

# Capítulo III

## Elementos Metodológicos y Descripción de la Secuencia Didáctica

### III.1. Objetivos Generales de la Secuencia Didáctica.

- Que el estudiante reconozca la variación exponencial y logarítmica a partir del registro de representación en que se le presente: verbal, tabular, gráfico o analítico.
- Capacitar al estudiante para realizar la conversión de un registro de representación a otro, dándole el tratamiento adecuado, apoyado en todo momento de la calculadora simbólica.
- Capacitar al estudiante para ver e interpretar la variación exponencial y logarítmica como modelos de problemas del mundo real y que sea capaz de desarrollar modelos matemáticos en este contexto.
- Promover la apropiación de técnicas matemáticas y computacionales para la construcción del modelo matemático correspondiente, a partir de datos tabulares o bien lecturas apropiadas en la gráfica.
- Promover la apropiación del lenguaje técnico de las matemáticas para el estudio de la variación exponencial y logarítmica, y relacionar dicho lenguaje con tablas, gráficas y fórmulas.
- Aplicar diversos criterios para verificar si la solución encontrada es correcta.
- Promover en el estudiante el desarrollo de habilidades para expresarse y explicar tanto en forma oral como por escrito las matemáticas que ha aprendido.

### III.2. Características de la Secuencia Didáctica.

La principal característica de nuestra secuencia didáctica consiste en promover las conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica, así como el realizar los tratamientos adecuados en cada registro de representación. La conversión entre los diferentes registros de representación: verbal, tabular, gráfico y analítico, está considerada como una de las dificultades persistentes en los estudiantes relacionada con el aprendizaje del concepto de función (Artigue, 2000), y según Duval (1998), cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, en suma, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo. Como ya se ha dicho, esta conversión entre diferentes registros de representación no es espontánea, y debe por tanto ser objeto explícito de enseñanza.

El utilizar la calculadora Voyage 200 como herramienta didáctica nos permite ampliar la posibilidad de un tratamiento más integral del tema, sobre todo por sus capacidades para manejar múltiples representaciones dinámicas, y por permitir el diseño de programas interactivos para el estudiante por medio de los cuales realiza diversas exploraciones en distintos registros de representación.

Del análisis histórico de los conceptos de logaritmo y función exponencial hemos rescatado dos significados que están fuera del discurso escolar actual, y que fueron de gran relevancia en el desarrollo histórico de tales conceptos. Uno de estos significados constituyó el eje central en el desarrollo de los logaritmos y consiste en la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética, el cual nosotros lo adoptamos también como eje central de nuestra propuesta didáctica. El otro significado que rescatamos del análisis histórico es la característica geométrica de las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas que consiste en poseer una subtangente constante, la cual fue clave para la incorporación en el registro geométrico de este tipo de curvas, el cual era considerado en el siglo XVII como la principal representación en matemáticas. En nuestra secuencia utilizamos esta característica geométrica de las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas como eje central para la exploración de la razón de cambio de ambos tipos de funciones, ya que esta es la causa fundamental de su importancia en las matemáticas y en las aplicaciones en otras ciencias, y particularmente cuando la base de estas funciones es el número  $e$ .

La incorporación de algunos elementos provenientes de la historia de las matemáticas en nuestra propuesta didáctica nos ayuda a explicar el papel de las matemáticas en la sociedad, al mostrar el desarrollo de las matemáticas como una actividad humana, y además puede contribuir a que el aprendizaje de las matemáticas sea una experiencia significativa. Al respecto, la postura del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) en su publicación *El Plan de Estudios y Normas de Evaluación para las Matemáticas Escolares* (NCTM, 1989), declaró que “los estudiantes deben tener numerosas y variadas experiencias relacionadas con la evolución cultural, histórica y científica de las matemáticas” (p. 6). Recomendaciones similares sobre el papel de la historia de las matemáticas se encuentran en los *Principios y Normas para las Matemáticas Escolares* del NCTM (2000) con el objetivo de desarrollar en los estudiantes una apreciación de las matemáticas como “uno de los mayores logros culturales e intelectuales de la humanidad” (p. 4).

Cuando los profesores usan los problemas históricos con los estudiantes para ejemplificar el esfuerzo humano, y particularmente el realizado por los matemáticos, “los estudiantes son pedagógicamente iluminados cuando se dan cuenta que tales problemas no se crean de la nada..., y que los matemáticos también cometen errores” (Liu, 2003, p. 419 en Clark, 2006). El reducir las contribuciones de los matemáticos (como por ejemplo, la invención de los logaritmos por John Napier) a una mera definición y algunas propiedades, sólo perpetúa la idea en los estudiantes que el estudio de las matemáticas se obtiene de la nada y no es el resultado de los logros culturales e intelectuales (Clark, 2006).

### III.3. Organización de la Secuencia Didáctica con base en la teoría de las representaciones de Duval.

Basados en lo descrito en el apartado anterior, hemos organizado la secuencia didáctica en cinco bloques de Actividades.

**Bloque I:** La variación exponencial.

Propusimos este bloque de actividades didácticas como un primer acercamiento al estudio de la variación exponencial de base arbitraria ( $f(x) = ka^x$  donde:  $a > 0$  y  $k > 0$ ), mediante la vinculación dinámica de sus distintas representaciones y el énfasis en las correspondientes conversiones en los diferentes registros de representación, utilizando como herramienta didáctica la calculadora Voyage 200.

En estos diseños se privilegió que el análisis de la variación surgiera de manera natural de una situación problemática del mundo real, con el propósito de estimular el interés del estudiante y de que fuera capaz de desarrollar modelos matemáticos en este contexto.

Dicha secuencia consta de nueve Actividades didácticas; las primeras cuatro tratan sobre fenómenos de variación que crecen exponencialmente, debido a que en concordancia con nuestro enfoque teórico se consideraron los siguientes cuatro casos.

1) *Problemas tabulares*, cuando la información inicial sobre el fenómeno de variación está dada mediante una tabla de valores numéricos. Nos decidimos iniciar con una Actividad de este tipo debido a que el registro tabular nos permite realizar análisis numéricos muy significativos para este tipo de funciones, como son la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, el porcentaje constante de cambio y el factor constante de cambio, los cuales son fácilmente calculables en la tabla. Además, por nuestra experiencia hemos observado que el trabajo en este registro de representación es el que se les facilita a los estudiantes para explorar las características propias de este tipo de variación.

2) *Problemas verbales*, cuando la información inicial sobre el fenómeno de variación está dada mediante una descripción verbal. Continuamos con esta Actividad con la intención que el estudiante identificara vocablos claves en la descripción verbal, relacionados con las propiedades esenciales que exploró en la Actividad anterior.

3) *Problemas gráficos*. Continuamos con una Actividad donde la información inicial sobre el fenómeno de variación está dada mediante una gráfica, con la intención de reforzar las exploraciones realizadas en las Actividades anteriores, para que se realizaran lecturas apropiadas en la gráfica y se identificaran las características que permiten deducir una fórmula para modelar dicho fenómeno de variación.

4) *Problemas analíticos*, cuando la información inicial sobre el fenómeno de variación está dada mediante un modelo teórico, expresado mediante la representación analítica. El objetivo de esta cuarta Actividad consistió en que el estudiante realizara algunas exploraciones que le permitieran tener un primer acercamiento intuitivo al número  $e$ .

Las cuatro Actividades siguientes representaron fenómenos de variación que decaen exponencialmente. Estas Actividades se presentaron en el mismo orden descrito anteriormente, de acuerdo al tipo de representación en que se plantea la información inicial del fenómeno, la justificación de dicho orden es similar.

En este bloque se presentó una Actividad diseñada para trabajar con un programa interactivo de la calculadora Voyage 200 denominado  $\text{subtan}()$ , así como dos Notas Históricas. El resto de las Actividades fueron diseñadas para trabajar con la calculadora Voyage 200 en las diferentes Aplicaciones de las que ésta dispone, como por ejemplo: el editor de funciones, tablas, gráficas, Editor de Datos y Matrices, etc.

**Bloque II:** Los logaritmos y sus propiedades.

El objetivo de este bloque consistió en que el estudiante comprendiera el concepto de logaritmo y sus propiedades mediante la exploración de progresiones aritméticas y geométricas, como una forma de emular el desarrollo histórico de éstos, así como también los obstáculos que se presentaron, como por ejemplo; la falta del concepto de base. Este acercamiento puede ayudar a los estudiantes a superar las dificultades habituales y permite que puedan comparar el valor de las técnicas modernas (Fauvel, 1991 en Clark, 2006).

Este bloque constó de diez Actividades didácticas, en todas éstas los estudiantes realizaron sus exploraciones dentro del registro numérico, comenzando con ideas intuitivas de “transformar” para facilitar operaciones, para que surgiera la definición y las propiedades de los logaritmos como herramienta facilitadora de ciertos cálculos. Se pretendió también traducir al registro algebraico las relaciones observadas. Al final de este bloque se presentó una Nota Histórica. A continuación se muestran las propiedades de los logaritmos que se pretenden promover en este Bloque de Actividades.

$$\log_b(ac) = \log_b(a) + \log_b(c)$$

$$\log_b(a/c) = \log_b(a) - \log_b(c)$$

$$\log_b(a^c) = c \cdot \log_b(a)$$

$$\log_b(a^{1/c}) = \frac{1}{c} \cdot \log_b(a)$$

**Bloque III:** La variación logarítmica.

Si bien es cierto que los logaritmos han perdido su papel como pieza fundamental en los cálculos matemáticos, la función logarítmica permanece en el centro de casi todas las ramas de las matemáticas, puras o aplicadas. Aparece en un gran número de aplicaciones, desde la física y la química hasta la biología, la psicología, el arte y la música (Maor, 2006).

Este bloque constó de seis Actividades didácticas por medio de las cuales se propuso un primer acercamiento a la variación logarítmica, promoviendo exploraciones en los distintos registros de representación, que giraban en torno a las características esenciales de las funciones logarítmicas, mediante el uso explícito de la relación entre las progresiones

geométrica y aritmética, a través de problemas prácticos y utilizando como herramienta la calculadora Voyage 200. El orden en el que se presentaron las Actividades fue de acuerdo al tipo de representación en el que se planteó la información inicial del fenómeno de variación, éste es similar al de las Actividades del Bloque I y las razones que justifican este orden también son similares.

**Bloque IV:** Análisis gráfico de las funciones exponenciales y logarítmicas.

En este bloque se proponen tareas de variación comparativa, ya que según Duval este tipo de tareas ayuda para promover un aprendizaje que considere la estrecha relación entre la noesis y la semiosis, a fin de que no se confunda al objeto matemático con sus representaciones. Por lo que es importante analizar todas las modificaciones conjuntas de la gráfica y de la forma de su representación analítica. De esta manera se llevó a cabo una asociación “variable visual de la representación gráfica”–“unidad significativa de la expresión analítica”, esta asociación no solamente centra la atención sobre la relación entre representación gráfica y analítica, sino que en ocasiones permite encontrar directamente la expresión analítica a partir de propiedades geométricas.

La variación de las unidades significativas en el registro analítico y el análisis de su efecto en las respectivas variables visuales de la representación gráfica, se promovió mediante las Actividades de la 1 a la 9, para el caso de las funciones exponenciales del tipo  $y = ba^x + d$ , mientras que para el caso de las funciones logarítmicas del tipo  $y = a \log_b cx + d$ , esto mismo se hizo mediante las Actividades de la 10 a la 13, con apoyo del programa interactivo graflog(). En la Actividad 14 el estudiante trabajó con el programa interactivo expolog(), el cual tuvo el propósito de apoyar al estudiante en el análisis gráfico de las funciones exponenciales y logarítmicas como funciones mutuamente inversas.

