

Capítulo 2

Referentes teóricos y aspectos metodológicos

En este capítulo se plantean los elementos teóricos en los que se fundamenta la propuesta de actividades didácticas y su implementación en el aula. En la primer sección haremos mención de algunos trabajos en los que se hace hincapié de la importancia que tienen las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en la segunda presentamos las consideraciones teóricas específicas que se utilizan para el trabajo, en la tercera se presentan algunos aspectos sobre la ventaja de utilizar tecnología computacional en algunas de las actividades y en el último apartado se presentan las consideraciones metodológicas.

2.1 Antecedentes teóricos

Muchos investigadores han puesto su interés en el uso de las representaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje, como herramienta importante en el proceso de comprensión de los contenidos matemáticos.

Dörfler (1991) explica los procesos de abstracción, generalización y simbolización (representación) que intervienen en la formación de los conceptos matemáticos de la siguiente manera: El punto de partida es una acción o un “sistema de acciones” que pueden ser materiales (realizar una acción) imaginadas (imaginarse mentalmente la acción) o simbólicas (pensar mentalmente con palabras que tenemos que realizar la acción). El objeto y el significado de éste están determinados por la atención que las personas ponen sobre determinadas relaciones entre los elementos que intervienen en las acciones.

En las representaciones hay cierta regularidad cuando las acciones son repetidas, estas regularidades son conocidas como “invariantes de las acciones”, los invariantes necesitan un sistema de símbolos para poder ser representados, estos símbolos sólo

sirven para representar o describir los elementos de la acción. Dicho proceso cuando encuentra relaciones invariantes y las describe simbólicamente recibe el nombre de “proceso de abstracción constructiva”. Esto quiere decir que determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se enfoca sobre ellas. Por lo cual gana un cierto grado de independencia respecto de los objetos, la abstracción contractiva produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y existencia a partir de ella.

En la mayoría de los casos, los elementos de las acciones pueden ser sustituidos por otros elementos sin que esto afecte los sistemas de acciones ni tampoco su descripción simbólica, este hecho establece que los símbolos que son utilizados para representar los invariantes de las acciones tengan un referente cada vez más amplio. Este proceso recibe el nombre de “generalización extensiva”. La sustitución inicial de los elementos de la acción se hace por elementos muy parecidos, pero posteriormente los objetos pueden ser sustituidos por otros con poco parecido con los de la situación inicial, es decir presentan la propiedad de poder ser sustituidos por objetos diferentes.

Kaput (1992): “considero la <<representación>> como la <<representación>> de una experiencia por otra”. Considera que la capacidad que tienen las personas de trabajar con procesos y objetos se basa en la interacción de dos fuentes de organización de su mundo de experiencias:

1. Las estructuras mentales con las que organiza su mundo de experiencia.
2. Su habilidad para utilizar medios materiales con los que organiza su mundo de experiencia.

Kaput considera que el mundo de experiencias de las personas está dividido en dos: las experiencias materiales que son observables y las experiencias mentales que son hipotéticas, pero a su vez éstas son inseparables por lo que interactúan en conjunto en los procesos de representación. Tal como se muestra en la Figura 2.1

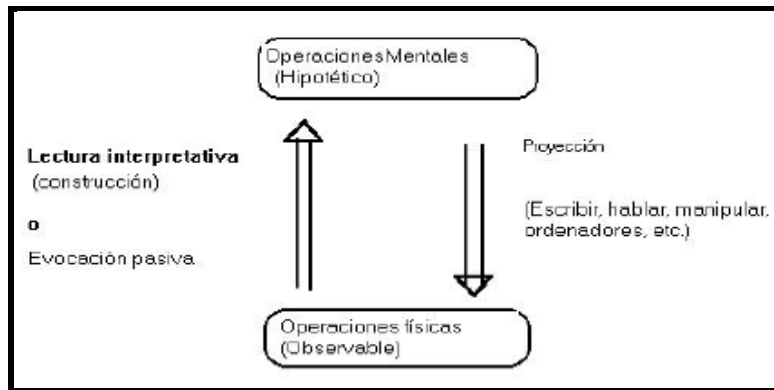


Figura 2.1

Por su parte Tall (1996) explica el papel de la visualización y la representación como herramientas mediadoras en el proceso de abstracción y en los procesos cognitivos movilizados por los objetos matemáticos, para lo cual desarrolla los tres tipos de sistemas de representaciones propuestos por Bruner adaptándolas en cuatro de la manera siguiente:

1. *Representaciones enactivas*: son acciones humanas que dan la sensación de cambio.
2. *Representaciones numéricas y simbólicas*: son representaciones que pueden ser manipuladas manualmente o con computadora.
3. *Representaciones visuales*: son las que pueden ser producidas manualmente de manera aproximada o más precisamente, con ordenadores dinámicos.
4. *Representaciones formales*: son representaciones que dependen de definiciones y pruebas.

Tall consideró que las representaciones propuestas por Bruner son al mismo tiempo visuales y simbólicas por lo cual el amplió la clasificación con una nueva categoría: “Una combinación de 2 y 3 conectando las representaciones simbólicas y gráficas”, Tall considera que las representaciones tienen un gran poder para comprimir información.

Castro (1997) señala:

“Dado que los conceptos son puramente mentales y no hay forma de observarlos directamente, es necesario un medio visible que permita el acceso a los productos de la mente. Las representaciones son un medio visible que está conectado a una idea, que es su significado”.

