

## Capítulo 3

### La propuesta: Secuencia de actividades didácticas

En este capítulo se presenta la secuencia de actividades didácticas, en primer término los objetivos, tanto generales como específicos, posteriormente los aspectos que fueron tomados en cuenta para su diseño y, finalmente, las características y descripción de cada una de las actividades didácticas que integran la secuencia. Se detalla cada una de las preguntas o indicaciones que se les hacen a los estudiantes expresando su propósito y lo que se espera que el estudiante realice.

#### 3.1 Objetivos

El objetivo general de la secuencia de actividades didácticas es:

- ◆ Promover en los estudiantes la construcción de la suma de vectores en el plano cartesiano y algunas de sus propiedades.

Este objetivo se logrará en la medida que los estudiantes a quienes está dirigida la propuesta, sean capaces de lograr los siguientes objetivos específicos:

- ◆ Diferenciar las cantidades vectoriales de las escalares.
- ◆ Identificar e interpretar los elementos que definen un vector.
- ◆ Representar gráfica, algebraica y numéricamente la información, proporcionada en una situación donde se involucra la suma vectorial.
- ◆ Realizar la conversión de la representación polar de los vectores a la representación cartesiana.
- ◆ Realizar los tratamientos correspondientes en el registro numérico (suma de componentes).
- ◆ Realizar la conversión de la representación cartesiana a la representación polar.

- ◆ Interpretar verbalmente o por escrito la información, de una situación donde está involucrada la suma vectorial, que se proporcione a través de una representación gráfica, algebraica y numérica.
- ◆ Realizar operaciones con vectores combinando métodos gráficos y numéricos.

El desarrollo de estos objetivos se logrará en la medida en que la secuencia de actividades didácticas promuevan una activación adecuada de los estudiantes, lo cual deberá lograrse mediante las estrategias didácticas propuestas.

### **3.2 Aspectos considerados para el diseño de las actividades**

Partiendo de que las actividades didácticas, no sólo deben de cumplir con el programa de la materia (Geometría Analítica), sino que además deben presentar situaciones que propician que el estudiante ponga en juego sus conocimientos previos.

Se asume también que los estudiantes deben tener un papel activo para poder estimular un aprendizaje más rico del significado del objeto matemático que se pretende promover; para ello un elemento que se considera fundamental es estimular el aprendizaje a partir de la resolución de problemas. Por lo que las actividades diseñadas giran en torno a la resolución de problemas, cuya resolución está organizada en tres momentos diferentes: trabajo individual, trabajo en equipo y discusión grupal, ya que de esa manera se crean ambientes de aprendizaje que permiten la formación de sujetos independientes, críticos, además adquieren diferentes formas de pensar, hábitos de perseverancia, curiosidad y confianza en situaciones no familiares o extramatemáticas.

El planteamiento de un problema en los estudiantes implica encontrar un camino que no se conoce de antemano, es decir construir una estrategia para encontrar la solución. Para ello se requiere tener conocimientos previos y habilidades, a través de ello se construyen nuevos conocimientos matemáticos.

Cada actividad que conforma la secuencia didáctica se caracteriza por que propicia que los estudiantes:

- ◆ Activen la propia capacidad mental.
- ◆ Ejerciten su creatividad.
- ◆ Reflexionen sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorar conscientemente.
- ◆ Adquieran confianza en sí mismos y respeten las opiniones de los demás.
- ◆ Aprendan a argumentar y contra-argumentar.

Iniciar la actividad de aprendizaje del estudiante con un problema no es sólo con el propósito de ubicar el contenido matemático en un contexto extramatemático o no, como motivador, sino que es fundamental el trabajo que él desarrolla para diseñar la estrategia que le permita resolver el problema; además es fundamental que el estudiante identifique que la o las respuestas que ha obtenido sean apropiadas para la situación planteada.

En el diseño de la secuencia de actividades didácticas se hace énfasis en los diferentes registros de representación que se utilizan para representar a los vectores, partiendo de su representación polar, que es la que se presenta comúnmente en las situaciones extra matemáticas. Por ejemplo, en los problemas de Física por lo regular se trabaja con desplazamientos, velocidades y fuerzas en los que sus características son proporcionadas por la magnitud, la dirección y sentido; pero para resolverlos se requiere hacer la conversión de dicho registro al registro de coordenadas cartesianas, por lo que los problemas serán planteados para que el estudiante desarrolle la habilidad de transformar los problemas de vectores (registro verbal, registro numérico), en otro (gráfico) donde la solución involucre triángulos rectángulos y por ello sea posible poner en juego el uso del teorema de Pitágoras.

Las actividades son presentadas en hojas de trabajo en las que se procura plantear situaciones en el contexto de Física o de Ingeniería, promoviendo siempre en primer momento las representaciones gráficas de los vectores. Como es de interés conocer las estrategias de los estudiantes, tanto en su trabajo individual como en su trabajo en equipo, las hojas de trabajo se diseñaron de tal manera que cuentan con dos espacios del mismo tamaño, uno de ellos (la parte izquierda de la hoja) está dedicado a la actividad individual y el otro (la parte derecha) al registro de la actividad en equipo (ver Anexo 2).