**Bloque V:** Funciones exponenciales y logarítmicas con base  $e$ .

En este grupo de actividades didácticas, el estudiante exploró las características de las funciones exponenciales y logarítmicas de base  $e$  y el por qué de su importancia en las matemáticas y en las ciencias aplicadas, a partir del estudio de la razón de cambio de la función exponencial, y particularmente de la función  $y = e^x$ , ya que esta es la fuente de todas las propiedades de la función exponencial y la razón básica de su importancia en las aplicaciones. En este bloque se partió del registro de representación gráfico como aquél que permite crear un ambiente enriquecedor para la conceptualización del número  $e$ , convencidos de que la visualización resulta ser un componente esencial del aprendizaje, debido a que ésta “no solo da a los datos disponibles una estructura significativa, sino que también constituye un factor importante como guía del desarrollo analítico de una solución” (Fischbein, 1987, p.101; citado en Arcavi & Hadas, 2000). Tomando como eje central la característica geométrica de las gráficas (tanto de las funciones exponenciales como de las logarítmicas) de poseer una subtangente constante, se promovió la exploración dinámica, primeramente con las funciones exponenciales, propiciando generar en los estudiantes la hipótesis de que existe una base especial que hace que las gráficas de la función  $y$  y de su derivada coincidan, diseñándose un programa interactivo en la calculadora Voyage 200 con este fin, que denominamos deriexpo(), y en la Actividad 1 se formularon preguntas que impulsaron a los estudiantes a razonar en esta dirección. También se analizó el caso de las funciones logarítmicas, en las que la gráfica de la función derivada “se asemeja” a la de la

función  $y = \frac{1}{x}$ , y la coincidencia con ella se logra cuando se toma como base del logaritmo al número  $e$ , diseñándose con este fin un programa interactivo en la calculadora que denominamos derivlog() y la Actividad 4 correspondiente. En la Actividad 5 el estudiante exploró (apoyado en un software de geometría dinámica) el problema de la cuadratura de la hipérbola equilátera, debido a que pensamos que es pedagógicamente estimulante para los estudiantes trabajar en los mismos problemas en los que trabajaron matemáticos famosos y en los cuales tuvieron muchas dificultades para resolverlos. En este bloque se presentaron también dos Notas Históricas.

### III.4. Descripción de las Actividades que conforman la Secuencia Didáctica.

En esta sección presentamos la descripción y el análisis de las Actividades que conforman la secuencia didáctica, la cual fue diseñada con el propósito de introducir de manera significativa las funciones exponenciales y logarítmicas de base  $e$ . Esta secuencia pretende promover la articulación coherente entre los diferentes registros de representación semiótica: verbal, tabular, gráfico y analítico, utilizando la calculadora Voyage 200 como herramienta didáctica. Todas estas Actividades se han incluido en el Anexo 2.

Consideramos importante aclarar la definición de base que se promueve en la secuencia didáctica tanto para las funciones exponenciales como para las logarítmicas: *base* es la razón constante de la progresión geométrica cuando la diferencia constante de la progresión aritmética es igual a 1 (para  $y = kb^x$ ;  $b = \frac{y_{n+1}}{y_n}$  si y solo si  $x_{n+1} - x_n = 1$ , para  $y = \log_b x$ ;  $b = \frac{x_{n+1}}{x_n}$  si y solo si  $y_{n+1} - y_n = 1$ ).

#### III.4.1. Bloque I: La variación exponencial.

**Actividad 1** (Problema tabular) *Crecimiento de una población de bacterias*. Se plantea el crecimiento de una población de bacterias a través de una representación tabular.

*Objetivos:*

- Identificar cuándo una tabla de datos corresponde a un crecimiento exponencial; al analizar que cuando los valores numéricos de la variable independiente forman una sucesión aritmética, los correspondientes valores numéricos de la variable dependiente forman una sucesión geométrica creciente. Es importante también que los estudiantes observen esta característica para facilitar más adelante la comprensión de la relación entre las funciones exponenciales y logarítmicas.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados en el registro tabular para la construcción del modelo matemático (representación analítica) correspondiente.
- Analizar algunas características particulares del crecimiento exponencial como el factor constante de cambio, porcentaje de crecimiento y tiempo de duplicación.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal		Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro analítico

**Actividad 2** (Problema verbal) *La leyenda del ajedrez*. En esta Actividad la información inicial se presenta a través de una descripción verbal de la situación a analizar.

*Objetivos:*

- Identificar cuándo una descripción verbal de un problema planteado corresponde a un crecimiento exponencial.
- Analizar el comportamiento de la función exponencial creciente del tipo  $y = ka^x$ , que aunque empieza creciendo lentamente, al hacerlo en forma acelerada, termina creciendo extremadamente rápido.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	X
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro verbal → Registro numérico

**Actividad 3** (Problema gráfico) *Crecimiento Poblacional*. La información inicial sobre este fenómeno de variación se da a través de una gráfica.

*Objetivos:*

- Identificar cuándo una representación gráfica corresponde a un crecimiento exponencial.
- Analizar características particulares del crecimiento exponencial; tiempo de duplicación, factor constante de cambio, porcentaje de crecimiento.
- Realizar lecturas apropiadas en la gráfica.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro gráfico → Registro numérico

**Actividad 4** (Problema analítico) *Asuntos financieros*. En esta Actividad el fenómeno de variación se presenta por medio de la representación analítica; se trata de la fórmula del interés compuesto.

*Objetivos:*

- Identificar cuándo una fórmula corresponde a un crecimiento exponencial.
- Analizar las características particulares del crecimiento exponencial, como la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica, y el tiempo de duplicación.
- Reforzar el significado físico de los parámetros involucrados en la fórmula.
- Estimular la capacidad para examinar una representación analítica, con el fin de hacer una estimación general del patrón que surgiría en una representación tabular o gráfica.
- Identificar la necesidad de una herramienta matemática para calcular el tiempo de la inversión para un saldo dado (resolución de una ecuación exponencial).
- Experimentar un acercamiento intuitivo a la base  $e$ , simulando lo que ocurre en la génesis de algunos objetos matemáticos, los cuales surgen de forma natural y comienzan a ser manipulados sin que se tenga conciencia plena de ellos.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	X

*Conversión privilegiada:* Registro analítico → Registro numérico

Después de esta Actividad se presenta una Nota Histórica sobre el número  $e$ .

**Actividad 5** (Problema tabular) *Restablecimiento del ritmo cardiaco*. La información inicial sobre este fenómeno de variación se presenta a través de una tabla de valores numéricos.

*Objetivos:*

- Identificar cuándo una tabla de datos numéricos corresponde a un decaimiento exponencial: al verificar el hecho de que cuando los valores numéricos de la variable independiente forman una sucesión aritmética, los valores numéricos de la variable dependiente forman una sucesión geométrica decreciente.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados en el registro tabular para la construcción del modelo matemático (representación analítica) correspondiente.

- Analizar las características particulares del decaimiento exponencial, como factor constante de cambio y porcentaje de decaimiento.
- Realizar un análisis descriptivo del comportamiento de las familias de funciones exponenciales decrecientes.
- Reforzar el significado físico de los parámetros involucrados en la fórmula.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	X
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro analítico

**Actividad 6** (Problema verbal) *Eliminación de contaminantes del combustible de aviones a reacción.* Esta Actividad inicia con una descripción verbal del fenómeno de variación.

*Objetivos:*

- Identificar cuándo una descripción verbal de un problema planteado corresponde a un decaimiento exponencial (identificar en la descripción verbal términos clave referidos al decrecimiento exponencial).
- Analizar las características particulares del decaimiento exponencial, como la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica, el factor de cambio constante y el porcentaje de decaimiento.
- Realizar un análisis descriptivo del comportamiento de las familias de funciones exponenciales decrecientes del tipo  $y = ka^x$ .
- Reforzar el significado físico de los parámetros involucrados en la fórmula.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	X
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	X

*Conversión privilegiada:* Registro verbal → Registro analítico

**Actividad 7** (Problema gráfico) *Eliminación de una droga por el organismo.* Este fenómeno de variación se presenta a través de una gráfica.

*Objetivos:*

- Identificar cuándo una representación gráfica corresponde a un decaimiento exponencial del tipo  $y = ka^x$ .
- Analizar algunas características particulares del decaimiento exponencial, tales como la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica y la vida media.
- Realizar lecturas apropiadas en la gráfica.
- Explorar el comportamiento de las subtangentes en diferentes tipos de funciones, y en especial en las funciones exponenciales.

*Conversiones entre representaciones semióticas* que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro gráfico → Registro analítico

En esta Actividad se presenta una Nota Histórica sobre la importancia que tuvo la característica geométrica de este tipo de curvas de poseer una subtangente constante.

La exploración del comportamiento de las subtangentes se realiza con ayuda del programa `subtan()`, como se muestra a continuación. El propósito de este programa es que el estudiante explore el comportamiento de las subtangentes para diferentes tipos de funciones, con la intención de que observe el comportamiento singular de las subtangentes en las funciones exponenciales. Empezamos con el caso de una función cuadrática simple,  $y = x^2$ , definida en la ventana de graficación que se muestra en la siguiente pantalla del programa:

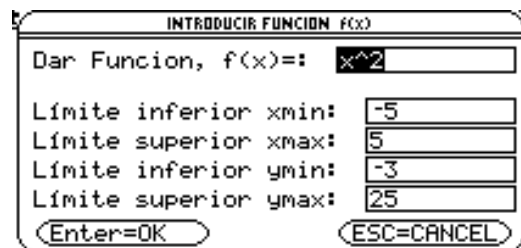


Figura 8.

En estas condiciones, al presionar ENTER aparecerá la pantalla gráfica y se trazará la gráfica de la función introducida.

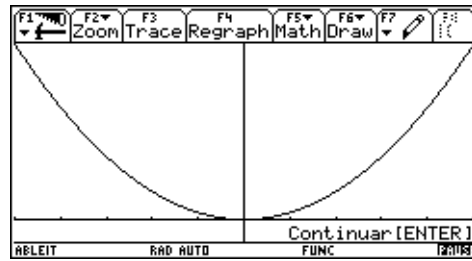


Figura 9.

Para continuar, se debe presionar ENTER, apareciendo de nuevo el menú de usuario, pero en la pantalla aparecerá también la representación analítica de la función graficada y el intervalo de graficación, además de que se activará una barra de herramientas.

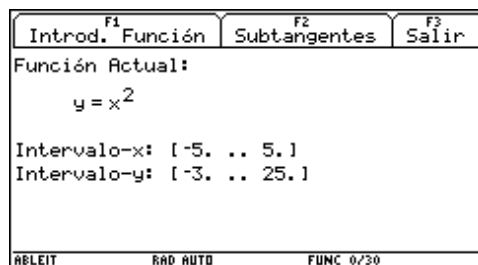
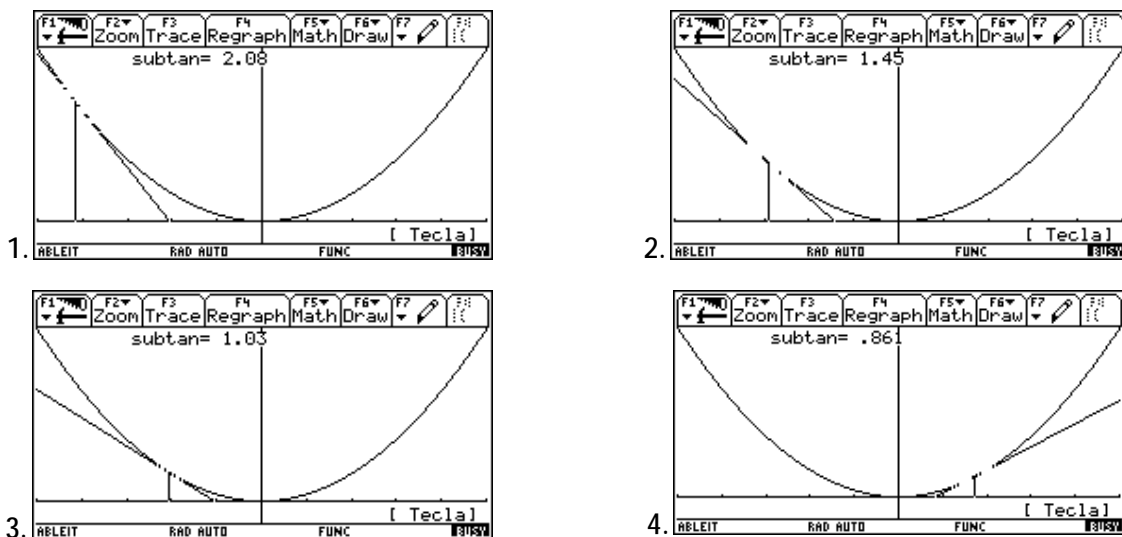
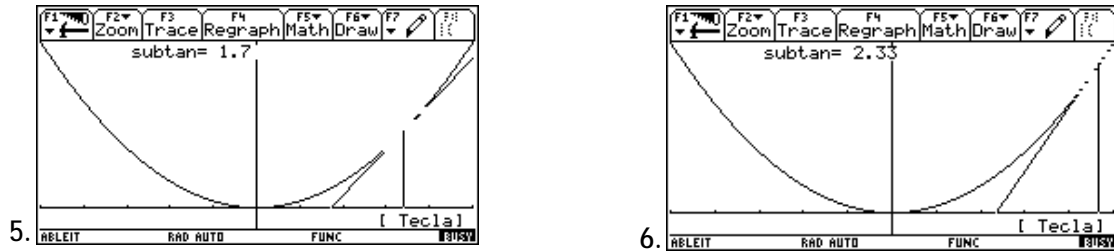


Figura 10.