Como la característica de las ideas es ser invisibles, se hace necesario un registro que permita la comunicación de tal manera que esto nos permita interactuar con las demás personas y enriquecer el significado inicial que se tenía.

Cox (1999) clasifica a las representaciones en dos tipos: representaciones privadas y representaciones públicas (para comunicación con otros). Según él las representaciones privadas son menos ricas semánticamente, dispersas y sólo parcialmente externalizadas. En contraste, las representaciones públicas se construyen a través de procesos de cognición compartida que implican cambios entre participantes. Es decir, en la construcción se involucran las interacciones entre representaciones internas y externas de los individuos enriqueciendo el significado. De esta forma las representaciones públicas en comparación con las de carácter privado son enriquecidas semánticamente, mejor conformadas y más convencionales.

Romero (2000) establece que es por medio de las actividades asociadas a los sistemas de representación que se consigue la comprensión de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes.

“Se ha producido comprensión por parte de un sujeto cuando éste manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento, este enriquecimiento se manifiesta a través de los sistemas de representación y mediante las actividades asociadas a los mismos”.

Desde esta perspectiva, es importante que los estudiantes logren relacionar o coordinar diferentes representaciones. Por lo que es importante considerar que el contenido de una representación nunca definirá completamente al objeto representado.

Con relación a las múltiples representaciones Keller y Hirsch (1998), mencionan algunos de sus beneficios potenciales:

1. Proporcionar múltiples ideas de un concepto.
2. Atención selectiva y de énfasis en diferentes aspectos de conceptos complejos.
3. Facilita la vinculación de las representaciones cognitivas.

Los puntos de vista que se mencionaron con anterioridad reconocen la importancia de las representaciones en los procesos de enseñanza de las matemáticas, y consideran a las representaciones como una herramienta que permite en cierta forma conocer los procesos de conceptualización de los estudiantes. Se menciona que en cierta forma se asume que existe una interacción entre las representaciones semióticas y las mentales (internas), pero que no necesariamente las representaciones semióticas son manifestaciones de las representaciones mentales de un individuo, aunque nos pueden dar una idea de lo que ha representado internamente el individuo.

2.2 Consideraciones teóricas

Para el desarrollo de este trabajo asumiremos como referente teórico la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval (1999) por la importancia que le da al manejo de distintos registros de representación y a la relación que existe entre el aprendizaje y el uso de dichos registros de representación, pues los considera fundamentales para la comprensión de los objetos matemáticos. Otro aspecto que es considerado por Duval (1997) es: *“no hay noesis sin semiosis, es decir, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis”*.

Es importante resaltar que según Duval, el uso o manejo de diferentes registros de representación semiótica de un mismo objeto aumenta la comprensión de las personas, es importante que en este proceso se pueda diferenciar lo que es la semiosis (aprehensión o producción de una representación) de la noesis (aprehensión conceptual de un objeto). Por lo que es importante reconocer por un lado, que la aprehensión de los objetos matemáticos es una aprehensión conceptual y por otro lado, no puede haber una conceptualización del objeto matemático sin la aprehensión primeramente de las representaciones semióticas.

2.2.1 Registros de representación semióticas

Duval (1998) define a las representaciones como:

“Producciones construidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema semiótico que tiene sus propias limitaciones de significancia y funcionamiento”.

Duval señala que las representaciones semióticas están asociadas a sistemas semióticos, los cuales no necesariamente cumplen sólo una función de comunicación, sino que además es la forma que tenemos de acceder y adquirir conocimiento. A su vez sostiene que un sistema semiótico es un registro de representación semiótica si permite que se cumplan tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis las cuales son:

1. **Formación:** tiene el propósito de identificar y reconocer las representaciones de algún objeto en un sistema determinado. Debe cumplir con unas reglas de conformidad, por razones de comunicación y transformación de representaciones. Estas reglas permiten identificar una representación como un elemento de un sistema semiótico determinado.

2. **Tratamiento:** es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada. La función que cumple dentro del sistema semiótico está asociado a la ganancia de información.
3. **Conversión:** es la transformación de la representación en una representación de otro registro conservando una parte o bien la totalidad del contenido de la representación, pero al mismo tiempo da otra significación al objeto representado. Esta condición hace que la conversión sea una transformación externa al registro de partida.

Duval señala que es muy importante no confundir el objeto con sus distintas representaciones porque con el paso del tiempo puede llegar a convertirse en un obstáculo cognitivo.

El saber diferenciar entre el objeto y sus diferentes representaciones es una parte importante para el aprendizaje ya que las representaciones son fundamentales para la actividad cognitiva del pensamiento y para fines de comunicación.

Los procesos de la semiosis (aprehensión o producción de una representación) y de la noesis (aprehensión o construcción conceptual de un objeto) son indispensables. Ya que no puede haber conceptualización del objeto matemático sin la aprehensión de las representaciones semióticas.

Los objetos matemáticos tienen la peculiaridad de poder ser representados en distintas formas de representación semiótica, como es el caso de los vectores, éstos se pueden representar en forma: gráfica, algebraica, numérica, o bien en lengua natural en forma de enunciado.

Duval menciona que el movilizarse entre varios registros facilita la distinción entre los objetos matemáticos y sus representaciones. Además considera el papel de las representaciones semióticas como de gran importancia para el aprendizaje de las matemáticas.

Los registros utilizados generalmente para representar los objetos matemáticos que intervienen en el tema de vectores son: el registro en lenguaje natural, el registro algebraico, el registro numérico y el registro gráfico. En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos.