En dos de las actividades se incorpora el uso de tecnología computacional, en este caso particular se recurre al software GeoGebra. Una de las razones para utilizar este software se debe a que cumple con algunas de las condiciones que menciona Duval para el aprendizaje de las matemáticas, como la doble percepción de los objetos, ya que cada objeto matemático puede aparecer en una misma pantalla con al menos dos registros de representación (gráfico, numérico, analítico o lengua natural). De esta forma, se establece una permanente conexión entre diferentes registros de representación, lo cual puede ser explotado en las actividades para promover la coordinación entre ellos.

En las actividades se trabaja de manera simultánea la representación gráfica y la representación numérica, pues es importante para el estudiante que desde el comienzo, se acostumbre a visualizar las variaciones que se originan en una de esas representaciones cuando se interactúa en la otra (metáfora reorganizadora), es decir el software nos permite visualizar y manipular el objeto matemático de una manera más interactiva, además de permitir observar más registros de representación simultáneamente del mismo objeto (representación de coordenadas polares y representación de coordenadas cartesianas), de esta manera el estudiante tendrá más experiencias que le permitirán identificar la naturaleza y variabilidad del objeto matemático que se está estudiando, pero si en determinados momentos o debido a una actividad se considera necesario ocultar una de las representaciones para

favorecer la atención en el comportamiento del objeto en otro registro de representación, este software brinda la posibilidad de hacerlo.

Por otra parte el tipo de preguntas que se presentan al estudiante al estar trabajando con el software GeoGebra brindar al estudiante la posibilidad de explorar con ambientes en los cuales puede analizar, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar, privilegiando así, la actividad del alumno como medio para promover su aprendizaje.

### **3.3 Estrategia didáctica para implementar las actividades**

La estrategia didáctica para la aplicación de cada una de las actividades que forman la secuencia está planeada para realizarse en tres momentos:

- ◆ En el primero el estudiante deberá trabajar de manera individual, en este momento el estudiante tendrá la oportunidad de poner en juego sus conocimientos y habilidades a la hora de enfrentar una situación problema.
- ◆ En el segundo el estudiante deberá trabajar en equipo, en este momento tendrán la oportunidad de apoyarse en las sugerencias y observar las diferentes estrategias propuestas por sus compañeros de equipo. Todos los integrantes del equipo tendrán la oportunidad de verbalizar las estrategias que utilizaron así como los resultados obtenidos, escuchar los argumentos de otros compañeros, comparar sus resultados y estrategias, refutar en caso de que no se esté de acuerdo con sus compañeros o corregir sus estrategias o resultados cuando se considere que es lo apropiado.
- ◆ Por último se generará una discusión grupal que consiste en compartir los puntos de vista o la manera en la que los distintos equipos dieron solución a la actividad, lo cual resulta muy enriquecedor para los estudiantes porque tienen de nuevo la oportunidad de poner en juego habilidades como comunicar verbalmente sus estrategias, contrastar con

las expresadas por sus compañeros, refutar aquellos aspectos que considere no son correctos y enriquecer sus conocimientos a partir del intercambio de resultados y estrategias.

En la siguiente tabla se describe el tipo de trabajo del alumno, los beneficios que dicho trabajo aporta y también las desventajas que implica, también se incluye el trabajo del profesor en cada una de los momentos.

Momentos del trabajo del estudiante y correspondientes acciones del profesor			
Momentos del Trabajo del Estudiante	Beneficios	Desventajas	Trabajo del profesor
Individual 	Es el primer acercamiento del estudiante con el problema, cada estudiante trabaja a su propio ritmo, están seguros acerca de las herramientas y conocimientos que utiliza pues nadie lo contradice, puede utilizar sus estilos preferidos de aprendizaje concibiendo el tipo de registro que más se le facilita.	Los estudiantes no obtienen el beneficio de aprender de sus compañeros y trabajar con sus compañeros.	Es el momento en que el profesor puede: Identificar si el estudiante tiene los conocimientos previos para abordar la situación planteada. Acercarse con los estudiantes que no logran entender lo que se les pregunta y replantear los cuestionamientos o las indicaciones que se le hacen. Intervenir a solicitud del estudiante, por lo regular haciendo nuevos cuestionamientos que le permitan al estudiante reflexionar sobre los conocimientos o ideas que está poniendo en juego en la actividad.

<p>Equipo</p> 	<p>Los estudiantes tienen la oportunidad de trabajar con sus compañeros y aprender de sus compañeros.</p> <p>Los estudiantes con dificultades pueden aprender de los demás integrantes del equipo</p> <p>Los estudiantes tienen la oportunidad de presentar sus estrategias ante grupos pequeños de compañeros, así como desarrollar habilidades para argumentar y contra argumentar.</p>	<p>Los grupos deben ser seleccionados cuidadosamente para asegurar que los estudiantes pueden trabajar de forma productiva, no todos los estudiantes son capaces de trabajar a su máximo potencial en esta situación.</p>	<p>En este momento el profesor: Realiza trabajo de observador en los diferentes equipos. Interviene cuando lo considera necesario o a solicitud de los integrantes del equipo, ya sea a través de dar otras instrucciones que permitan enriquecer el ambiente de la actividad o bien replantear las preguntas o indicaciones de la misma. Detectar a los estudiantes o equipos que sería conveniente que presentaran al grupo sus estrategias y resultados que obtuvieron al resolver la actividad. Identificar las dificultades que se presentan de manera generalizada, en cuyo caso en ocasiones es conveniente solicitar suspender el trabajo en equipo para generar una discusión grupal del punto en cuestión, para posteriormente regresar al trabajo en equipo.</p>
<p>Grupo</p> 	<p>El trabajo en grupo proporciona más oportunidades para la práctica, además desarrollan habilidades como comunicar verbalmente sus estrategias.</p> <p>Además los estudiantes tienen la oportunidad de escuchar distintos puntos de vista así como otros argumentos y estrategias.</p>	<p>La evaluación del progreso del estudiante puede ser un reto ya que aunque estén trabajando en equipo o en grupo la evaluación se realiza de manera individual.</p>	<p>En este momento por lo regular hay dos acciones que realiza el profesor: Si es necesario proponer al estudiante o equipo que deberá presentar al grupo sus estrategias y resultados. Orientar la discusión de los estudiantes respecto a las estrategias y resultados obtenidos. De ser necesario centrar la atención en los puntos específicos que interesa discutir. Resaltar los aspectos o características fundamentales del objeto u objetos matemáticos que se pretende institucionalizar.</p>