Al seleccionar la opción Subtangentes con la tecla F2 de nuevo aparecerá la gráfica trazada previamente y se apreciará en pantalla una animación en donde se trazarán líneas tangentes a la curva y las correspondientes subtangentes, apareciendo también en pantalla el valor numérico de éstas. El estudiante puede detener la animación presionando la tecla de la letra S y hacer que ésta continúe presionando cualquier otra tecla. Enseguida se muestran (en forma estática, por supuesto) algunas pantallas de dicha animación.





Una vez concluida la animación se debe presionar ENTER para regresar al menú de usuario, ya sea para introducir una nueva función o para salir del programa, seleccionando la opción Salir con la tecla F3, (ver figura 10).

A continuación se muestran diferentes pantallas del programa, para ejemplificar el caso de una función exponencial, que es uno de los propósitos principales de este programa: que el estudiante observe para estos casos el comportamiento de las subtangentes.

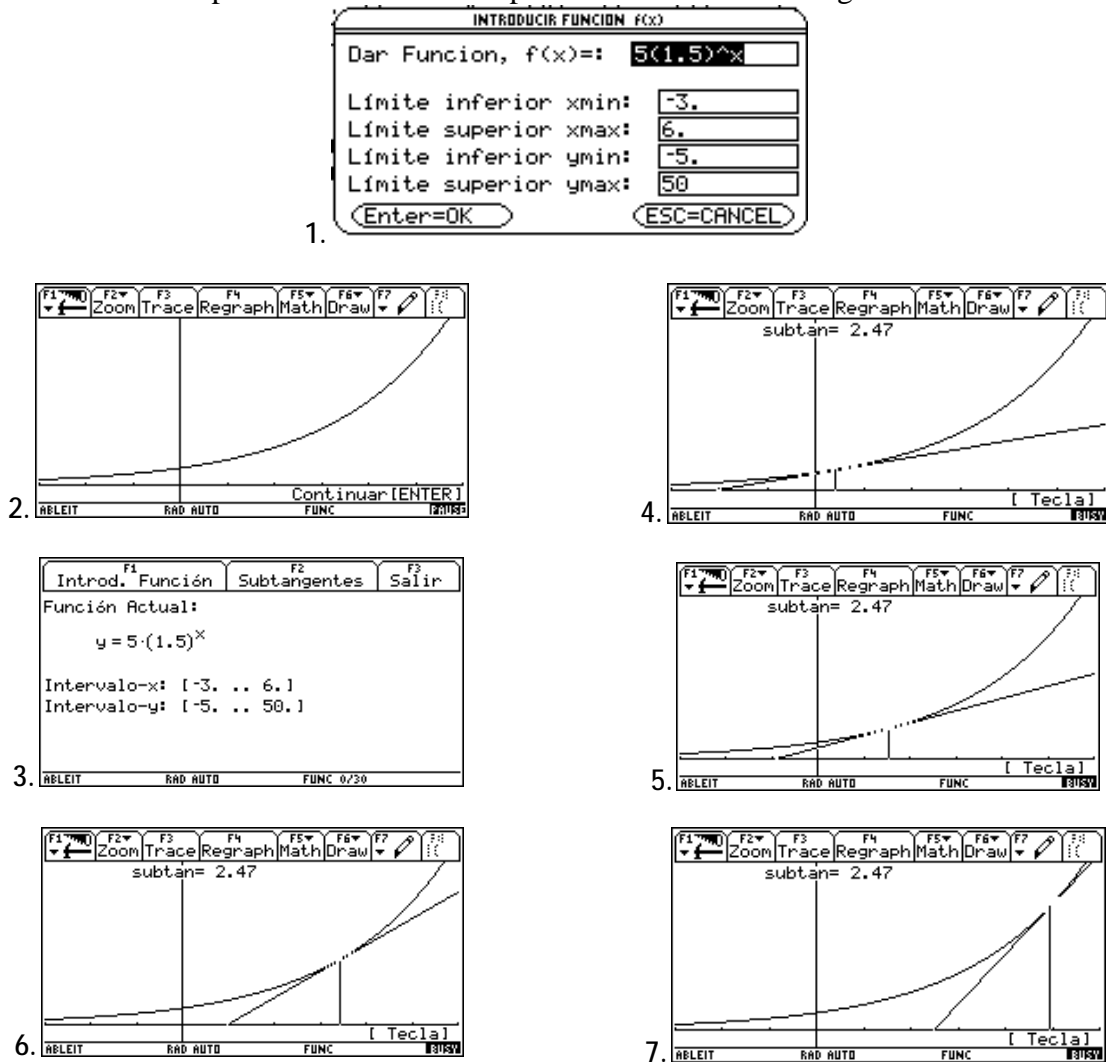


Figura 12. Pantallas del programa subtan() para el caso de una función exponencial del tipo  $y = ka^x$ .

**Actividad 8** (Problema analítico) *Disminución de la Presión Atmosférica*. En esta Actividad el fenómeno de variación se presenta a través de la representación analítica, donde la presión atmosférica  $P$  depende de la altura  $h$  sobre la superficie de la Tierra. Pero esta representación analítica es diferente a las que se había estado analizando en Actividades anteriores ( $P = P_0 a^h$ ), en ésta se le presenta la representación analítica de una función exponencial decreciente con base  $e$ .

*Objetivos:*

- Identificar que este tipo de representación analítica también representa un decaimiento exponencial.
- Analizar la característica particular del decaimiento exponencial como es la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica.
- Identificar la necesidad de una herramienta matemática para calcular la altura sobre el nivel del mar para una presión atmosférica dada (resolución de una ecuación exponencial).

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro analítico → Registro gráfico

**Actividad 9** (Problema tabular) *Tablas de funciones exponenciales*. En esta Actividad la información inicial se presenta a través de representaciones tabulares.

*Objetivos:*

- Establecer el siguiente criterio para identificar cuándo una tabla de datos numéricos corresponde a una variación exponencial: al verificar que cuando los valores numéricos de la variable independiente forman una sucesión aritmética, los valores numéricos de la variable dependiente forman una sucesión geométrica.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados en el registro tabular para la construcción del modelo matemático (representación analítica) correspondiente, para los casos en que los intervalos de variación de la variable independiente registrados en la tabla sean diferentes de 1 ( $\Delta x \neq 1$ ).

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro analítico

### III.4.2. Bloque II: Los logaritmos y sus propiedades.

**Actividad 1** (Problema tabular) *Exploración previa.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas numéricas.

*Objetivos:*

- Identificar las secuencias o sucesiones numéricas que se presentan en las tablas, como potencias sucesivas de un cierto número ( $\alpha^n$ ), y que a partir de dicha identificación el estudiante pueda continuar la secuencia tanto como desee, ya sea usando la calculadora o una hoja de cálculo como Excel. (En este caso  $\alpha = 2, 3, 5$ ).

*Conversiones entre representaciones semióticas* que se promueven:

Registro numérico → Registro analítico, Registro numérico → Registro verbal

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro analítico

**Actividad 2** (Problema tabular) *Introducción a los logaritmos.* La información inicial se presenta a través de una serie de tres tablas numéricas.

*Objetivos:*

- Formular los conceptos de *progresión aritmética* y *progresión geométrica*.
- Formular, primero en sus propias palabras y usando sus propios símbolos, y luego usando un lenguaje más técnico y una simbología más precisa, las reglas que definen las propiedades esenciales de los logaritmos, a saber:

$$E(\alpha_n \cdot \alpha_m) = E(\alpha_n) + E(\alpha_m)$$

$$E\left(\frac{\alpha_m}{\alpha_n}\right) = E(\alpha_m) - E(\alpha_n)$$

$$E(\alpha_n^m) = m \cdot E(\alpha_n)$$

$$E(\alpha_n^{1/m}) = \frac{1}{m} \cdot E(\alpha_n)$$

donde  $E$  representa al índice (o más precisamente, al exponente) del término de la sucesión que se indica entre paréntesis, y que numéricamente es igual al resultado de la(s) operación(es) involucrada(s).

*Conversiones entre representaciones semióticas* que se promueven:

Registro numérico  $\rightarrow$  Registro verbal, Registro numérico  $\rightarrow$  Registro analítico, Registro verbal  $\rightarrow$  Registro analítico

*Conversión privilegiada:* Registro numérico  $\rightarrow$  Registro verbal

**Actividad 3** (Problema tabular) *Extendiendo el poder de las tablas.* La información inicial se presenta a través de una serie de tres tablas de valores numéricos.

*Objetivos:*

- Expandir el poder de las tablas para poder calcular productos, cocientes, potencias y raíces de números que, si bien no están contenidos directamente en las Tablas numéricas, se pueden obtener a partir de ellas mediante su reescritura en la forma  $\alpha_n \times 10^{-k}$ .

*Conversiones entre representaciones semióticas* que se promueven:

Registro analítico  $\rightarrow$  Registro numérico, Registro numérico  $\rightarrow$  Registro verbal

*Conversión privilegiada:* Registro analítico  $\rightarrow$  Registro numérico

**Actividad 4** (Problema tabular) *Actividad previa.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas de valores numéricos.

*Objetivos:*

- Identificar las secuencias o sucesiones numéricas que se le presentan en las tablas, como potencias constantes de los números naturales  $n$ , y que a partir de dicha identificación pueda continuar la secuencia tanto como desee, ya sea usando la calculadora o una hoja de cálculo como Excel.
- Formular una representación del tipo  $n^\alpha$  para generar los números de las Tablas (en este caso  $\alpha = 2, 3, 5$ ).

*Conversiones entre representaciones semióticas* que se promueven:

Registro numérico  $\rightarrow$  Registro analítico, Registro numérico  $\rightarrow$  Registro verbal

*Conversión privilegiada:* Registro numérico  $\rightarrow$  Registro analítico

**Actividad 5** (Problema tabular) *¿Nuevas tablas de logaritmos?* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas de datos numéricos.

*Objetivos:*

- Formular el concepto de función potencia y correlacionarlo con el de progresión geométrica.
- Explicar por qué las reglas formuladas previamente para simplificar los cálculos en la Actividad 2 no se aplican en este caso.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro verbal, Registro numérico → Registro analítico, Registro verbal → Registro analítico

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro verbal

**Actividad 6** (Problema tabular) *Extendiendo el poder de las reglas.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas de valores numéricos.

*Objetivos:*

- Analizar el comportamiento de una progresión geométrica cuando el exponente es un número negativo.
- Verificar si las reglas formuladas previamente en la Actividad 2 para simplificar los cálculos se aplican en estos casos.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro verbal, Registro analítico → Registro numérico

*Conversión privilegiada:* Registro analítico → Registro numérico

**Actividad 7** (Problema tabular) *Verificando consistencia y precisión de las reglas logarítmicas.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas de valores numéricos.

*Objetivos:*

- Comprobar que las reglas formuladas previamente en la Actividad 2 se aplican para elementos de una misma progresión geométrica, y no se aplican para elementos de progresiones geométricas diferentes.
- Identificar una primera idea de la necesidad del concepto de base (o razón) para las progresiones geométricas.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro verbal, Registro analítico → Registro verbal

*Conversión privilegiada:* Registro analítico → Registro verbal

**Actividad 8** (Problema tabular) *Simbolización adecuada de las reglas de los logaritmos.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas numéricas.

*Objetivos:*

- Utilizar las reglas formuladas previamente en la Actividad 2 como herramienta para completar los datos que faltan en las tablas.
- Hacer más evidente la necesidad del concepto de base para las progresiones geométricas.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro analítico → Registro numérico, Registro numérico → Registro verbal

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro verbal

**Actividad 9** (Problema tabular) *El concepto de logaritmo.* La información inicial se presenta a través de una serie de tablas numéricas.

*Objetivos:*

- Introducir el concepto y la notación moderna para los logaritmos.
- Expresar las propiedades básicas de los logaritmos, las cuales fueron formuladas en la Actividad 2, usando la notación moderna.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro analítico, Registro analítico → Registro numérico

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro analítico

**Actividad 10** (Problema tabular) *Fórmula para el cambio de base.* La información inicial se presenta a través de tablas numéricas.

*Objetivos:*

- Analizar y generalizar la relación entre logaritmos de distintas bases.
- Establecer la fórmula para el cambio de base de los logaritmos.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro analítico, Registro numérico → Registro verbal

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro analítico

Al final de este Bloque de Actividades se presenta una Nota Histórica sobre los logaritmos.

### III.4.3. Bloque III: La variación logarítmica.

**Actividad 1** (Problema tabular) *El orden de magnitud.* La información inicial sobre el fenómeno de variación se presenta a través de una tabla de valores numéricos.