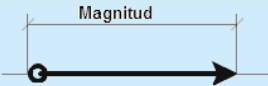
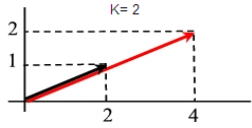
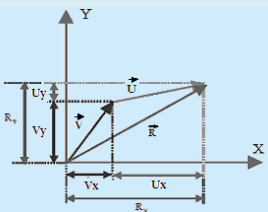
Objeto que puede ser representado	Representaciones			
	Registro en Lenguaje Natural	Registro Algebraico	Registro Numérico	Registro Gráfico
Vector	Un vector es un objeto con magnitud, dirección y sentido		$(2,1)$	
Magnitud	La magnitud de un vector es la medida de su longitud	$ $	--- $=$	
Producto de un vector por un escalar	El producto de un vector por un escalar es el vector que se obtiene de multiplicar el escalar por cada una de las componentes del vector	$k =$ k	Con $k=2$, $=2$ y $=1$ $k = (2(2), 2(1))$ $k = (4, 2)$	
Suma de vectores	La suma de vectores es el vector que se obtiene de sumar las componentes respectivas de los vectores	$=$ $= ($	Con: $=1$ y $=2$ $=2$ y $=2$ $= (1+2, 2+2)$ $= (3, 4)$	

Tabla 2.1: Representación de objetos matemáticos en distintos registro

De las tres actividades cognitivas la *formación* de las representaciones semióticas consiste en seleccionar un conjunto de signos dentro de un sistema semiótico de acuerdo con las posibilidades de representación del propio registro, para que representen las características propias del objeto. De esta manera la representación construida reemplaza la imagen del objeto al hacerla presente cada vez que se necesite.

Se forman representaciones semióticas cuando se asignan nombres a los objetos, cuando se catalogan relaciones o propiedades, Duval (1993) menciona también que representaciones primitivas se pueden articular para formar representaciones más complejas como frases, imágenes, esquemas, tablas, etc. Un ejemplo de la formación de una representación se muestra en la Figura 3.2

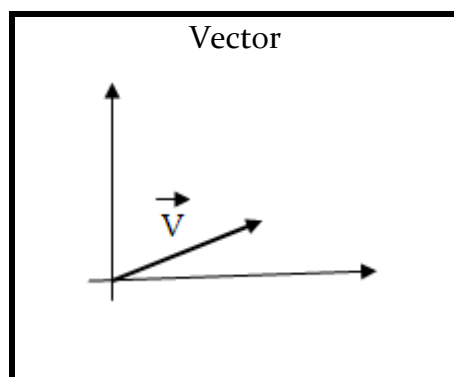


Figura 2.2

Con respecto a las actividades cognitivas, por ejemplo, en el *tratamiento*, hay cambios que dependen del registro que se esté utilizando, por lo que los tratamientos son de naturaleza distinta, de la misma manera el registro seleccionado puede influir en la realización del tratamiento haciéndolo más o menos complejo.

En el caso de la suma de dos vectores, cuando el tratamiento se realiza en el registro gráfico (método del polígono), lo que se hace es trasladar el punto inicial de uno de los vectores sobre el punto final del otro y el vector resultante se obtiene trazando el vector que va desde el punto inicial del primer vector hasta el punto final del segundo, mientras que la suma algebraica consiste en sumar las componentes

correspondientes de cada vector obteniendo así el vector resultante. En la Tabla 2.2 podemos observar, en la columna de la derecha, el tratamiento que se hace en tres registros de representación al realizar la suma de dos vectores.

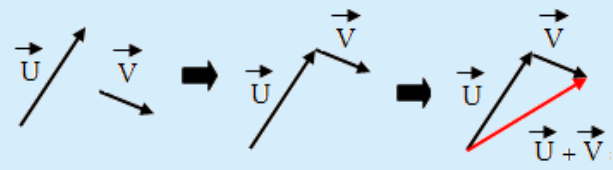
Tipo de registro	Tratamiento
Registro Gráfico	
Registro Algebraico	$\vec{U} = (U_1, U_2) \quad \vec{V} = (V_1, V_2)$ $\vec{U} + \vec{V} = [(U_1, U_2) + (V_1, V_2)]$ $\vec{U} + \vec{V} = (U_1 + V_1, U_2 + V_2)$
Registro Numérico	$\vec{U} = (4,6) \quad \vec{V} = (2,4)$ $\vec{U} + \vec{V} = (4+2,6+4)$ $\vec{U} + \vec{V} = (6,10)$

Tabla 2.2: Tratamiento sobre la suma de vectores

Cuando se lleva a cabo la operación de tratamiento sobre una representación, se le transforma en otra representación, que está construida utilizando el mismo sistema semiótico. La operación de tratamiento por lo general se realiza cuando se quiere dar respuesta a una pregunta, solucionar un problema, por ejemplo al calcular tratamos de manera interna representaciones semióticas construidas en el registro de la

escritura numérica, entre otras. También está presente el tratamiento cuando se transforma una expresión lingüística en otra.

Cuando se lleva a cabo un tratamiento en una representación semiótica se aplican sobre ella determinadas reglas, la aplicación de estas reglas hace que la nueva representación aunque construida en el mismo registro que la representación de partida brinda nuevas posibilidades creativas. En el siguiente ejemplo se observan los tratamientos que se realizan cuando se calcula la magnitud de un vector, dichos tratamientos fueron realizados en el registro numérico.