Tabla 3.1 Tipo de trabajo realizado por los estudiantes y por el profesor

Es importante resaltar que en el transcurso de la actividad el profesor sólo interviene, en caso de ser necesario, para reorientar el trabajo de los estudiantes. Esto lo hace, por lo general, con preguntas que parten de alguna afirmación o pregunta hecha por los estudiantes; la intención de dichas preguntas es provocar la confrontación de las ideas expresadas, de tal forma que se refuerce lo manifestado por el alumno, o se reformule por el camino adecuado. En todo momento el profesor deberá estar atento para observar la actitud del estudiante al trabajar individualmente, en equipo o en grupo.

Otra parte importante del trabajo del profesor se realiza en la etapa final de cada actividad con la institucionalización, que es un momento en el que se establecen relaciones entre las producciones de los estudiantes y el saber cultural que toma como referencia la institución. La institucionalización es un momento donde el estudiante, a partir de lo construido en las distintas fases de la actividad, tiene la oportunidad de aclarar aspectos importantes que contribuyan al enriquecimiento del significado del objeto de estudio como parte del saber matemático.

### **3.4 Descripción de las actividades**

Las actividades didácticas están organizadas en pequeños bloques, en cada uno de ellos se centra la atención en alguno o algunos de los objetivos que se declaran para la secuencia; además, en ellos se presentan variantes con respecto a los otros bloques, por ejemplo en la forma en que se presentan los vectores, en lo que se solicita, el uso o no de apoyo tecnológico computacional, etc.

En la siguiente tabla se presenta una pequeña descripción de cada uno de los bloques en que está organizada la secuencia de actividades.

## Descripción de las actividades por bloques

Bloque	Actividades que forman el bloque	Descripción
<b>Bloque 1</b>	Actividad 1	Es el primer acercamiento que los estudiantes tienen con el objeto matemático vector y en específico con la suma de éstos, en estas dos actividades el estudiante trabaja con vectores unidireccionales, además se promueven los principales elementos que definen un vector (magnitud, dirección y sentido), así como su representación gráfica y la correspondiente representación gráfica de la suma de vectores (tanto el procedimiento para realizarla como del vector que resulta de la suma). También en estas actividades se reconoce la diferencia que existe entre el recorrido y el desplazamiento, además de resaltar la importancia que tiene el sentido de los vectores al momento de realizar la suma. Otro aspecto que se pretende pongan en juego los estudiantes es lo relativo a la diferencia que existe entre cantidades escalares y los vectores.
	Actividad 2	
<b>Bloque 2</b>	Actividad 3	En este bloque los estudiantes trabajan por primera vez con vectores que no son unidireccionales, por lo que se verán en la necesidad de realizar conversiones partiendo de las coordenadas polares hacia las coordenadas cartesianas, para poder llegar a obtener la magnitud y el ángulo que determina la dirección del desplazamiento total se deben realizar tratamiento en el registro numérico (para obtener las componentes del vector es necesario trabajar con la funciones trigonométricas y con el teorema de Pitágoras).
	Actividad 4	En las situaciones que se plantean en estas actividades las componentes de los vectores (horizontal y vertical) representan los catetos de un triángulo rectángulo (en estas actividades se cuestiona el por qué los triángulos que se forman son rectángulos) y la hipotenusa representa la magnitud del vector suma (desplazamiento total). También en estas actividades se vuelve a retomar la discusión en la que se pone en juego la diferencia que hay entre el recorrido y el desplazamiento.  En estas dos actividades también se plantean situaciones en las que se suman vectores que no son paralelos a los ejes (horizontal y vertical), en cuyo caso no se forman de manera directa triángulos rectángulos, por ello es necesario que los estudiantes construyan triángulos rectángulos (tratamiento en el registro gráfico) en los que la hipotenusa represente al desplazamiento total.
<b>Bloque 3</b>	Actividad 5	Es la primera actividad donde el estudiante parte de una representación gráfica en la que los vectores (fuerzas) que intervienen inician en el mismo punto, lo que los lleva a cuestionarse por el orden en que deben colocarse los vectores para realizar la suma en el registro gráfico, esta situación propicia la discusión respecto de la importancia o no del orden que deben tener los vectores en la suma. En este sentido señalamos que los estudiantes tienen un primer acercamiento a las propiedades asociativa y conmutativa.  También en esta situación se les cuestiona sobre las características que debe tener un vector que neutralice el efecto de las fuerzas actuando sobre una partícula, en cuyo caso se pretende que el estudiante identifique las características que debe cumplir el inverso aditivo.
<b>Bloque 4</b>	Actividad 6	En este bloque de actividades se trabaja con el software GeoGebra, por lo que el estudiante tienen la oportunidad de explorar el comportamiento del objeto matemático en distintos registros de representación (visualiza las variaciones de manera simultánea), además se promueve la coordinación entre los distintos registros de representación, y con el apoyo del software el estudiante puede conjeturar que los vectores cumplen tanto con la propiedad conmutativa como con la propiedad asociativa.
	Actividad 7	