*Objetivos:*

- Identificar cuándo una tabla de datos numéricos representa una variación logarítmica: al verificar que cuando los valores numéricos de la variable independiente forman una sucesión geométrica, los valores numéricos de la variable dependiente forman una sucesión aritmética.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados en el registro tabular para la construcción del modelo matemático (representación analítica) correspondiente.
- Analizar las características de la representación gráfica de esta función logarítmica.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para obtener la representación analítica de la función logarítmica como tratamiento “inverso” del caso exponencial.
- Mostrar la utilidad práctica de una escala logarítmica.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro analítico

**Actividad 2** (Problema gráfico) *La ley de crecimiento de un árbol.* En esta Actividad la información inicial sobre el fenómeno de variación se presenta a través de una gráfica.

*Objetivos:*

- Analizar las características de la representación gráfica de la función logarítmica.
- Hacer lecturas apropiadas en la gráfica.
- Identificar una característica esencial de la variación logarítmica, como es la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética, tanto en la representación tabular como en la representación gráfica.
- Realizar un análisis descriptivo del comportamiento de las familias de funciones logarítmicas.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro gráfico → Registro numérico

**Actividad 3** (Problema analítico) *Multiplicación por una constante.* La información inicial se presenta a través de la representación analítica.

*Objetivos:*

- Visualizar en la gráfica el efecto de multiplicar por una constante (diferente de 1) una función logarítmica del tipo  $(f(x) = c \log_b x)$ .
- Visualizar en la gráfica el efecto de multiplicar por una constante diferente de 1, la variable independiente  $(f(x) = \log_b cx)$ .
- Realizar un análisis descriptivo del comportamiento de las familias de funciones logarítmicas.
- Deducir una fórmula para cambiar la base del logaritmo.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro gráfico → Registro analítico

**Actividad 4** (Problema tabular) *Inversiones financieras.* La información inicial de la situación a analizar se presenta a través de la representación tabular.

*Objetivos:*

- Discriminar entre los datos de la tabla aquellos que le permitan identificar que se trata de una variación logarítmica.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para deducir la representación analítica correspondiente para la función logarítmica.
- Identificar una característica esencial de la variación logarítmica, como es la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro analítico

**Actividad 5** (Problema tabular) *Una dieta experimental*. La información inicial sobre el fenómeno de variación se presenta a través de una tabla de valores numéricos.

*Objetivos:*

- Concluir en este caso que los datos de la tabla no proporcionan información suficiente para afirmar que se trata de una variación logarítmica.
- Analizar los datos de la tabla en el registro gráfico.
- Utilizar la calculadora Voyage 200 para calcular mediante regresión logarítmica la representación analítica que mejor se ajusta a los datos de la tabla.
- Identificar el tipo de logaritmo en la representación analítica que utilizó la calculadora Voyage 200 para el ajuste de los datos (logaritmo base  $e$ ).

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro numérico → Registro analítico

**Actividad 6** (Problema analítico) *La Escala de Richter*. En esta Actividad la información inicial se presenta por medio de la representación analítica.

*Objetivos:*

- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para despejar las variables involucradas en la representación analítica de la función logarítmica.
- Identificar la característica esencial de la variación logarítmica, como es la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética.
- Describir el comportamiento de la Escala de Richter a través de preguntas dirigidas en este contexto.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro analítico → Registro numérico

### III.4.4. Bloque IV: Análisis gráfico de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Las Actividades de la 1 a la 9 fueron diseñadas para explorar el comportamiento gráfico de las funciones exponenciales, todas éstas tienen un formato de diseño similar, analizándose en cada una de ellas un caso diferente. Todas constituyen problemas gráficos.

**Actividad 1.**  $f(x) = a^x$  cuando  $a= 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12$ .

**Actividad 2.**  $f(x) = a^x$  cuando  $a= 1.1, 1.2, 1.3, \dots, 1.9$ .

**Actividad 3.**  $f(x) = a^x$  cuando  $a= 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ .

**Actividad 4.**  $f(x) = k a^x$  cuando  $k= 1, 2, 3, \dots, 9$ , y la función de referencia es  $1.3^x$ .

**Actividad 5.**  $f(x) = k a^x$  cuando  $k= 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ , y la función de referencia es  $2^x$ .

**Actividad 6.**  $f(x) = k a^x$  cuando  $k= -0.1, -0.2, -0.3, \dots, -0.9$ , y la función de referencia es  $2^x$ .

**Actividad 7.**  $f(x) = k a^x$  cuando  $k= -1, -2, -3, \dots, -9$ , y la función de referencia es  $2^x$ .

**Actividad 8.**  $f(x) = a^x + c$  cuando  $c= -1, -2, -3, \dots, -9$ , y la función de referencia es  $1.4^x$ .

**Actividad 9.**  $f(x) = a^x + c$  cuando  $c= 1, 2, 3, \dots, 9$ , y la función de referencia es  $1.4^x$ .

*Objetivos:*

- Identificar las unidades significativas de la representación analítica y las variables visuales de la representación gráfica que cambian, así como también las que no cambian.
- Analizar el efecto en la gráfica de los diferentes parámetros involucrados en la representación analítica.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven en estas Actividades:*

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversiones privilegiadas:* Registro gráfico → Registro analítico, Registro analítico → Registro gráfico

Las Actividades de la 10 a la 13 fueron diseñadas para ayudar al estudiante a explorar las representaciones gráficas y analíticas de las funciones logarítmicas. En estas Actividades se propone el uso del programa graflog(), especialmente diseñado para tal fin. Todas ellas son problemas gráficos.

*Objetivos:*

- Promover la articulación entre la representación gráfica y la representación analítica, a través del análisis de la secuencia de gráficas que constituyen la animación presentada por el programa, así como las representaciones analíticas correspondientes a cada imagen.
- Identificar la relación que existe entre ciertas transformaciones particulares de las gráficas y el valor del parámetro que está variando en la representación analítica.
- Identificar cuales parámetros de la representación analítica tienen un efecto similar en la representación gráfica.

*Conversiones entre representaciones semióticas* que se promueven en estas Actividades:

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversiones privilegiadas:* Registro gráfico → Registro analítico, Registro analítico → Registro gráfico

**El programa graflog().**

El objetivo de este programa es promover las tareas de variación sistemática comparativa para el caso de las funciones logarítmicas. El programa muestra representaciones gráficas y analíticas dinámicamente vinculadas de la familia de funciones  $f(x) = a \log_b(cx) + d$ . Estas representaciones dinámicas se logran desplegando en pantalla una secuencia de imágenes relacionadas de manera especial, de modo que al aparecer automáticamente una tras otra, crean la ilusión de movimiento. Con esta puesta en correspondencia de las representaciones gráfica y analítica se busca favorecer la articulación de estos dos registros de representación.

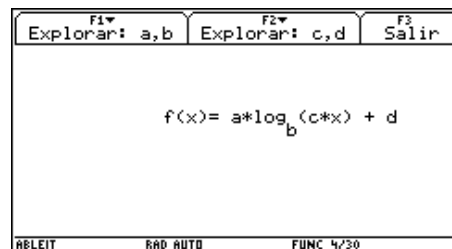


Figura 13.

**Actividad 10.** En esta Actividad se utiliza la opción Explorar:  $a, b$  del menú de usuario, y específicamente se consideran las opciones 1:  $b > 1$  y 2:  $0 < b < 1$  del submenú que se muestra al seleccionar dicha opción. Se pretende promover la articulación entre las representaciones gráficas presentadas en pantalla con la representación analítica del tipo  $f(x) = \log_b x$ . Al seleccionar la opción Explorar:  $a, b$ , presionando F1, aparecerá el siguiente submenú:

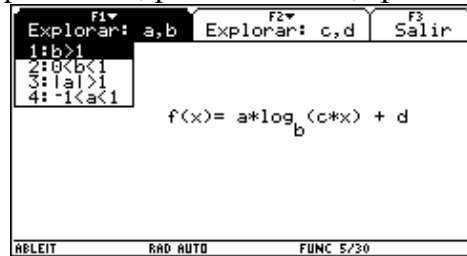


Figura 14.

**Opción 1:  $b > 1$ .** En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se estira y encoge en sentido vertical de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta su expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se tomaron elementos de la familia  $f(x) = \log_b x$ , haciendo variar el parámetro  $b$  desde 1.5 hasta 4 con incrementos de 0.5, lo cual hace un total de 6 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran (de manera estática por supuesto), las imágenes utilizadas en la animación, numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

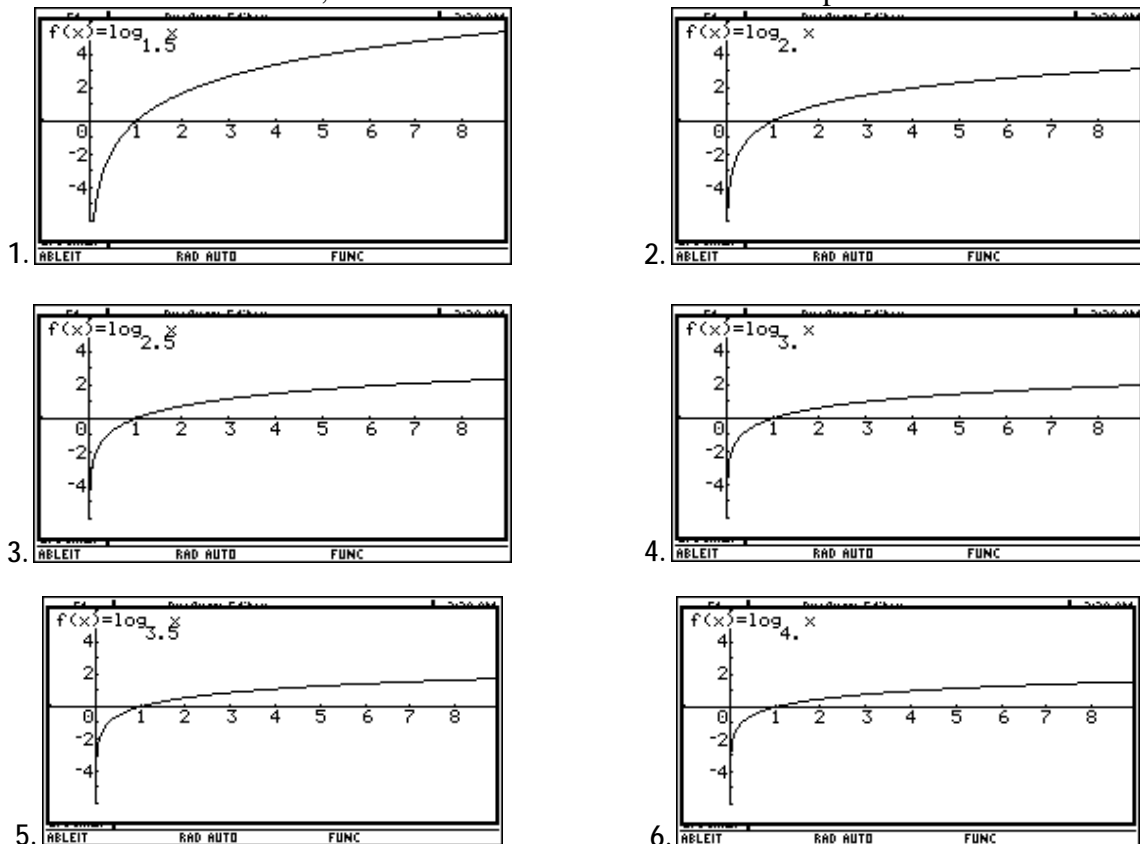


Figura 15. Familia  $f(x) = \log_b x$  donde  $b > 1$ .