Las coordenadas rectangulares de un vector resultante son:

$X = 4.59$ Km. y $Y = 1.5$ Km. ¿Cuál es la magnitud de este vector?

Para poder calcular la magnitud del vector hacemos uso del teorema de Pitágoras, pues tenemos un triángulo rectángulo y conocemos el tamaño de sus catetos, entonces:

$$I^2 = a^2 + b^2$$

$$I^2 = (4.59)^2 + (1.50)^2$$

$$I^2 = 21.06 + 2.25$$

$$I = 23.31 \text{ por lo tanto } I = 4.48$$

Entonces de lo anterior tenemos que la magnitud del vector resultante es de 4.48 Km.

De las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis, con frecuencia la menos atendida en el proceso de enseñanza es la *conversión* ya que se considera automática desde el momento en que se pueden formar representaciones en diferentes registros; sin embargo, esta acción requiere de una coordinación interna de los diferentes sistemas de representación, que ha de ser construida por el estudiante, sin que dicha coordinación de representaciones diferentes le signifiquen objetos diferentes.

Duval menciona que la conversión de las representaciones semióticas forma la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los estudiantes. Entre algunos aspectos que dificultan la conversión se menciona la comprensión de un contenido restringido algunas veces a la representación en que

se aprendió, la falta de coordinación entre los registros, o el desconocimiento de alguno de los dos registros de representación.

Vale la pena mencionar que no existen reglas de conversión que permitan hacer el paso de un registro a otro, por lo cual puede resultar difícil su realización. Duval menciona que:

“La comprensión de algo, sea un texto o una imagen, moviliza ya sea actividades de conversión y de formación, o bien las tres actividades cognitivas” (1999).

Sin embargo, Duval (1999) afirma que en la enseñanza generalmente se favorece el trabajo relacionado solamente con los tratamientos dejando de lado los procesos que implican la conversión.

Además la conversión involucra una buena comprensión del objeto en estudio ya que en muchos de los casos la representación de registros diferentes no presenta necesariamente los mismos aspectos de un mismo contenido. Consideramos también que el poder estar cambiando de un registro a otro permite la construcción de un mejor conocimiento pues se ve expresado de diferentes maneras un mismo objeto; como lo menciona Duval.

“La conversión sería el resultado de la comprensión conceptual y cualquier problema con ésta sería indicativo de conceptos erróneos”.

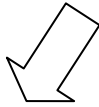
Duval considera que lo primero que importa para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos.

A continuación, en el siguiente recuadro, se muestra un ejemplo en el que el estudiante requiere realizar una conversión para resolver la situación planteada, en dicha situación la información se proporciona en el registro de la lengua natural,

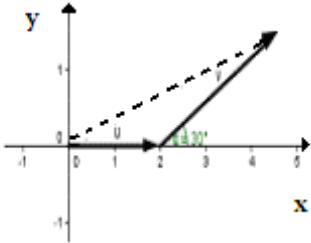
dicha conversión puede hacerse a diferentes registros de representación, por ejemplo alguien puede optar por transformar la información hacia el registro gráfico y otro puede transformarla hacia el registro numérico. En ambos casos puede ser que el sujeto esté buscando tener una mejor interpretación de la información o bien diseñar una estrategia para resolver el problema. Además, es posible que una vez que se hace la primera conversión, por ejemplo al registro gráfico, se tenga la necesidad de trasladarse a otro tipo de registro como el numérico para realizar los cálculos correspondientes para resolver el problema planteado.

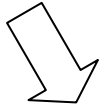
Una constructora está reparando la carretera Bahía de Kino-Hermosillo y la persona encargada de supervisar la obra debe visitar dos puntos de la carretera para supervisar los avances. La base de operaciones está en Bahía de Kino, que es el punto de donde sale a hacer el recorrido, el supervisor debe realizar dos desplazamientos: el primero es de 2 Km. hacia el este y el segundo de 3 Km. con una dirección de 30° EN.

1. Encontrar la magnitud del desplazamiento total realizado por el supervisor.



Opción 1





Opción 2

Segundo desplazamiento
Función coseno para determinar x:
= $x = 3 (\cos 30^\circ)$, $x = 3 (0.87)$
 $x = 2.61$
Función seno para determinar y:
= $y = 3 (\sin 30^\circ)$, $y = 3 (0.5)$
 $y = 1.5$
Para calcular la magnitud del desplazamiento:

magnitud del desplazamiento total = 4.85 Km

En particular la conversión del enunciado de un problema en una representación gráfica, puede facilitar una mejor retroalimentación de la información en los estudiantes, además una de las características de esta representación es que permite

generar estrategias para buscar resolver la situación a partir de la información que se proporciona.

2.2.2 Ventajas de tener varios registros de representación

El uso de varios registros de representación parece característico del pensamiento humano que comparado con la inteligencia animal y la inteligencia artificial, estos hacen sólo uso de un sistema de representación para su funcionamiento.