<b>Bloque 5</b>	Actividad 8	En estas dos últimas actividades se trabajó por primera vez en contextos puramente matemáticos, particularmente en la actividad 8 es donde se plantean cuestionamientos orientados a que el estudiante reflexione sobre la estrategia que ha utilizado para resolver las situaciones que se le han propuesto en la secuencia de actividades, uno de los propósitos es ver si es capaz de definir la suma de vectores a partir de coordenadas cartesianas.
	Actividad 9	Y en la actividad 9 se espera que el estudiante sea capaz de poner en juego las estrategias y procedimientos desarrollados en las primeras actividades de la secuencia (transformación de coordenadas: de polares a cartesianas y viceversa, así como realizar la suma vectorial a partir de coordenadas cartesianas). Por lo que estas dos actividades nos permiten cerrar la secuencia poniendo en juego los conocimientos matemáticos construidos.

*Tabla 3.2 Descripción de las actividades*

### 3.4.1 Actividad 1

En esta primera actividad se espera que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos que tienen de las operaciones con números reales, ubicación de puntos en el plano cartesiano y la representación gráfica de la suma vectorial, para el logro de los siguientes:

#### **Objetivos:**

- ◆ Obtener las características (magnitud, ángulo que determina la dirección y el sentido) de un desplazamiento total que se produce a partir de desplazamientos unidireccionales.
- ◆ Identificar la diferencia entre recorrido y desplazamiento.

#### **Materiales:**

- ◆ Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- ◆ Lápiz.

#### **Tiempo estimado:**

- ◆ 30 minutos.

#### **Actividad 1:**

Un autobús va hacia el Norte ( $90^\circ$  EN), desde su punto de partida se desplaza 1 Km. antes de realizar la primera parada, después se desplaza 3 Km. antes de realizar una segunda parada, desde la segunda parada hasta su destino final se desplaza otros 4 Km.

- 1. ¿A qué distancia se encuentra de su punto de partida el autobús al momento de realizar la segunda parada?**

*La pregunta uno tiene el propósito de que los estudiantes realicen una serie de transformaciones en el mismo registro (tratamientos) que les permitan dar respuesta a esta pregunta. Además tiene la intención de que el estudiante identifique, gráficamente, que la suma de dos desplazamientos se determina colocando el punto inicial del segundo desplazamiento en el punto final del primero.*

*Se espera también que algunos estudiantes realicen una conversión del registro numérico al registro gráfico con la intención de poder aplicar la definición gráfica de la suma de vectores.*

- 2. ¿Cuál es la distancia total que recorrió el autobús de su punto de partida hasta su destino?**

*El propósito de esta pregunta es generar una discusión entre los estudiantes alrededor de si ellos pueden decir cuál fue el recorrido que realizó el autobús, ya que la información que se les proporciona está dada en términos de los desplazamientos. Se pretende que se discuta la diferencia que hay entre recorrido o trayectoria y desplazamiento.*

- 3. ¿Cuál fue el desplazamiento total de una persona que subió en la primera parada y terminó el recorrido?**

*Al igual que en la pregunta uno, en ésta se tiene el propósito de que los estudiantes realicen una serie de transformaciones en el mismo registro (tratamientos) que les permitan dar respuesta a esta pregunta. Además tiene la intención de que el estudiante identifique, gráficamente, que la suma de dos desplazamientos se determina colocando el punto inicial del segundo desplazamiento en el punto final del primero.*

*Se espera también que algunos estudiantes realicen una conversión del registro numérico al registro gráfico con la intención de poder aplicar la definición gráfica de la suma de vectores.*

- 4. Elabora un diagrama que muestre el desplazamiento total de la persona que subió en la primera parada y que llegó hasta la tercera parada del autobús.**

*El objetivo en este punto es que los estudiantes expresen dichos desplazamientos de manera gráfica (conversión) y de esa forma observen una misma información expresada de manera distinta. Además, una de las características de la representación gráfica es que permite generar estrategias para buscar resolver la situación a partir de la información que se proporciona de manera numérica.*

*Además es importante mencionar que si el estudiante requiere regresar al registro numérico para dar respuesta a la pregunta en caso de ser necesario, lo haga por medio de una conversión.*

- 5. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento total del autobús?**

*El objetivo de esta pregunta consiste en que el estudiante tenga la oportunidad de comparar la diferencia que hay entre el desplazamiento y el recorrido, pregunta que se hace con anterioridad; además, se espera que el estudiante realice tratamientos (al realizar cálculos con la información proporcionada en*

*coordenadas polares para obtener coordenadas cartesianas) para obtener el resultado.*

**6. ¿Cuál es la dirección del desplazamiento total del autobús?**

*El objetivo de esta pregunta es que el estudiante se dé cuenta que para identificar un vector no es suficiente con que proporcione información sobre qué tanto (magnitud) se desplazó, en este caso el autobús, sino que tiene que agregar una dirección (sentido) que le especifique en dónde terminó el recorrido.*

**7. Elabora un diagrama que muestre el desplazamiento total del autobús.**

*El objetivo de esta pregunta es igual que el de la cuarta pregunta.*

**3.4.2 Actividad 2**

En esta segunda actividad se espera que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos que tienen de las operaciones con números reales, el concepto de vector y la representación gráfica de la suma vectorial, para lograr el siguiente:

**Objetivo:**

- ◆ Identificar la dirección y el sentido de la resultante de la suma de vectores.