Opción 2:  $0 < b < 1$ . En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se estira y encoge en sentido vertical de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta su expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se tomaron elementos de la familia  $f(x) = \log_b x$ , haciendo variar el parámetro  $b$  desde 0.1 hasta 0.7 con incrementos de 0.1, lo cual hace un total de 7 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran (de manera estática por supuesto), las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

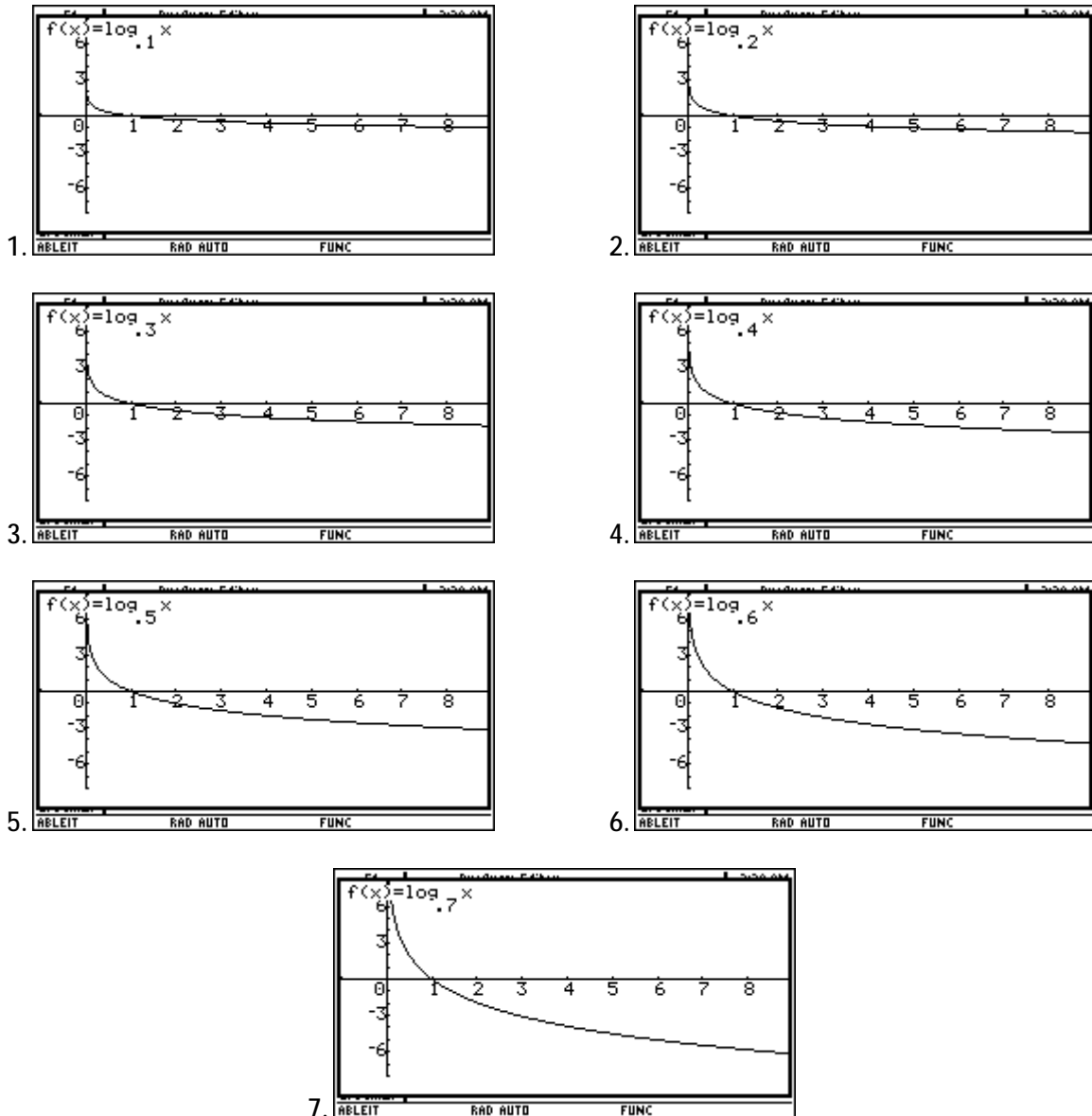


Figura 16. Familia  $f(x) = \log_b x$  donde  $0 < b < 1$ .

**Actividad 11.** En esta Actividad se usa la opción del menú Explorar: a,b y específicamente las opciones 3:  $|a|>1$  y 4:  $-1<a<1$  del submenú desplegado. Se pretende promover la articulación entre las representaciones gráficas presentadas en pantalla con la representación analítica del tipo  $f(x) = a \log_3 x$ .

*Opción 3:  $|a|>1$ .* En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se estira en sentido vertical con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada, y en algunos casos además de estirarse verticalmente también se refleja con respecto al eje  $x$ . Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a  $f(x) = \log_3 x$  y se tomaron elementos de la familia  $f(x) = a \log_3 x$ , haciendo variar el parámetro  $a$  desde -6 hasta 6 con incrementos de 2, lo cual hace un total de 7 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran las imágenes utilizadas en la animación.

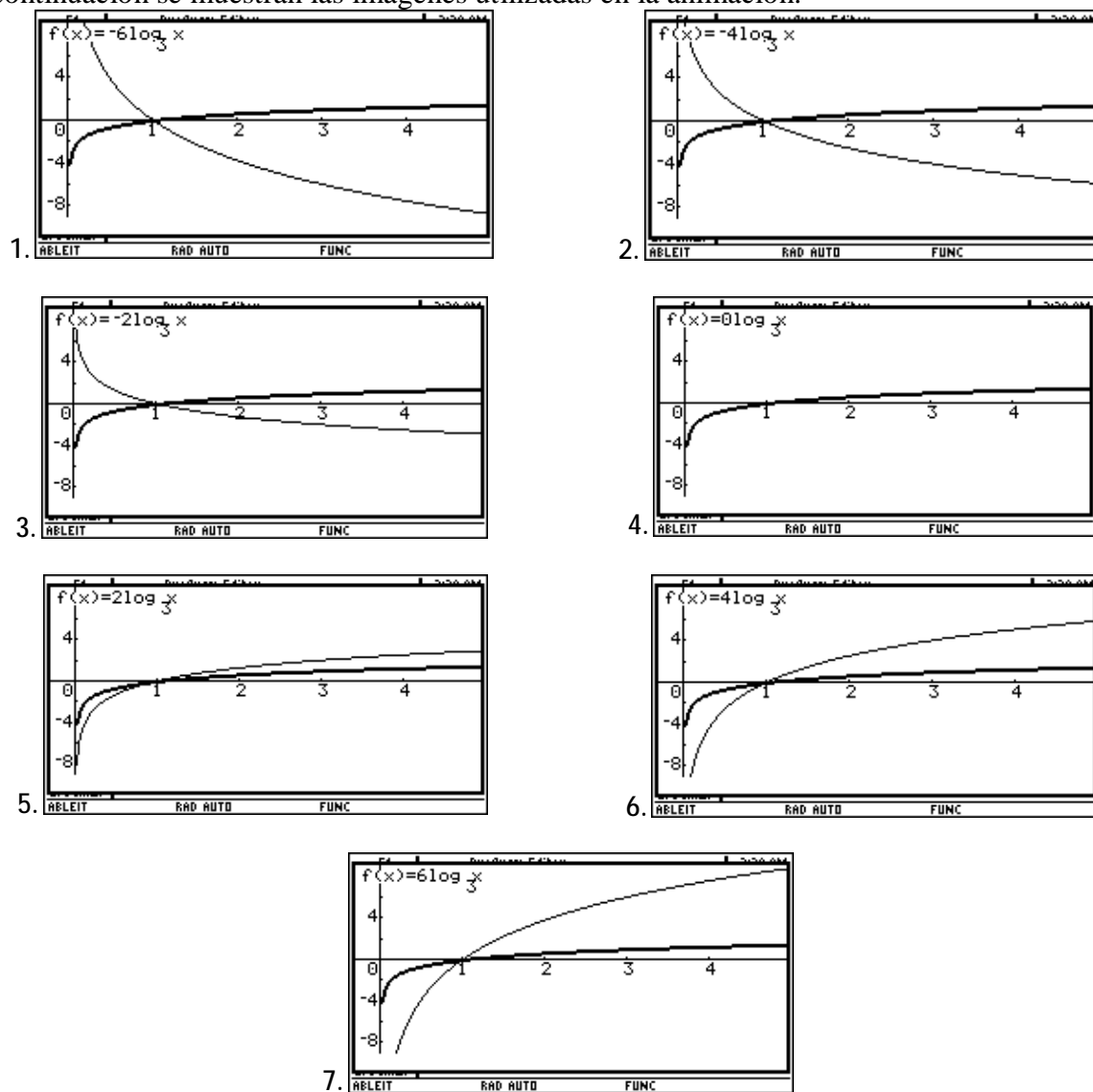


Figura 17. Familia  $f(x) = a \log_3 x$  donde  $|a| > 1$  y la función de referencia es  $f(x) = \log_3 x$ .

Opción 4:  $-1 < a < 1$ . En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se encoge en sentido vertical con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada, y en algunos casos además de encogerse verticalmente también se refleja con respecto al eje  $x$ . Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a  $f(x) = \log_3 x$  y se tomaron elementos de la familia  $f(x) = a \log_3 x$ , haciendo variar el parámetro  $a$  desde  $-0.7$  hasta  $0.7$  con incrementos de  $0.2$ , lo cual hace un total de 8 imágenes en la secuencia. A continuación se muestra (de manera estática por supuesto), la secuencia de imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

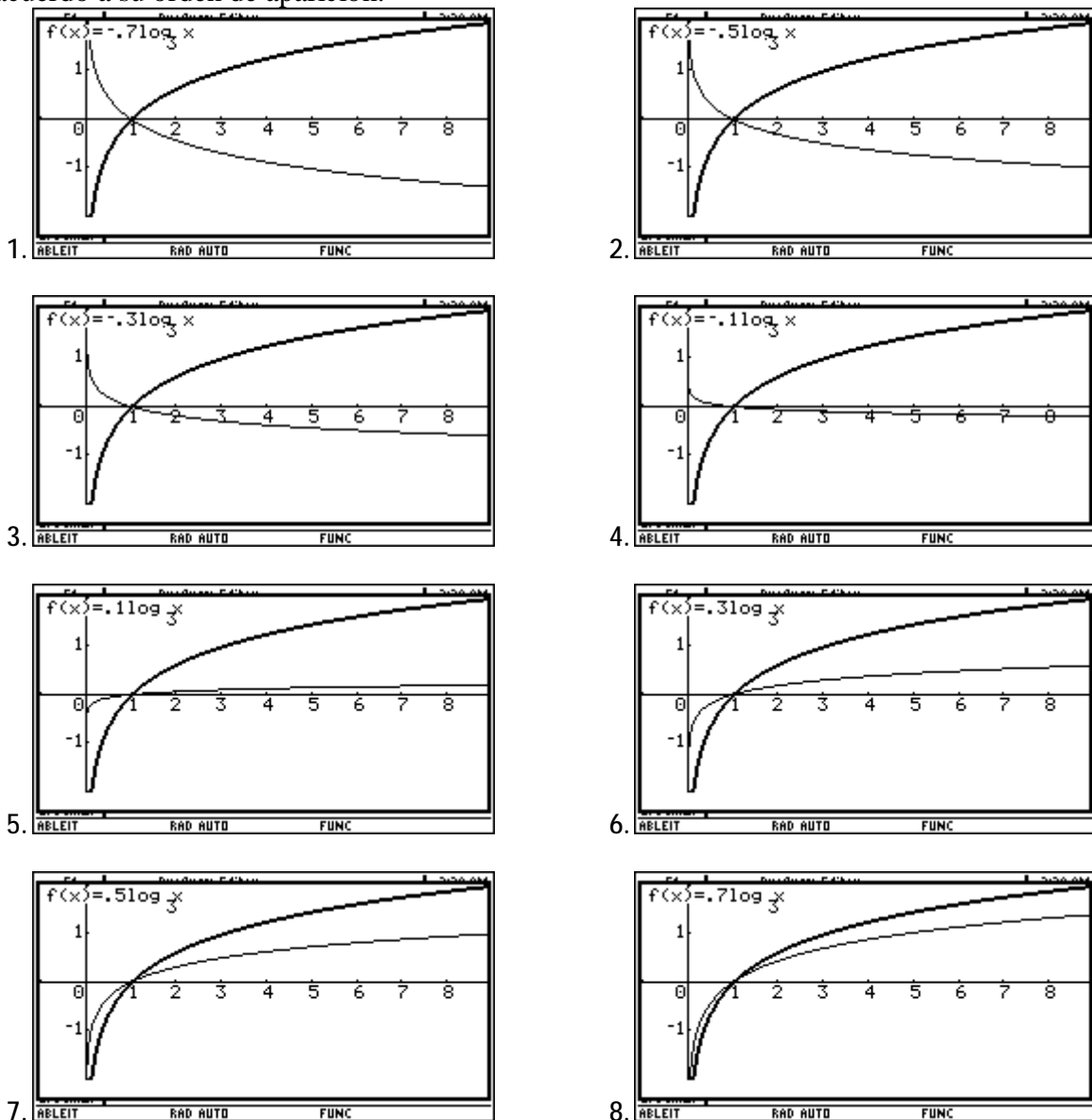


Figura 18. Familia  $f(x) = a \log_3 x$  donde  $-1 < a < 1$  y la función de referencia es  $f(x) = \log_3 x$ .

**Actividad 12.** En esta Actividad se emplea la opción del menú Explorar: c,d y específicamente las opciones 1:  $c > 1$  y 2:  $0 < c < 1$  del submenú desplegado. Se pretende promover la articulación entre las representaciones gráficas presentadas en pantalla con la representación analítica del tipo  $f(x) = \log_2 cx$ .

Al seleccionar la opción Explorar: c, d presionando F2, se tiene acceso al submenú mostrado en la siguiente pantalla.