Se plantean tres razones para el uso de distintos registros de representación en el funcionamiento del pensamiento humano:

1. **Los costos de tratamiento:** esta primera razón está relacionada con la economía de tratamiento, es decir, el que existan diferentes registros brinda la posibilidad de poder usar un registro en lugar de otro, con la intención de que los tratamientos que se realicen en dicho registro seleccionado sea más poderosos y más económicos, por ejemplo, cuando tiene que realizarse una suma de vectores resulta más económico realizar los tratamientos en el registro en coordenadas cartesianas que en el registro en coordenadas polares.
2. **Las limitaciones representativas específicas de cada registro:** esta razón tiene que ver con la complementariedad de los registros, es decir, dependerán del registro seleccionado los elementos significativos o información del objeto, Duval lo menciona así: *“toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa”*. Por ejemplo, puede resultar más enriquecedor y brinda posibilidades en la búsqueda de estrategias el considerar la suma de vectores en una representación gráfica que proporcionadas en lenguaje natural.
3. **La coordinación necesaria de una diferenciación entre representante y representado:** es decir, para que una representación funcione verdaderamente como una representación, es necesario que no se confunda

el objeto con su representación, por lo que es importante que se cumplan dos condiciones; que existan al menos dos sistemas semióticos diferentes para la representación del objeto y que los estudiantes sean capaces de convertir una representación de un sistema en forma rápida y espontánea, lo que Duval reconoce como coordinación entre registros de representación.

Esta última razón no se considera relevante por otros porque parte de una hipótesis “Si se selecciona bien el registro de representación, sus representaciones son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado” por lo que la conversión no debiera de provocar dificultades, pero hay que reconocer que puede ser válido para aquellos que tengan un buen manejo de la disciplina, pero no para personas que se encuentren en un proceso de aprendizaje. Por lo que bajo esta hipótesis no se permite reconocer que la falta de conversiones puede ser causa importante de dificultades o fracasos.

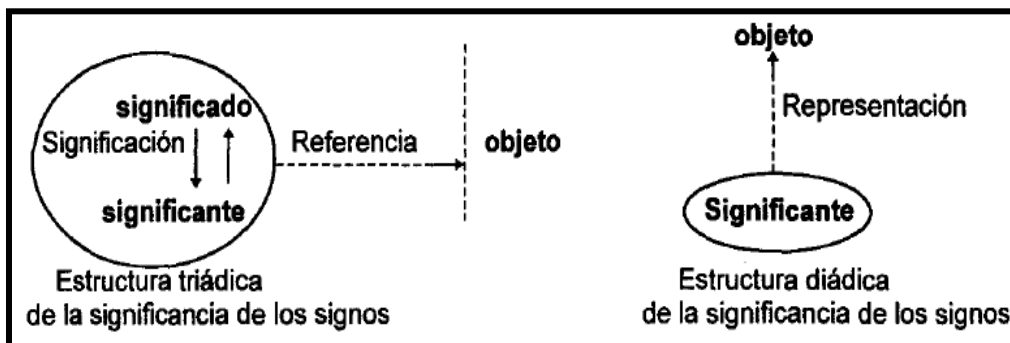


Figura 2.3: Estructura de la significancia de los signos

En la Figura 3.3 se ve la oposición entre dos tipos de signos. Los de la estructura triádica, como los signos lingüísticos o las figuras, la relación con un objeto depende de una relación de significación, por otro lado la relación con el objeto no es asegurable sino en el nivel de discurso o interpretación. Los signos de estructura diádica, tales como ciertas nociones matemáticas no tienen significación y están construidas por una relación establecida por un objeto. La significancia se postula como si la operación de conversión de un registro en otro parece evidente.

Existe una segunda hipótesis sobre cómo se consigue la conceptualización de los objetos matemáticos en los estudiantes: “la comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión”. La figura 3.4 nos muestra dicho proceso.

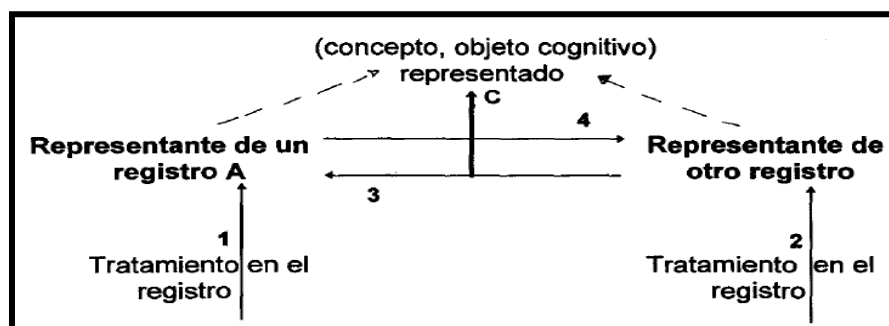


Figura 2.4: Estructura de la representación en función de la conceptualización

Las flechas 1 y 2 indican los tratamientos propios de cada registro; la 3 y 4 indican las conversiones de un registro a otro; la flecha C indica la comprensión integradora de una representación y presupone una coordinación de dos registros; las flechas punteadas indican la diferencia entre representante y representado.

A pesar del manejo de diferentes registros (algebraico, gráfico y numérico) en la enseñanza de la suma vectorial, no se da de manera espontánea la coordinación entre estos registros, ya que los alumnos en muchas ocasiones no identifican el mismo objeto entre sus diferentes representaciones, lo que es mencionado por Duval como “*encasillamiento de los registros de representación*” lo que quiere decir que comúnmente se trabaja con registros de forma separada sin hacer ningún tipo de conversión entre ellos. Se sabe que la conversión favorece la coordinación entre registros, pero la ausencia de ésta no impide toda comprensión, otro de los puntos importantes a considerar cuando se trabaja con los registros por separado es que no da posibilidades de contrarrestar los resultados obtenidos con otro registro.

El encasillamiento que se da en los distintos registros de representación se puede explicar también en términos de la *incongruencia* entre los registros debido a la diferencia semiótica que puede existir entre ellos. Cuando existe congruencia entre los registros de partida y de llegada la conversión se muestra casi inmediata, y en ocasiones puede parecer una codificación.