**Materiales:**

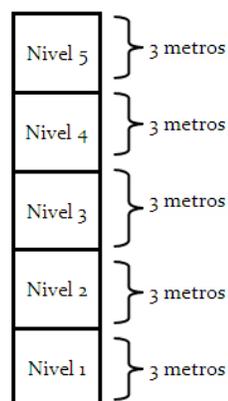
- ◆ Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- ◆ Lápiz.

**Tiempo estimado:**

- ◆ 30 minutos.

## Actividad 2:

Se está realizando una construcción de un edificio de cinco niveles (la planta baja es el primer nivel), el cual se encuentra en la etapa de colocación de ladrillo, dicha etapa se lleva a cabo en los cinco niveles a la vez, por lo que se hace uso de un elevador mecánico para transportar el material con mayor facilidad. Al iniciar las labores en un día de trabajo, el elevador, que se encuentra en el primer nivel, debe surtir material al tercer nivel, siendo éste su primer desplazamiento del día, estando en el tercer nivel recibió un aviso de que el material se había acabado en el quinto nivel por lo que su segundo desplazamiento fue hacia ese punto, el siguiente y último movimiento fue hacia el segundo nivel para recoger un material sobrante.



1. **¿Cuál es la magnitud del desplazamiento total del elevador una vez realizados los tres movimientos?**

*El objetivo de esta pregunta al igual que en la tercera, es que los estudiantes se familiaricen con la suma de vectores que están dados en diferente sentido, además de realizar una serie de tratamientos y/o conversiones que le permitirán dar respuesta a la pregunta.*

2. **Elabora un diagrama que muestre todos los desplazamientos hechos por el elevador en el que se represente el vector resultante al realizar los tres desplazamientos.**

*En este punto se tiene el propósito de que el estudiante haga una conversión de los datos proporcionados y que a la vez le brinde herramientas que lo ayuden en la toma de decisiones, que le sirvan para dar respuesta a las preguntas.*

**3. ¿Cuál es la magnitud de los dos últimos desplazamientos?**

*Al igual que en la pregunta uno el objetivo de esta pregunta, es que los estudiantes se familiaricen con la suma de vectores que están dados en diferente sentido, además de realizar una serie de tratamientos y/o conversiones que le permitirán dar respuesta a la pregunta.*

**4. ¿Cuál es la dirección y el sentido de la resultante de los dos últimos desplazamientos?**

*El objetivo de esta pregunta es que durante el debate que se realice de manera grupal se discutan cuales son las características que definen la dirección y el sentido de un vector.*

**5. ¿Cuál es la dirección y el sentido de la resultante de la suma de los desplazamientos realizados por el elevador?**

*Al igual que en la pregunta anterior el objetivo de la quinta pregunta es resaltar las características que definen la dirección y el sentido de un vector.*

### **3.4.3 Actividad 3**

#### **Objetivos:**

El objetivo general de esta tercera actividad es que los estudiantes puedan aplicar, además de los conocimientos que tienen de las operaciones con números reales y de la representación gráfica de la suma vectorial, el Teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas para:

- ◆ Identificar la diferencia entre recorrido y desplazamiento
- ◆ Identificar que, no en todos los casos, la magnitud de la suma de vectores es igual a la suma de las magnitudes de los vectores.

### **Materiales:**

- ◆ Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- ◆ Lápiz.
- ◆ Calculadora.

### **Tiempo estimado**

- ◆ 40 minutos.

### **Actividad 3:**

Una constructora está reparando la carretera Bahía Kino-Hermosillo y la persona encargada de supervisar la obra debe visitar dos puntos de la carretera para supervisar los avances. La base de operaciones está en Bahía de Kino, que es el punto de donde sale a hacer el recorrido, el supervisor debe realizar dos desplazamientos:

*Primer caso:* El primero es de 4.5 Km. hacia el este y el segundo de 2 Km. hacia el norte.

*Segundo caso:* El primero es de 2 Km. hacia el este y el segundo de 3 Km. con una dirección de  $30^\circ$  EN.

Para cada uno de los casos anteriores realiza lo siguiente:

- 1. Haz un bosquejo mostrando los desplazamientos realizados por el supervisor.**

*El propósito de este punto es que el estudiante exprese la información proporcionada en otro registro, en este caso el gráfico. Que si bien no le dará la respuesta a la actividad si puede conducir al estudiante a profundizar en las características de la situación que está planteando.*

**2. Describe el recorrido total realizado.**

*La intención en este punto es la de presentar a los estudiantes una nueva experiencia, en una situación donde los vectores no son unidireccionales, para discutir el hecho de que un desplazamiento puede ser producto de muchos recorridos. Se espera que el estudiante pueda decir en cada uno de los casos, si el recorrido es único o no y por qué.*