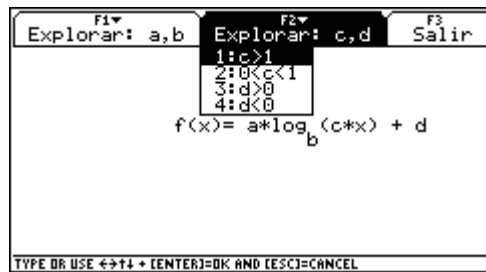


Figura 19.

*Opción 1:  $c > 1$ .* En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia arriba con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a  $f(x) = \log_2 x$  y se tomaron elementos de la familia  $f(x) = \log_2(cx)$ , haciendo variar el parámetro  $c$  desde 2 hasta 5 con incrementos de 1, lo cual hace un total de 4 imágenes en la secuencia. A continuación se muestra de manera estática por supuesto, la secuencia de imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

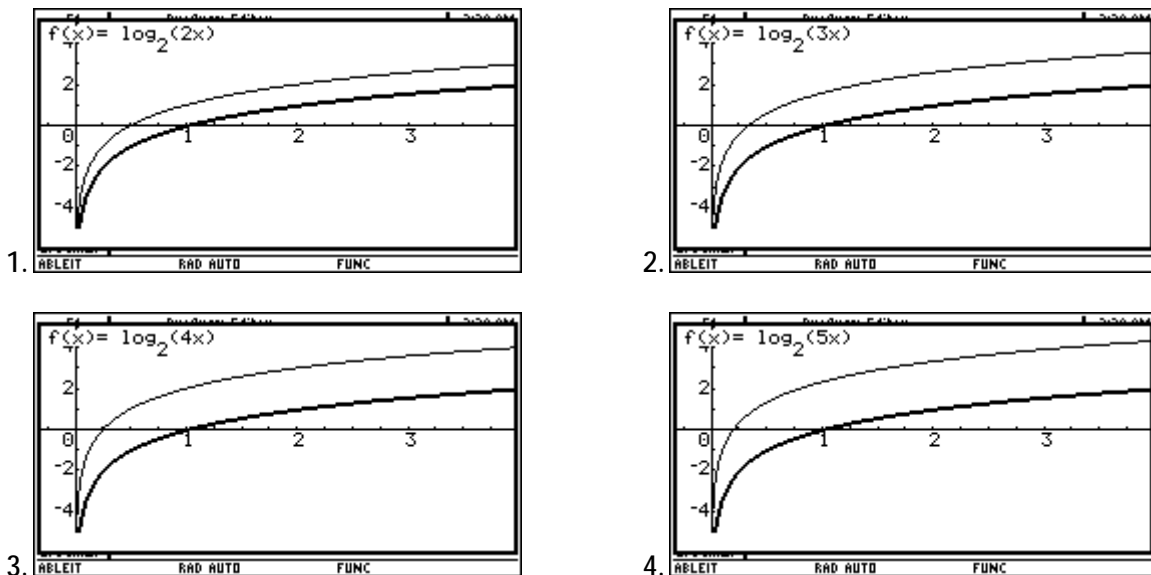


Figura 20. Familia  $f(x) = \log_2(cx)$  donde  $c > 1$  y la función de referencia es  $f(x) = \log_2 x$ .

*Opción 2:*  $0 < c < 1$ . En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia abajo con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a  $f(x) = \log_2 x$  y se tomaron elementos de la familia  $f(x) = \log_2(cx)$ , haciendo variar el parámetro  $c$  desde 0.1 hasta 0.5 con incrementos de 0.1, lo cual hace un total de 5 imágenes en la secuencia. A continuación se muestra de manera estática por supuesto, la secuencia de imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

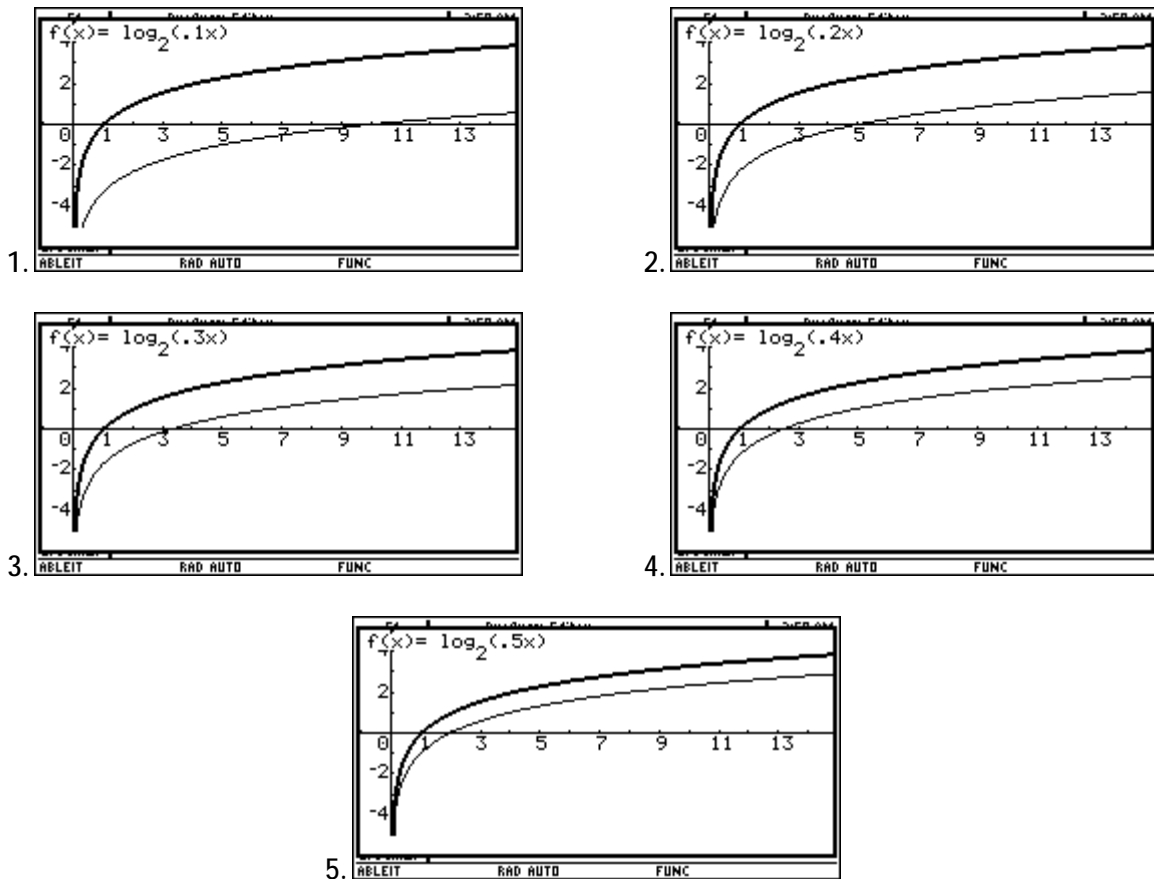


Figura 21. Familia  $f(x) = \log_2(cx)$  donde  $0 < c < 1$  y la función de referencia es  $f(x) = \log_2 x$ .

**Actividad 13.** En esta Actividad se emplea la opción del menú Explorar: c,d y específicamente las opciones 3:  $d > 0$  y 4:  $d < 0$  del submenú respectivo. Se pretende promover la articulación entre las representaciones gráficas presentadas en pantalla con la representación analítica del tipo  $f(x) = \log_3 x + d$ .

*Opción 3:*  $d > 0$ . En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia arriba con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se

presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a  $f(x) = \log_2 x$  y se tomaron elementos de la familia  $f(x) = \log_2 x + d$ , haciendo variar el parámetro  $d$  desde 0.5 hasta 3 con incrementos de 0.5, lo cual hace un total de 5 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran de manera estática las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

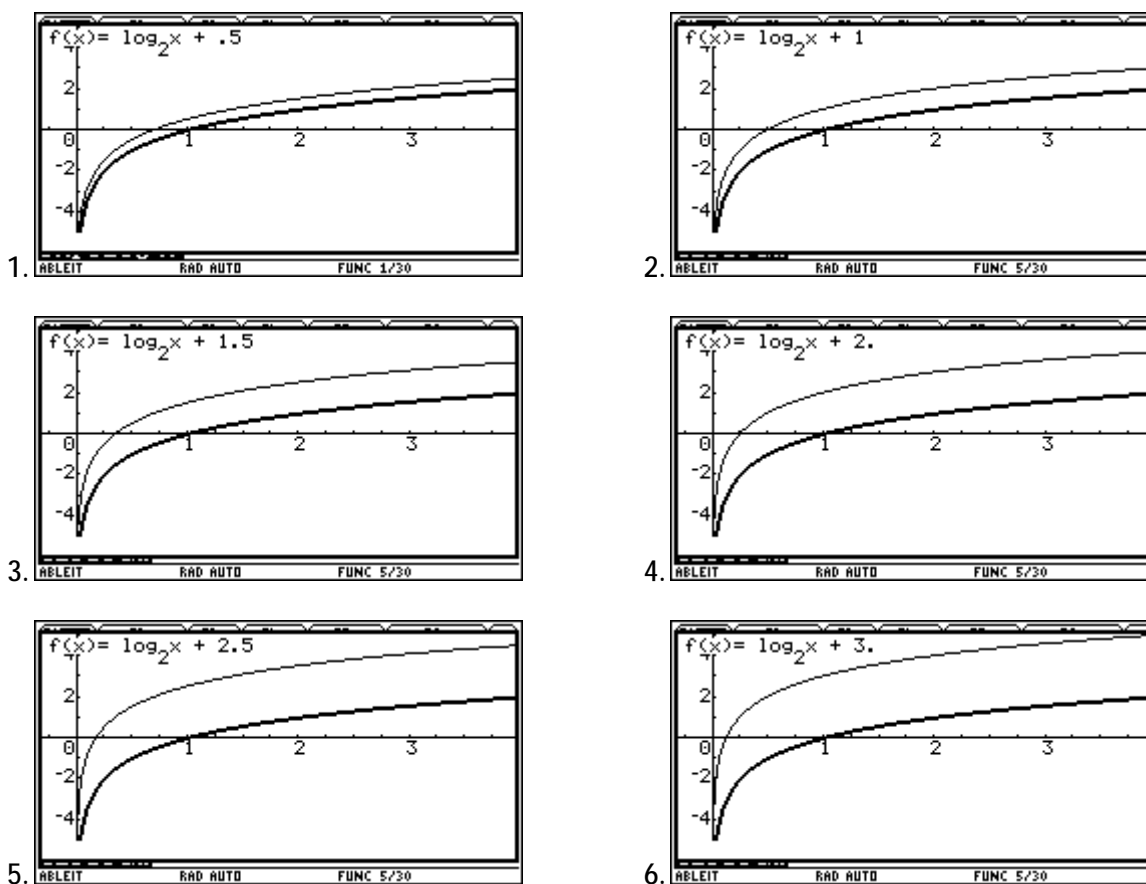


Figura 22. Familia  $f(x) = \log_2 x + d$  donde  $d > 0$  y la función de referencia es  $f(x) = \log_2 x$ .

*Opción 4:  $d < 0$ .* En la pantalla aparecerá una animación en la que la gráfica se desplaza hacia abajo con respecto a la gráfica de referencia, la cual está remarcada. Esta animación se lleva a cabo de manera cíclica un número determinado de veces, al mismo tiempo que se presenta también en pantalla la representación analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se eligió como función de referencia a  $f(x) = \log_2 x$  y se tomaron elementos de la familia  $f(x) = \log_2 x + d$ , haciendo variar el parámetro  $d$  desde -3 hasta -0.5 con incrementos de 0.5, lo cual hace un total de 5 imágenes en la secuencia. A continuación se muestran de manera estática las imágenes utilizadas en la animación. Éstas se encuentran numeradas de acuerdo a su orden de aparición.