Se debe reconocer que la coordinación no se da por sí sola, por la falta de reglas de conversión que puede darse entre los registros, lo cual se observa desde los procesos de enseñanza, cuando se introducen distintos registros y no necesariamente se da la coordinación. Por lo que es importante que durante el proceso de aprendizaje se considere la relación que existe entre la noesis y la semiosis, proporcionándoles tarea a los estudiantes que les permitan hacer conciencia de manera más general de la importancia de la coordinación entre los diferentes registros.

2.2.3 Los registros de representación y la coordinación entre ellos en el estudio de la suma de vectores.

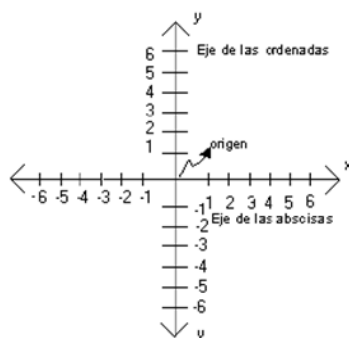
Como ya se ha mencionado con anterioridad, en el estudio de la suma de vectores los registros comúnmente usados son el registro gráfico, algebraico, numérico y el lenguaje natural, pero normalmente no son utilizados para promover la coordinación entre diferentes registros de representación. En este trabajo los registros de representación son utilizados con el propósito de promover el tratamiento y la conversión entre ellos, con la intención de que los estudiantes enriquezcan el significado del objeto matemático que se estudia.

A continuación se presenta la manera en que en este trabajo se utilizan los registros de representación gráfico, numérico y algebraico, además de las ventajas del uso de software de geometría dinámico (GeoGebra).

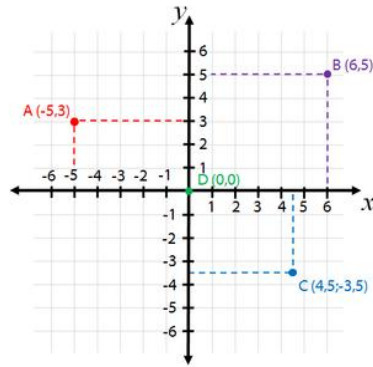
2.2.3.1 Registro gráfico

El registro gráfico es utilizado para representar a los vectores y la suma de éstos tanto en su representación polar como en su representación cartesiana, en ambos casos el registro gráfico es utilizado para: representar objetos, realizar tratamientos y realizar conversiones. Entre los objetos que se representan encontramos:

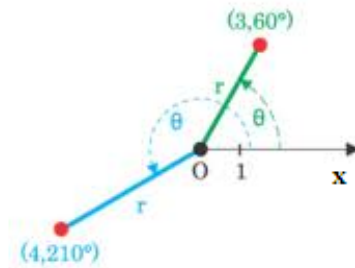
- ◆ El plano cartesiano: está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical, que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen.



- ◆ Las coordenadas de los puntos ubicados en un plano cartesiano siempre se escriben en el mismo orden: la dirección horizontal primero y después la vertical, a dicha representación llamamos par ordenado y los números van entre paréntesis separados por una coma. Cuando x (la primera coordenada) aumenta, el punto se mueve a la derecha y si disminuye, el punto se mueve a la izquierda. Cuando y (la segunda coordenada) aumenta, el punto se mueve hacia arriba y si disminuye, el punto va hacia abajo.



- ◆ El sistema de coordenadas polares es un sistema de coordenadas bidimensional en el cual cada punto o posición del plano se determina por un ángulo y una distancia. Donde el ángulo está medido a partir del eje de las equis con una dirección contraria a las manecillas del reloj, mientras que la distancia está medida a partir del punto inicial del vector hasta el punto final.



- ◆ Vectores, segmento que tienen magnitud, dirección y sentido al mismo tiempo. En el caso particular del vector cero, debido a las restricciones del registro gráfico para representar vectores, es representado por la intersección de los ejes.
- ◆ Figuras geométricas, principalmente los triángulos rectángulos, que son formados por el vector y sus componentes (horizontal y vertical).
- ◆ Los tratamientos principales que se llevan a cabo en el registro gráfico son los de mover o trasladar los vectores proporcionados para poder reacomodarlos de tal manera que les permita realizar la suma de éstos.

Las conversiones que el registro gráfico involucra son realizadas principalmente por tres razones:

1. Facilita la articulación con otros registros como es el caso del registro algebraico.
2. Debido a que el registro gráfico es no discursivo, es necesario hacer uso de otro registro para decir cosas acerca de las representaciones que se tienen en el registro grafico.
3. Limitado manejo operativo de los objetos representados.

2.2.3.2 Registro de la lengua natural

El registro de la lengua natural es utilizado en la secuencia, principalmente para proporcionar la información de las situaciones y explicar: diferencias entre objetos, aclarar alguna duda que se presente durante la resolución de dicha secuencia (por falta de claridad en una instrucción o imagen). A diferencia del registro gráfico, en el registro en lenguaje natural no se busca desarrollar en los estudiantes algún tratamiento específico, aunque es común observar tratamientos como, argumentaciones, descripciones, comentarios, etc.

