.015\ (1+0.015)^{24}}{(1+0.015)^{24} - 1}\right]$$

$= 5'000,000\ (0.0499) = 249,500$

Interés nominal $= 1.5\%\ (12) = 18\ \%$ anual

Interés efectivo $= (1+0.015)^{12} - 1 = 19.56\%$ anual

b).



C = Comisión $= 24\ (249,500) - 5'000,000$

$= 988,000$

Tenemos que $A = (P - C)\ (A/P,i,n)$

Despejando $(A/P,i,n)$

$(A/P,i,n) = A \,/\, (P - C)$

$= 249,500 \,/\, (5'000,000 - 988,000)$

$= 249,500 \,/\, 4'012,000 = 0.0622$

Pero como

$$(A/P,i,n) = \left[\frac{i\ (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Proponiendo valores de "i" en la ecuación anterior, obtenemos

i	A/P
7	0.0590
8	0.0656

Interpolando obtenemos un interés de 3.49 % mensual.

Interés nominal $= 3.49\ (12) = 41.88\ \%$ anual