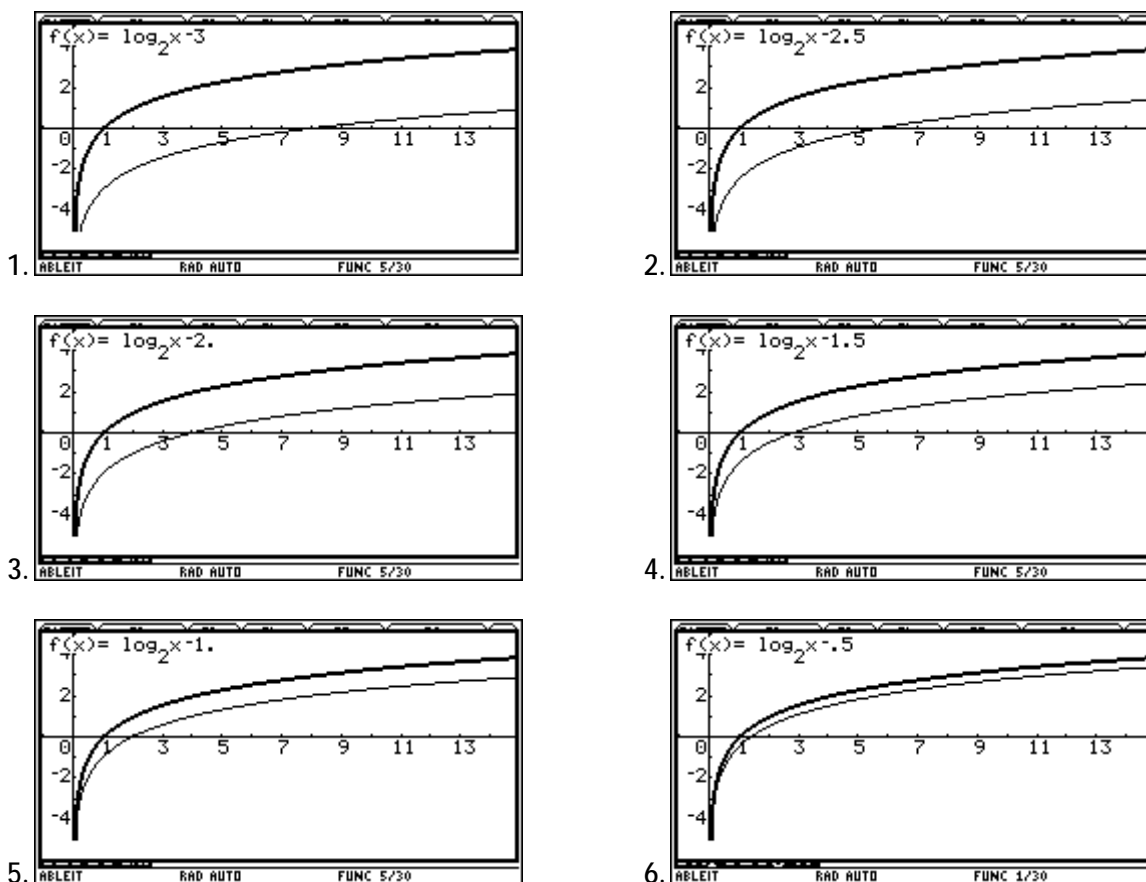


Figura 23. Familia  $f(x) = \log_2 x + d$  donde  $d < 0$  y la función de referencia es  $f(x) = \log_2 x$ .

**Actividad 14.** Explorando las representaciones gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas. Para esta Actividad se propone el uso del programa `expolog()`.

*Objetivos:*

- Analizar el comportamiento gráfico (simetría, reflexión de puntos) de las funciones exponenciales y logarítmicas de la forma;  $f(x) = \log_b x$  y  $g(x) = b^x$ , en los mismos ejes y cuyo valor de la base en ambas funciones es igual.
- Identificar a las funciones exponenciales y logarítmicas como funciones inversas.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro analítico → Registro gráfico

**El programa** expolog( ).

El propósito de este programa es que el estudiante explore algunas características gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas cuando los valores de las bases de ambas funciones son iguales y éstas son graficadas en los mismos ejes coordenados. En este programa se cuidó que las escalas de los ejes fueran iguales y de igual tamaño, ya que éstas son condiciones indispensables para que se aprecie la simetría entre ambas representaciones gráficas, así como la reflexión de puntos de una función en la otra con respecto a la recta  $y = x$ .

Para que el programa pueda trazar las gráficas correspondientes, es necesario que se introduzca un número positivo y diferente de uno como valor para la base, como se muestra en la siguiente pantalla.

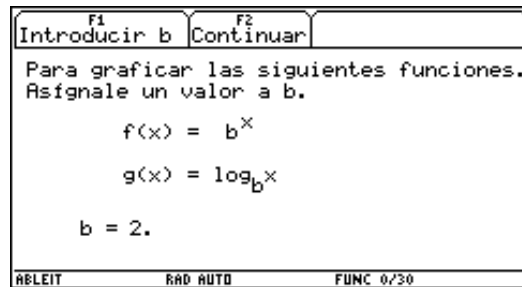


Figura 24.

Al presionar la opción del menú Continuar F2, aparecerá la pantalla gráfica en la que se aprecian los ejes con su respectiva cuadrícula y el trazado de ambas funciones, al terminar éste aparecerá con estilo remarcado la gráfica de la línea  $y = x$  y una traza, la cual puede moverse a través de cualquiera de las gráficas trazadas con las teclas del cursor ◀, ▶ así como por medio del teclado numérico, asignándole un valor a  $x$ , y también pasar de una función a otra con las teclas del cursor ▲ y ▼.

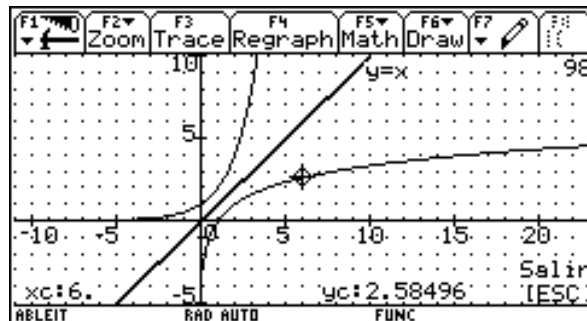


Figura 25.

### III.4.5. Bloque V: Funciones exponenciales y logarítmicas con base $e$ .

**Actividad 1** (Problema gráfico) *La derivada de la función exponencial* ( $y = a^x$ ). Este tema se aborda desde una perspectiva diferente a como la abordan los libros de Cálculo tradicionales, que consiste en el desarrollo de un límite bastante complicado (desde el punto de vista cognitivo) y carente de significado para los estudiantes. En esta propuesta aprovechamos las ventajas de los dispositivos CAS como la Voyage 200, los cuales nos facilitan acercamientos geométricos para abordar esta problemática. En esta Actividad se propone el uso del programa `deriexpo()`.

*Objetivos:*

- Utilizar el registro gráfico para crear un ambiente enriquecedor para la conceptualización del número  $e$ .
- Explorar el comportamiento de las subtangentes en las funciones exponenciales.
- Promover una exploración que propicie generar la hipótesis de que existe una base especial que hace que las gráficas de la función y de su derivada coincidan, y estimar el valor concreto de dicha base.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para deducir la representación analítica de la derivada de la función exponencial ( $y = a^x$ ).

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversiones privilegiadas:* Registro gráfico → Registro analítico, Registro numérico → Registro analítico

Después de esta Actividad se presenta una Nota Histórica de la función  $y = e^x$ .

**El programa** `deriexpo()`.

El propósito de este programa es que el estudiante explore el comportamiento de la derivada o razón de cambio de las funciones exponenciales simples, particularmente cuando la base es el número  $e$ .

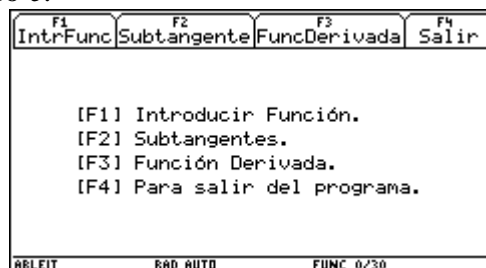


Figura 26.

El estudiante deberá elegir la opción Introducir Función, presionando F1, ya que las opciones Subtangentes, [F2] y Función Derivada, [F3] no están disponibles si no se introduce la función primero.

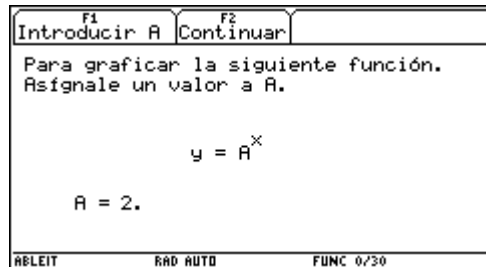


Figura 27.

Al presionar la opción del menú Continuar con la tecla F2, aparecerá la pantalla gráfica donde se trazará la gráfica correspondiente; una vez trazada ésta se deberá presionar ENTER para continuar.

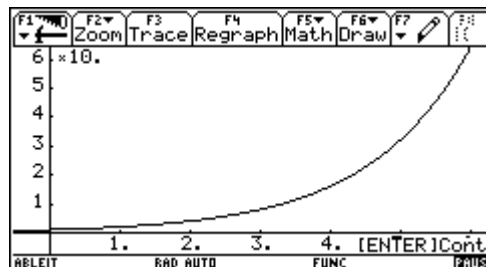


Figura 28.

Aparecerá de nuevo el menú principal y también se mostrará en pantalla la expresión analítica de la función graficada. Una vez introducida la función, todas las opciones del menú de usuario estarán disponibles.

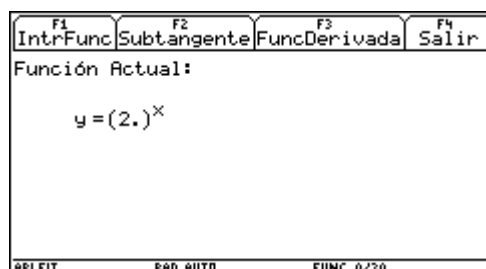


Figura 29.

Al seleccionar la opción Subtangentes con la tecla F2 de nuevo aparecerá la gráfica trazada previamente, y se apreciará en pantalla una animación donde se trazarán líneas tangentes a

la curva y las correspondientes subtangentes, mostrándose también en pantalla el valor numérico de éstas. Durante la animación, el estudiante tendrá la opción de detenerla, presionando la tecla de la letra S, y continuarla al presionar cualquier otra tecla. Enseguida se muestran algunas pantallas de esta animación.

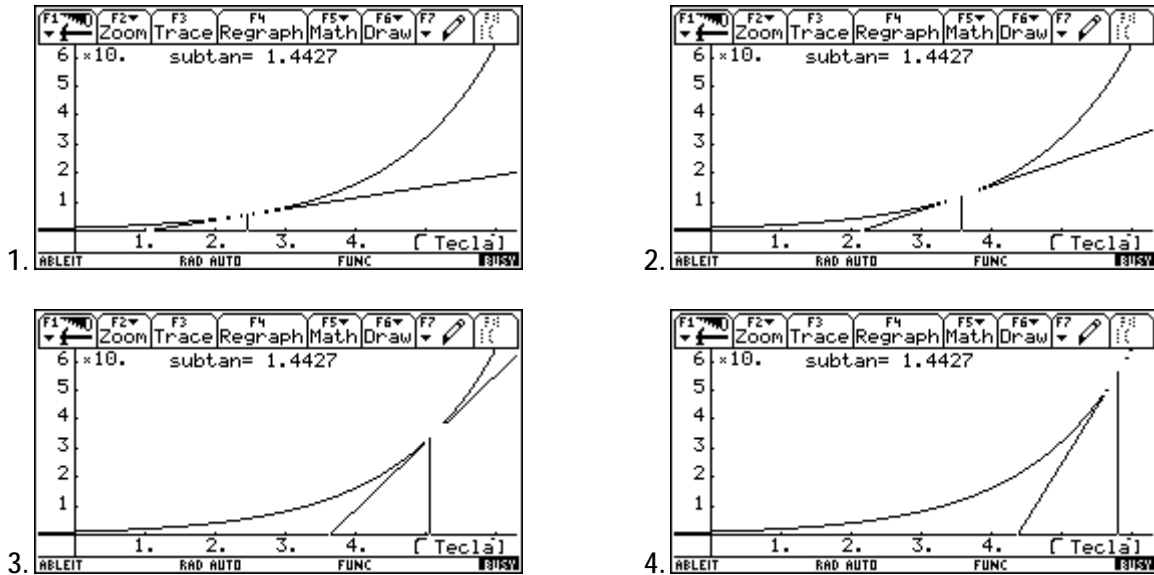


Figura 30. Pantallas correspondientes a la animación de la opción Subtangente del programa deriexpo ( ).

Una vez concluida dicha animación, se deberá presionar ENTER para volver al menú principal, (ver figura 29). Después de haber explorado la opción Subtangente, el estudiante puede elegir cualquiera de las opciones del menú anterior.

Al seleccionar la opción Función Derivada con la tecla F3, aparecerá la gráfica de la función trazada previamente y comenzará a trazarse la gráfica de su función derivada; una vez concluida ésta, aparecerá en pantalla la expresión analítica de la función derivada.

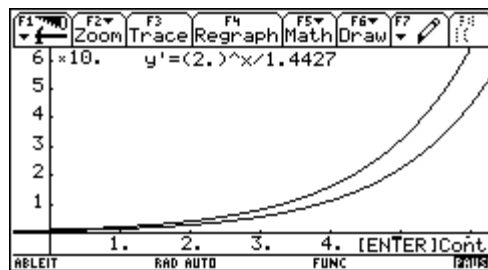


Figura 31.