El registro en lenguaje natural también es utilizado por los estudiantes cuando se les pide que realicen algunas explicaciones de algunos procedimientos que han utilizado, o bien cuando los estudiantes realizan alguna interpretación de un gráfico o imagen proporcionada. Es importante mencionar que en el registro de la lengua natural en ocasiones se hace uso del registro algebraico o numérico (una mezcla de ambas), sin dar prioridad a alguna de las representaciones utilizadas.

2.2.3.3 Registro Álgebraico

El registro algebraico es utilizado para representar a los vectores por medio de literales como \vec{v} cuando éste no es conocido o representa a cualquier vector con

ciertas características, o bien cuando se quiere representar la operación entre dos vectores cualquiera, por ejemplo la suma de alguno de ellos como $\vec{u} + \vec{v}$ o $\vec{v} + \vec{u}$.

El registro algebraico también es utilizado por los estudiantes cuando indican con que vectores están trabajando es decir por medio de la literal y al realizar la suma de dos vectores cualquiera con la intención de que los estudiantes logren generalizar la suma y/o sus propiedades.

2.2.3.4 Registro Numérico

El registro numérico es utilizado cuando se presentan situaciones concretas en las que se tiene que resolver un problema particular, los estudiantes deben recurrir a este registro para poder hacer los cálculos a partir de la información que se les proporciona en el problema para poder buscar la respuesta al problema.

Algunos ejemplos de estas operaciones en el registro numérico son:

1. Tratamientos: suma de componentes rectangulares de dos vectores que se suman para obtener las coordenadas rectangulares del vector suma.
2. Conversión: a partir de las coordenadas polares obtener las coordenadas rectangulares; es decir, a partir de la magnitud y el ángulo de un vector obtener las coordenadas horizontal y vertical o viceversa.

2.3 Incorporación y uso de tecnología

Hoy en día los medios tecnológicos son esenciales para la sociedad en general y para la construcción del conocimiento matemático en particular. La búsqueda, selección, interpretación y organización de la información son aspectos fundamentales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de todas las áreas de conocimiento, particularmente en el caso de las Matemáticas, la reflexión, la comprensión de situaciones y el razonamiento, entre otros aspectos importantes.

La enseñanza es una actividad compleja, y a través de la historia el hombre ha experimentado diversos métodos y procedimientos con el propósito de mejorar tanto la enseñanza como el aprendizaje.

Actualmente existen investigadores en educación matemática que se han interesado en buscar alternativas que resuelvan los problemas que involucran los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a través de las nuevas tecnologías que pueden emplearse en el sistema educativo de tres maneras distintas: como objeto de aprendizaje, como medio para aprender y como apoyo al aprendizaje.

Un ejemplo de las nuevas tecnologías son los software que pueden ser útiles al profesor y al estudiante para enriquecer en forma significativa el proceso de adquisición del conocimiento matemático.

La tecnología (computadora) va más lejos que sólo hacer más fácil o rápido lo que nosotros ya hacemos, permitiendo además representaciones múltiples de un concepto matemático, y se espera que tenga implicaciones radicales tanto en los métodos como en los propósitos de la educación matemática.

La comprensión de un objeto matemático consiste en un proceso continuo y progresivo donde los estudiantes adquieren y relacionan los distintos elementos. Otra componente tiene que ver con la manera como puede usarse la computadora en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Pea (1987) sostiene que la inteligencia no es una cualidad de la mente sola, sino un producto de la relación entre estructuras mentales y herramientas del intelecto proporcionados por la cultura, como es el caso de las computadoras.

Para Pea (1987), *“una herramienta cognitiva es cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente en el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas”*. En particular, en el caso de las computadoras forman una extraordinaria y potente herramienta cognitiva para

aprender a pensar matemáticamente con ellas se pueden operar, no sólo números, sino también símbolos. Permiten además, almacenar y manipular símbolos dinámicos e interacciones con los usuarios en tiempo real.

Las computadoras son vistas por lo general como amplificadoras de las capacidades humanas (metáfora amplificadora), desde esta perspectiva, son consideradas herramientas con las que se pueden hacer tareas de forma más rápida y precisa. Otra perspectiva consiste en ver a las computadoras como herramientas cognitivas, y si éstas son usadas de manera correcta no sólo permiten amplificar las capacidades humanas, sino que tienen la capacidad de promover cambios estructurales en el sistema cognitivo de los estudiantes (metáfora reorganizadora) por medio de una reorganización y transformación de las actividades que los estudiantes realizan (Pea, 1987).

Apoiado en estas ideas, Dörfler (1993) propone un marco conceptual sobre el uso de la computadora en la educación matemática e identifica algunas maneras en las que una herramienta computacional puede generar cambios en la actividad mental de los estudiantes:

- ◆ *Cambio de las actividades a un nivel cognitivo más alto (meta-nivel).* Las computadoras apoyan acciones de un nivel cognitivo más alto por medio de la simplificación de procesos complejos por medio de entidades que son fácilmente manipulables.
- ◆ *Cambio de objetos con los que se realizan las actividades.* El uso de tecnología permite un cambio en los objetos con los que se trabaja, por ejemplo el uso de software permite trabajar con diversas representaciones de un objeto, en las que se puede estudiar su efecto en otros objetos con los que se encuentre ligados. Esta capacidad del software conlleva un cambio en el enfoque de atención a un nivel cognitivo más alto.

- ◆ *Enfoca las actividades en transformación y análisis de representaciones.* La computadora ofrece una gran variedad de elementos gráficos, numéricos y simbólicos para la construcción y manipulación de representaciones, permitiendo procesos cognitivos de resolución de problemas que dependen de la manipulación de dichas representaciones.
- ◆ *Apoya la cognición situada y resolución de problemas.* El diseñar actividades de interés para el estudiante en las computadoras permite el modelado de situaciones concretas y datos reales.