**3. Describe gráficamente cual es el desplazamiento total.**

*El objetivo de este punto es que los estudiantes expresen dichos desplazamientos en el registro gráfico que les permitan darse una idea de cómo poder diseñar una estrategia para solucionarlo y de cierta manera para darse cuenta si conocen uno o varios métodos gráficos para realizar la suma de vectores.*

**4. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento total que realizó el supervisor?**

*Las preguntas cuatro y cinco tienen como objetivo promover en los estudiantes la transformación de representaciones dentro del mismo registro (tratamiento) y la transformación entre representaciones que pertenecen a diferentes registros (conversión), en el contexto del problema que están resolviendo.*

**5. ¿Cuál es el ángulo que determina la dirección y sentido del desplazamiento total que realizó el supervisor?**

### 3.4.4 Actividad 4

#### Objetivo:

El objetivo de esta cuarta actividad es que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos que hasta ahora tienen de la suma de vectores, y sus propiedades para:

- ◆ Identificar la dirección y el sentido del vector suma.
- ◆ Identificar la importancia que el sentido de los vectores tiene al momento de realizar la suma de los vectores.

#### Materiales:

- ◆ Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- ◆ Lápiz.
- ◆ Calculadora.

#### Tiempo estimado:

- ◆ 30 minutos.

#### Actividad 4:

Una persona realiza tres desplazamientos para llegar de su casa a su centro de trabajo, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Desplazamiento	Magnitud	Ángulo EN <sup>1</sup>
Primero	1 Km.	30°
Segundo	3 Km.	45°
Tercero	2 Km.	130°

---

<sup>1</sup> Ángulo que determina la dirección y el sentido del desplazamiento

**1.- ¿Cuál es la magnitud y el ángulo que determina la dirección y el sentido del desplazamiento total cuando realiza los dos primeros desplazamientos?**

*En esta pregunta al igual que en la siguiente se espera que algunos estudiantes interpreten la información proporcionada y hagan una conversión al representarla de manera gráfica, para que esta representación les ayude en la búsqueda de estrategias para la solución del problema.*

*Además de hacer uso de las funciones trigonométricas para aplicar una serie de tratamientos y conversiones que le permitirán dar respuesta a dichas preguntas.*

**2.- ¿Cuál es la magnitud y el ángulo que determina la dirección y el sentido del desplazamiento total desde que sale de su casa hasta que llega al trabajo?**

*Al igual que en la pregunta anterior se espera que algunos estudiantes interpreten la información proporcionada y hagan una conversión al representarla de manera gráfica la información que se les proporciona, para que esta representación les ayude en la búsqueda de estrategias para la solución del problema.*

*Además de hacer uso de las funciones trigonométricas para aplicar una serie de tratamientos y conversiones que le permitirán dar respuesta a dichas preguntas.*

**3.- Si la persona realiza un cuarto desplazamiento para trasladarse de su centro de trabajo al hospital y el desplazamiento total de su casa al hospital es de 9 Km. con un ángulo de  $120^\circ$  EN, ¿cuáles son las características del cuarto desplazamiento?**

*El objetivo de este punto es que los estudiantes se den cuenta de que aplicando la suma o ciertas operaciones (propiedades) se puede obtener un vector, es decir que hay vectores a los que puede aplicar la suma de éstos y sus propiedades para generarlo como una combinación lineal de otro.*

### 3.4.5 Actividad 5

#### Objetivo:

El objetivo de esta quinta actividad es que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos que hasta ahora tienen de la suma de vectores, para:

- ◆ Trabajar o extraer información dada gráficamente.
- ◆ Identificar la propiedad asociativa de la suma de vectores.
- ◆ Identificar la propiedad conmutativa de la suma de vectores.
- ◆ Identificar e interpretar el vector inverso aditivo.

#### Materiales:

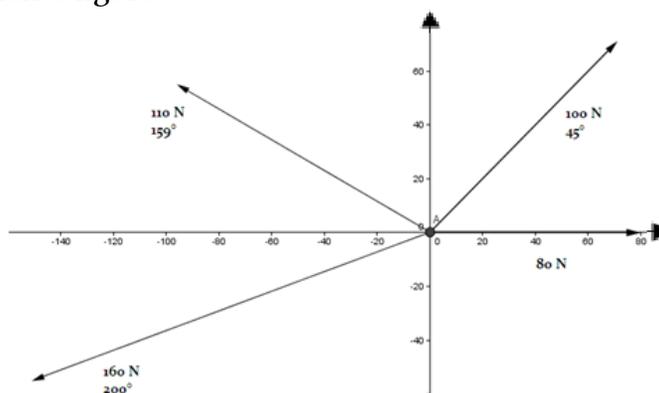
- ◆ Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- ◆ Lápiz.
- ◆ Calculadora.

#### Tiempo estimado:

- ◆ 40 minutos.

#### Actividad 5:

Cuatro fuerzas actúan sobre una partícula, que se ubica en el punto O, tal como se muestra en la siguiente figura.