Al presionar ENTER aparecerá de nuevo el menú principal (ver figura 29), donde el estudiante podrá repetir las exploraciones anteriores con otra función, seleccionando de nuevo la opción Introducir Función con la tecla F1, o salir del programa presionando la tecla F4.

**Actividad 2** (Problema analítico) *Transformando una función de la forma  $y = A a^x$  a una función exponencial simple con base  $e$  y viceversa.* En esta Actividad la información inicial se presenta a través de la representación analítica.

*Objetivos:*

- Promover una exploración para analizar tanto en el registro gráfico como en el registro tabular el hecho de que dos representaciones analíticas diferentes representan una misma función.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para transformar una expresión analítica de la forma  $y = Aa^x$  a una de la forma  $y = Ae^{kx}$  y viceversa.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

Se fomenta el tratamiento en el registro analítico.

**Actividad 3** (Problema verbal) *Contaminación radiactiva.* La información inicial sobre este fenómeno de variación se presenta a través de una descripción verbal.

*Objetivos:*

- Reforzar el significado físico de los parámetros involucrados en la fórmula.
- Identificar la característica esencial tanto de las funciones exponenciales como de las logarítmicas, como es la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para despejar las variables involucradas en la expresión analítica respectiva.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico		Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	
Registro gráfico → Registro numérico		Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal		Registro verbal → Registro analítico	X

*Conversión privilegiada:* Registro verbal → Registro analítico

**Actividad 4** (Problema gráfico) *La derivada de la función logarítmica*. Al igual que en la Actividad 1, este tópico se aborda desde una perspectiva geométrica. En esta Actividad se propone el uso del programa derivlog( ).

*Objetivos:*

- Utilizar el registro gráfico para crear un ambiente enriquecedor para la conceptualización del número  $e$ .
- Explorar el comportamiento de las subtangentes en las funciones logarítmicas.
- Promover una exploración para analizar la función derivada de la función logaritmo, y particularmente cuando la base del logaritmo es el número  $e$ .
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para deducir la expresión analítica de la derivada de la función logarítmica ( $y = \log_b x$ ).

*Conversiones entre representaciones semióticas* que se promueven:

Registro numérico → Registro gráfico	X	Registro analítico → Registro numérico	X
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal		Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico	X	Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversiones privilegiadas:* Registro gráfico → Registro analítico, Registro numérico → Registro analítico

**El programa** derivlog( ).

El objetivo de este programa es que el estudiante explore el comportamiento de la derivada de las funciones logarítmicas del tipo  $y = \log_b x$  particularmente cuando la base del logaritmo es el número  $e$ .

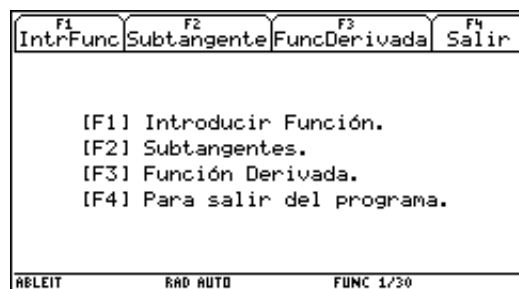


Figura 32.

El estudiante deberá elegir la opción Introducir Función con la tecla F1, ya que las opciones Subtangentes [F2] y Función Derivada [F3] no estarán disponibles si primero no se introduce la función.

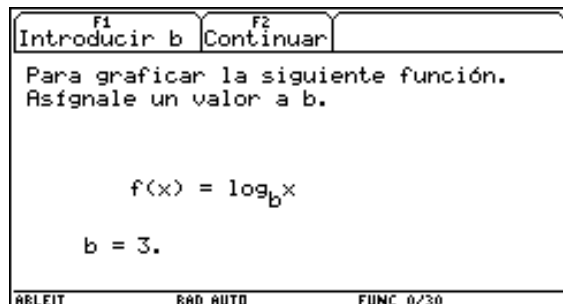


Figura 33.

Al presionar la opción del menú Continuar con la tecla F2, aparecerá la pantalla gráfica donde se trazará la gráfica correspondiente, una vez trazada ésta se deberá presionar ENTER para continuar.

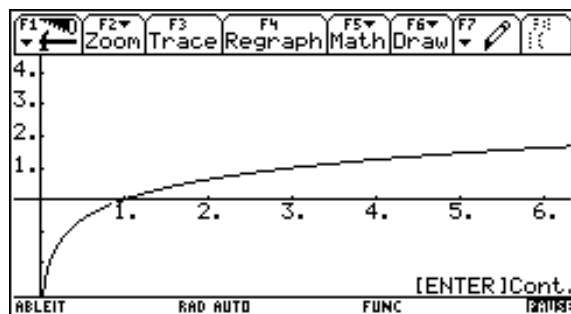


Figura 34.

Aparecerá de nuevo el menú principal y también la representación analítica de la función graficada. Una vez introducida la función, todas las opciones del menú estarán disponibles.

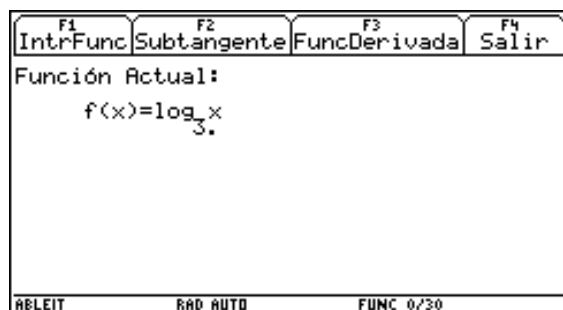


Figura 35.

Al seleccionar la opción Subtangente con la tecla F2, de nuevo aparecerá la gráfica trazada previamente y se apreciará en pantalla una animación donde se trazarán líneas tangentes a la curva y las correspondientes subtangentes, mostrándose también el valor numérico de éstas. En el transcurso de la animación, el estudiante puede detener ésta, presionando la tecla de la letra S, y al presionar cualquier otra tecla, la animación continuará. A continuación se muestran algunas pantallas de esta animación. Las subtangentes se grafican en el eje vertical, para que éstas sean constantes.

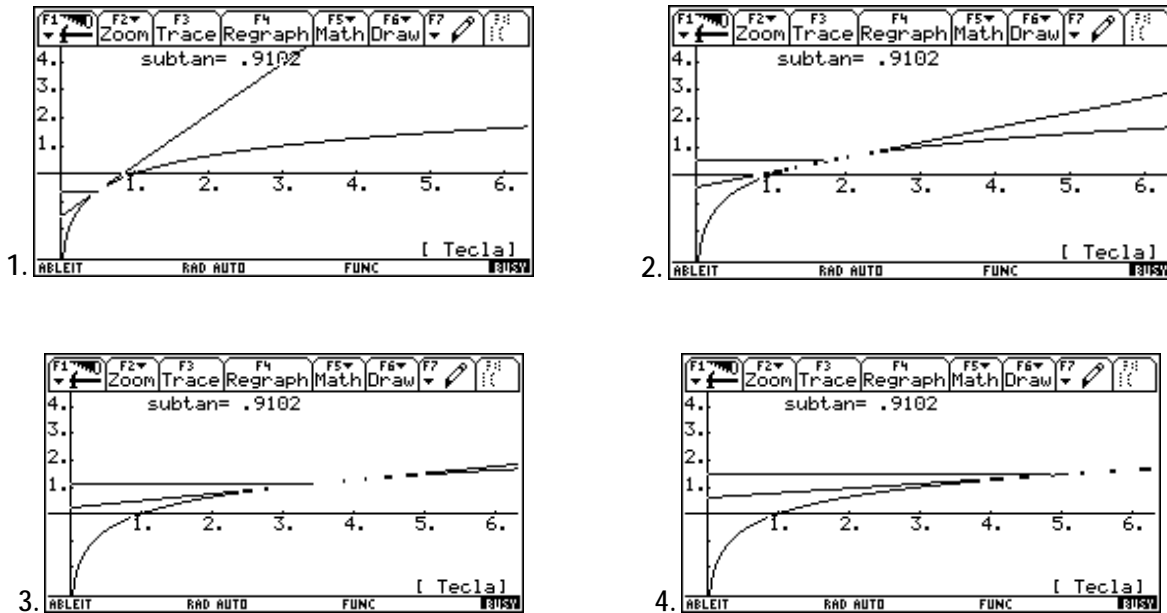


Figura 36. Pantallas correspondientes a la animación de la opción Subtangente del programa derivlog().

Una vez concluida dicha animación se deberá presionar ENTER para volver al menú principal (ver figura 35). Después de haber explorado la opción Subtangente, el estudiante podrá elegir cualquiera de las opciones del menú anterior.

Al seleccionar la opción Función Derivada, con la tecla F3, aparecerá la gráfica de la función trazada previamente y comenzará a trazarse la gráfica de su función derivada, una vez concluida ésta, aparecerá en pantalla la expresión analítica de la función derivada.

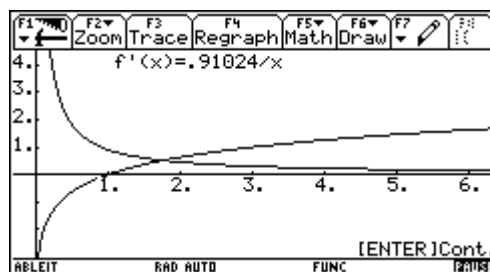


Figura 37.

Al presionar ENTER aparecerá de nuevo el menú principal (ver figura 35) donde el estudiante podrá repetir las exploraciones anteriores con otra función, seleccionando de nuevo la opción Introducir Función con la tecla F1, o salir del programa presionando la tecla F4.

**Actividad 5** (Problema gráfico) *La cuadratura de la hipérbola rectangular*. Un elemento importante y ausente en las clases de matemáticas es el quiebre en el patrón de cuadratura para las funciones potencia, y el consecuente desafío de encontrar la cuadratura de la hipérbola equilátera. Ferrari (2001) considera como elemento fundamental para incorporar en un diseño cuyo propósito es dotar de significado a la función logaritmo esta situación que se aborda en esta Actividad, cuya resolución demandó que varios de los más grandes matemáticos de todos los tiempos la encararan. Esta idea admite el trabajo en varios registros de representación y toma como eje la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética. La importancia de los logaritmos en el desarrollo histórico del Cálculo radica en la vinculación de los logaritmos con la cuadratura de la hipérbola equilátera; esta vinculación también fue la causa de que los logaritmos se despegaran de sus orígenes aritméticos para hallar cabida en otros registros como el geométrico-gráfico, considerado en el siglo XVII la principal representación en matemáticas. Por estas razones consideramos incluir esta Actividad en la secuencia, y justamente en este lugar.

Antes de iniciar la Actividad se presenta una Nota Histórica con el propósito de dar sentido a este problema. En esta Actividad el estudiante realiza las exploraciones apoyado en un software de geometría dinámica (GeoGebra).

*Objetivos:*

- Utilizar el registro gráfico para crear un ambiente enriquecedor para la conceptualización del número  $e$ .
- Promover una exploración para identificar la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética.
- Promover la apropiación de los tratamientos adecuados para deducir la expresión analítica para calcular el área bajo la hipérbola equilátera.

*Conversiones entre representaciones semióticas que se promueven:*

Registro numérico → Registro gráfico		Registro analítico → Registro numérico	
Registro numérico → Registro analítico	X	Registro analítico → Registro gráfico	X
Registro numérico → Registro verbal	X	Registro analítico → Registro verbal	X
Registro gráfico → Registro numérico	X	Registro verbal → Registro numérico	
Registro gráfico → Registro analítico		Registro verbal → Registro gráfico	
Registro gráfico → Registro verbal	X	Registro verbal → Registro analítico	

*Conversión privilegiada:* Registro gráfico → Registro numérico

### **III.5. Metodología para la organización del trabajo de los estudiantes con la secuencia didáctica.**

La metodología propuesta es la siguiente:

- Se organiza el grupo para trabajar en equipos de 3 ó 4 estudiantes.
- Se procede a la resolución de la hoja de trabajo por equipos.
- Se solicita el registro escrito del trabajo realizado en los equipos, y se asignan tareas individuales, para dar la oportunidad de que el alumno pueda reflexionar sobre lo que se hizo en el equipo y tenga a su vez la oportunidad de tomar decisiones personales.
- El papel del profesor durante el desarrollo de la actividad consiste en facilitar las discusiones de los estudiantes en el equipo o en lo personal.
- Después de cada bloque de Actividades es necesario un debate con el grupo completo, para la institucionalización de los procedimientos adecuados y los conceptos aprendidos.