2.4 Consideraciones Metodológicas

En este apartado se describe la metodología que se implementó para llevar a cabo el presente trabajo, la estrategia metodológica consiste de cuatro fases mismas que se describen a continuación:

Fase 1: Revisión bibliográfica

Como primera fase del proyecto se planteó la revisión bibliográfica, acción que se realizó a través de distintas fuentes, como: documentos de Internet, tesis de grado, artículos de revistas, programa del curso de Geometría Analítica de la Universidad de Sonora, resultados de investigaciones y propuestas de enseñanza. Estos últimos referentes a proyectos en los cuales se involucra el diseño de propuestas para la enseñanza y aprendizaje de los vectores, dando preferencia al análisis de aquellos orientados a la enseñanza de la suma vectorial y que estuviesen dirigidos a estudiantes del nivel medio superior. Un aspecto central en esta parte del trabajo fue la revisión de artículos en los que se presentan los elementos teóricos que son adoptados para el diseño de la propuesta (Teoría de las Representaciones Semióticas), así como reportes de tesis o artículos que presentan diseños de estrategias didácticas fundamentadas en los elementos de esta teoría.

Los propósitos de esta etapa son:

- ◆ Tener una idea panorámica de las investigaciones con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la suma de vectores, y conocer el tipo de propuestas didácticas que han sido realizadas por otros investigadores; además, considerar los resultados que ellos han obtenido al llevar sus propuestas al aula. Esta información resultó fundamental al momento de realizar nuestro propio diseño.
- ◆ Establecer el soporte teórico para fundamentar la secuencia didáctica.

Fase 2: Diseño de la secuencia de actividades

En esta fase nos centramos en el diseño de actividades para integrar una secuencia didáctica, actividades a través de las cuales se espera promover dos aspectos en el estudiante, por una parte el desarrollo del contenido relacionado con la suma vectorial en coordenadas cartesianas, contemplado en el programa del curso de Geometría Analítica; así como las características que deben tener los futuros ingenieros civiles tal como se señala en los planes de estudio de la carrera.

Además del programa de del curso y de los planes de estudio de la carrera, otros punto de partida para el diseño de las actividades es la información que se obtiene de la revisión de Lineamientos Curriculares de la Universidad de Sonora y los referentes teóricos, en los primeros se hace énfasis en promover en el estudiante un perfil con sentido de actuación, auto aprendizaje, proclive a la interdisciplinariedad y al trabajo en equipo, aspectos que deberán verse reflejados en las actividades. Por ejemplo, un propósito del trabajo es promover la actividad en equipo de los estudiantes, por tal motivo se tiene interés en obtener los registros del trabajo de ellos, tanto individual como en equipo, esto deberá reflejarse en las hojas de trabajo que integren las actividades.

3: Puesta en escena

Para la puesta en escena de la secuencia de actividades didácticas se implementó en un curso de Geometría Analítica con un grupo de 40 estudiantes de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora que cursan el segundo semestre. Para realizar el análisis se selecciona a 15 estudiantes, para hacer la selección de estos estudiantes se utilizaron los siguientes criterios:

1. Asistieron a todas las sesiones de trabajo.
2. Tienen todas las actividades realizadas.
3. Las respuestas son legibles.
4. Presentan sus respuestas del trabajo individual y sus respuestas del trabajo en equipo (no corrigen las respuestas que generan en el trabajo individual después de trabajar en equipo).

Como responsables de la puesta en escena participan dos sujetos, uno como responsable de la implementación (profesor) y el otro como responsable de la observación del proceso (observador):

El profesor del curso responsable de la conducción de las actividades conoce la secuencia, los objetivos y la estrategia de conducción, dicha estrategia organiza tanto el trabajo del profesor como del estudiante, en un primer momento se promueve el trabajo individual, posteriormente el trabajo en equipo y finalmente el trabajo grupal, en este último en ocasiones se presentan a debate las estrategias y/o resultados de las actividades propuestas y en otras ocasiones es donde se realiza la institucionalización de los objetos de estudio que se ponen en juego.

El observador tiene la tarea de llevar el registro del comportamiento y la participación de los estudiantes con relación a las actividades de la secuencia didáctica, para ellos se auxilia de una hoja de registro integrada por los aspectos más relevantes en los que debe centrar su trabajo (Anexo 1).

El trabajo de implementación y observación se realizó en 12 sesiones de una hora cada una en el aula de trabajo normal asignada para el curso, la cual cuenta con cañón de proyección.

Fase 4: Análisis de la puesta en escena

La última fase del proyecto consiste en el análisis del trabajo de los estudiantes al realizar las actividades, dicho análisis se centra en la revisión de las hojas de trabajo y de las participaciones que tienen los estudiantes en el salón de clase en los diferentes momentos de la estrategia didáctica. Finalmente, a partir del análisis que se realiza del trabajo de los estudiantes con las actividades se obtienen varios tipos de conclusiones, por una parte las relacionadas con lo que logran hacer los estudiantes respecto a los propósitos declarados en las actividades, por otra las conclusiones referentes a los ajustes que debemos hacer a las actividades (claridad en las indicaciones, claridad en lo que se pregunta, ajustes en la estructura, etc.) y por último las relacionadas con lo que se puede modificar en el proyecto para enriquecer futuros trabajos en esta dirección.