**1.- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza total que está recibiendo la partícula?**

*El propósito de esta pregunta es que en un primer momento el estudiante sea capaz de interpretar la información proporcionada en un registro gráfico para posteriormente realizar una serie de conversiones que le permitan cambiar del registro en coordenadas polares a coordenadas cartesianas para que de esa manera los tratamientos que se realicen en dicho registro sean más económicos.*

**2.- Si la partícula pudiera moverse, ¿en qué dirección saldría disparada?**

*El objetivo de esta pregunta es que el estudiante relacione que al sumar todas las fuerzas y obtenga el vector resultante éste le dará la información necesaria para poder responder, pero para esto tendrá que realizar una serie de tratamientos y conversiones (al realizar transformaciones dentro del mismo registro y al cambiar de un registro a otro).*

**3.- ¿Todos tus compañeros de equipo sumaron en el mismo orden las fuerzas para obtener el vector resultante?**

*Se espera que durante el tercer momento de la actividad que consiste en el debate de manera grupal se llegue a destacar que no importa el orden en que se utilicen los vectores en la suma (propiedad conmutativa); además que tampoco importa la manera en que se asocien las parejas de vectores para realizar la suma (propiedad asociativa), pues es muy probable que no todos los estudiantes hayan ordenado de la misma manera los vectores para realizar la suma.*

**4.- En caso de que alguno de tus compañeros lo haya realizado en distinto orden, ¿qué resultado obtuvo?**

*El objetivo de esta pregunta al igual que la siguiente es simplemente para comparar resultados y el orden que seleccionaron para realizar la suma de los vectores*

**5.- ¿Cómo es el resultado que tu compañero obtuvo comparado con el que obtuviste?**

*Al igual que en la pregunta anterior el objetivo de esta es para que los estudiantes comparen resultados y el orden que seleccionaron para realizar la suma de los vectores*

**6.- ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza resultante si las fuerzas se suman manteniendo el siguiente orden 160 N, 100 N, 80 N y 110 N?**

*En caso de que sus compañeros de equipo hayan realizado la suma de vectores en el mismo orden, esta pregunta tiene la intención de hacer aparecer las propiedades asociativa y conmutativa.*

**7.- Si queremos que la partícula permanezca sin moverse al aplicarle una quinta fuerza, ¿cuál deberán ser la magnitud y dirección de la quinta fuerza? Justifica tu respuesta.**

*La intención de esta pregunta es que el estudiante identifique la existencia del inverso aditivo y que se haga una discusión en torno a las características y propiedades que éste posee.*

### **3.4.6 Actividad 6**

#### **Objetivo:**

*El objetivo general de las actividades seis y siete es el de complementar la actividad cinco para que por medio del software (GeoGebra) el estudiante pueda explorar teniendo la oportunidad de analizar, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar, así como descubrir la existencia de ciertas propiedades que tiene la suma de vectores en este caso la propiedad asociativa y la propiedad conmutativa. Además de promover en el estudiante más experiencias que le permitan identificar la naturaleza y comportamiento del objeto matemático que se está estudiando.*

### Materiales:

- ◆ Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- ◆ Lápiz.
- ◆ Calculadora.
- ◆ Computadora.

### Tiempo estimado:

- ◆ 40 minutos.

### Actividad 6 GeoGebra: *Suma de dos vectores*

1. Activa la casilla de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
2. Activa la casilla de coordenadas polares de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
3. Calcula las coordenadas cartesianas de los dos vectores y llena la siguiente tabla.

Vectores	Coordenadas polares	Coordenadas cartesianas

4. Activa la casilla suma geométrica de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
5. Calcula la magnitud y el ángulo (que determina la dirección y el sentido) del vector  $\vec{u} + \vec{v}$ .
6. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas del vector  $\vec{u} + \vec{v}$ ?  
Activa la casilla suma geométrica de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
7. Calcula la magnitud y el ángulo (que determina la dirección y el sentido) del vector  $\vec{u} + \vec{v}$ .
8. Calcula las coordenadas cartesianas del vector  $\vec{u} + \vec{v}$ .

9. ¿Cómo son las coordenadas cartesianas correspondientes de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  ?
10. Activa las casillas de coordenadas polares de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , ¿cómo son las coordenadas polares del vector  $\vec{u} + \vec{v}$  respecto a las del vector  $\vec{u}$  ?
11. Con el mouse mantén presionado el clic izquierdo y arrastra el punto final del vector  $\vec{u}$  (en otro momento hacer lo mismo con el punto final del vector  $\vec{v}$ ), detener el mouse en tres momentos y registrar en cada caso la magnitud y el ángulo correspondiente en la siguiente tabla:

	Caso I		Caso II		Caso III	
Vectores	Magnitud	Ángulo	Magnitud	Ángulo	Magnitud	Ángulo

12. Para cada uno de los casos anteriores calcula las coordenadas cartesianas del vector  $\vec{u} + \vec{v}$  y del vector  $\vec{u} - \vec{v}$  y coloca la información correspondiente en la siguiente tabla.

	Coordenadas cartesianas	
<b>Casos</b>		
Caso I		
Caso II		
Caso III		

13. ¿Para cualquier par de vectores sucederá lo mismo? Argumenta tu respuesta.
14. ¿Con qué propiedad de los números reales se relaciona este comportamiento de los vectores respecto a la suma?

### 3.4.7 Actividad 7

#### Objetivo:

*El objetivo general de esta actividad al igual que la seis es el de complementar la actividad cinco para que por medio del software (GeoGebra) el estudiante pueda explorar teniendo la oportunidad de analizar, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar así como descubrir la existencia de ciertas propiedades con las que cuenta la suma de vectores en este caso la propiedad asociativa y la propiedad conmutativa.*

*Además de promover en el estudiante más experiencias que le permitirán identificar la naturaleza y comportamiento del objeto matemático que se está estudiando.*

#### Materiales:

- ◆ Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- ◆ Lápiz.
- ◆ Calculadora.
- ◆ Computadora.

#### Tiempo estimado:

- ◆ 45 minutos.

#### Actividad 7 GeoGebra: Suma de tres vectores

1. Activa la casilla de los vectores .
2. Activa la casilla de coordenadas polares de los vectores .
3. Calcula las coordenadas cartesianas de los tres vectores y llena la siguiente tabla.

<b>Vectores</b>	<b>Coordenadas polares</b>	<b>Coordenadas cartesianas</b>

4. Activa la casilla suma de  $\vec{u}$  y después activa la casilla de suma geométrica de  $\vec{v}$ .
5. Calcula la magnitud y el ángulo (que determina la dirección y el sentido) del vector  $\vec{u} + \vec{v}$ .
6. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas del vector  $\vec{u} + \vec{v}$ ?
7. Activa la casilla suma de  $\vec{u}$  y después activa la casilla suma geométrica de  $\vec{v}$ .
8. Calcula la magnitud y el ángulo (que determina la dirección y el sentido) del vector  $\vec{u} - \vec{v}$ .
9. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas del vector  $\vec{u} - \vec{v}$ ?
10. ¿Cómo son las coordenadas cartesianas correspondientes de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ?
11. Activa las casillas X y Y que corresponden a las coordenadas polares de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , ¿cómo son las coordenadas polares del vector  $\vec{u} + \vec{v}$  respecto a las del vector  $\vec{u}$ ?
12. Con el mouse mantén presionado el clic izquierdo y arrastra el punto final del vector  $\vec{u}$  (en otro momento hacer lo mismo con el punto final del vector  $\vec{v}$ ), detener el mouse en tres momentos y registrar en cada caso la magnitud y el ángulo correspondiente en la siguiente tabla:

	Caso I		Caso II		Caso III	
Vectores	Magnitud	Dirección	Magnitud	Dirección	Magnitud	Dirección

13. Para cada uno de los casos anteriores calcula las coordenadas cartesianas de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y coloca la información correspondiente en la siguiente tabla.

	Resultante de la suma	
Casos		
Caso I		
Caso II		
Caso III		

14. ¿Para cualquier terna de vectores sucederá lo mismo? Argumenta tu respuesta
15. ¿Con qué propiedad de los números reales se relaciona este comportamiento de los vectores respecto a la suma?

### 3.4.8 Actividad 8

*“Características de los vectores”*

#### **Objetivo:**

*El objetivo general de esta octava actividad llamada características de los vectores, es que los estudiantes reflexionen respecto a la estrategia general utilizada para resolver las situaciones planteadas previamente. A través de dicha reflexión se espera que los estudiantes pongan en juego los conocimientos desarrollados a lo largo de la*

*resolución de las actividades, particularmente en lo que respecta a la necesidad de transformar las coordenadas polares (es la información que se proporciona de los vectores) en coordenadas rectangulares, para posteriormente construir las coordenadas rectangulares de los vectores suma y de esa manera poder encontrar la magnitud y ángulo que determina la dirección y el sentido de dicho vector (desplazamiento total o fuerza resultante).*

**Materiales:**

- ◆ Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- ◆ Lápiz.
- ◆ Calculadora.

**Tiempo estimado:**

- ◆ 40 minutos.

**Actividad 8**

- 1) ¿Cómo están dadas las características de los vectores involucrados en los problemas planteados en las primeras cinco actividades?
- 2) Describe la estrategia que utilizaste para resolver los problemas planteados en las actividades 1,2, 3, 4 y 5.
- 3) ¿Por qué crees que funciona la estrategia utilizada?
- 4) Si se conoce la magnitud y la dirección de un vector, ¿cómo le haces para encontrar las componentes horizontal y vertical?
- 5) Si tienes las componentes horizontal y vertical, ¿cómo le haces para encontrar la magnitud y la dirección del vector?

**Nota:**

*Cuando un vector está expresado en términos de su magnitud y el ángulo que determina su dirección, diremos que está expresado en coordenadas polares.*

*Cuando un vector está expresado en términos de sus componentes horizontal y vertical, diremos que está expresado en coordenadas cartesianas o rectangulares.*

- 6) ¿Cómo le hiciste en todos los casos para obtener la componente horizontal y vertical del desplazamiento total o de la fuerza resultante?
- 7) Si tienes los vectores \_\_\_\_\_ ¿cuáles son las coordenadas rectangulares del vector \_\_\_\_\_ ? ¿Por qué?

### 3.4.9 Actividad 9

*“Ubicando vectores”*

**Objetivo:**

*El objetivo general de la novena actividad es que los estudiantes trabajan por primera vez con vectores en contextos puramente matemáticos, se espera que puedan aplicar la estrategia general para transformar las coordenadas polares a rectangulares y viceversa.*

**Materiales:**

- ◆ Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- ◆ Lápiz.
- ◆ Calculadora.

**Tiempo estimado:**

◆ 40 minutos.

### Actividad 9

1. Dados los vectores  $\vec{a} = (12 u, 30^\circ)$ ,  $\vec{b} = (6 u, 130^\circ)$ ,  $\vec{c} = (4u, 240^\circ)$  y  $\vec{d} = (15 u, 290^\circ)$ , determina las coordenadas rectangulares de los siguientes vectores:

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

2. Encuentra las coordenadas polares de los ocho vectores que obtuviste en el inciso anterior (1.)