CAPÍTULO 4

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Para el presente capítulo describiremos tres elementos: Las asignaciones de los subniveles de Van Hiele, las categorías de demostración utilizadas por cada estudiante y una valoración global sobre la relación entre el subnivel de Van Hiele y las categorías de demostración usadas, incluyendo un resumen de los apartados anteriores (entre otros componentes).

Los análisis puntuales se presentarán a la par de la revisión de cada hoja de trabajo, haciendo notar que el objetivo central de las actividades fue la asignación de un determinado subnivel de Van Hiele. Los dos elementos de interés son: El subnivel asignado y el tipo de argumentación que aparece en la hoja de trabajo. En cuanto a la interpretación de la argumentación usada para validar las conjeturas, se utilizó la estrategia de contrastar las respuestas de las hojas de trabajo con la revisión de su postura durante las discusiones grupales (con el apoyo de las grabaciones de video y, en ocasiones, mediante cuestionamientos directos al estudiante sobre el argumento utilizado al final de la sesión, con la intención de no influir en la fase 3).

A manera de resumen, se incorpora una sección donde se ilustran los perfiles de los estudiantes seleccionados, con la intención de ampliar la panorámica del escenario y que la investigación logre ser de mayor utilidad para el lector. Entre las características de mayor relevancia, están las modificaciones de las formas de probar y argumentar usadas por los alumnos escogidos, así que aprovecharemos la sección final para integrar los distintos tipos de prueba, relacionándolos con los subniveles de Van Hiele durante el desarrollo de las actividades.

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

El mecanismo de exploración consistió en la aplicación de un examen diagnóstico (con el fin de hacer la selección de casos de la manera más objetiva posible), la realización de las 12 hojas de trabajo y un examen final (donde se solicitaban demostraciones de manera explícita). Para organizar los resultados obtenidos de la exploración, los presentaremos de la siguiente manera:

- Distribuimos 5 apartados de análisis, los primeros 4 abordan cada nivel de Van Hiele de manera independiente y el último se concentra en las demostraciones de las conjeturas hechas por los estudiantes, durante la resolución de las hojas de trabajo. Podemos afirmar que el análisis final es considerado el de mayor relevancia para la investigación, por el tipo de actividades que fueron solicitadas a los estudiantes.
- Para cada apartado, iniciamos con una breve descripción del tipo de actividades a realizar, observaciones sobre las respuestas obtenidas (grosso modo) y cerramos con una valoración individual sobre el rendimiento de cada caso (en esta sección se presenta la asignación de los subniveles y los tipos de argumentación utilizados).

ANÁLISIS DEL PRIMER NIVEL DE VAN HIELE
(Hojas de trabajo No.1 y No. 2).

El tipo de actividades solicitadas se limitan al manejo de la traslación como manipulación de figuras y la caracterización de la misma con base en elementos visuales. Las acciones concretas que se solicitan al estudiante son: La identificación de figuras e imágenes superpuestas que coinciden al hacer deslizamientos rectos y la discriminación entre parejas de figuras trasladadas y no trasladadas, en vías de caracterizar la transformación (mediante elementos de tipo visual). El papel de estas hojas de trabajo consiste en facilitar una primera percepción del concepto de traslación.

Entre las observaciones generales, podemos mencionar las pocas ocasiones en la que fue utilizado un lenguaje disciplinar, postura que era necesario asumir para ser congruentes con las exigencias del primer nivel de Van Hiele. Con respecto al rol asumido por los estudiantes, durante la resolución de las primeras hojas de trabajo, un par de estudiantes intentó mantener un lenguaje matemático (uno de ellos está entre los casos seleccionados, el cual corresponde al individuo etiquetado con la letra "C" y sus intervenciones las discutiremos posteriormente), pero desecharon esa postura al involucrarse en las discusiones grupales.

Para el primer nivel de Van Hiele, uno de los utilizados como filtro para la selección de los casos, se observó una variedad de respuestas pero sin una diferencia significativa entre las conclusiones a las que llegaron los estudiantes, lo cual tiene relación con la libertad de la exploración solicitada y el tipo de exigencias. En cuanto al análisis de esta sección y considerando la similitud de las respuestas, nos limitaremos a desglosar lo relacionado a las fases 3, 4 y 5 del nivel (las cuales corresponden a la hoja de trabajo No. 2).

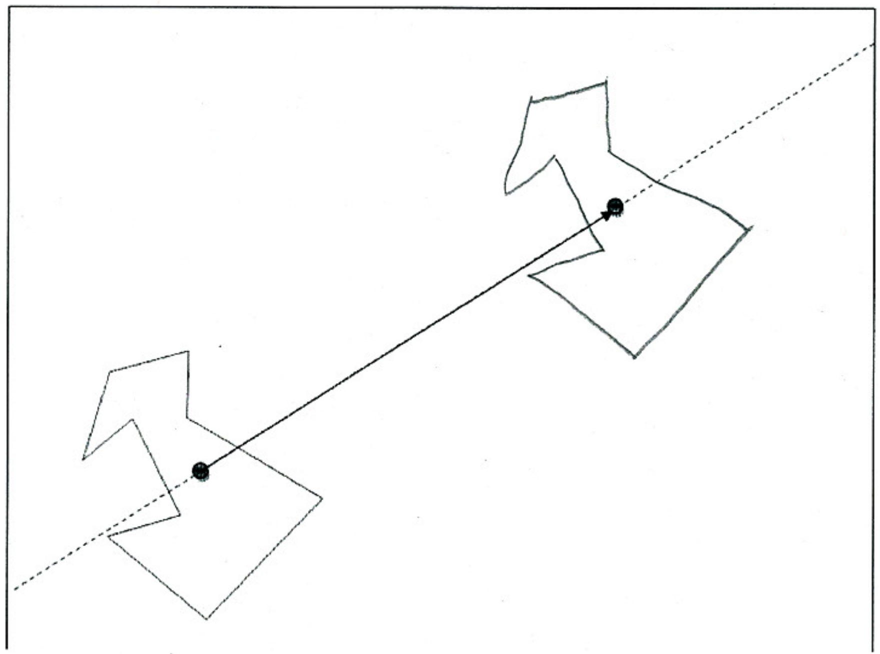
Para la realización de la hoja de trabajo No. 2, los estudiantes tenían la libertad de solicitar lo que consideraran necesario para cumplir con las actividades (dentro de las opciones escritas en sus hojas de trabajo), la actividad se llevó a cabo durante la tercera sesión y no fue necesario recurrir a tiempo adicional.

Caso A:

Fue el primer estudiante en presentarse y por ello inicio la actividad antes que el resto de sus compañeros, solicitó una regla hasta después que sus compañeros la pidieron (por los trazos elaborados, es evidente que completo la primera actividad sin el uso de este instrumento).

ACTIVIDADES:

- Dada la siguiente figura y un vector fijo, obtén la imagen trasladada de la figura en la dirección definida por el vector (utilizando papel carbón, hojas blancas y juego geométrico).
- Elabora las traslaciones solicitadas.



1. Discute con tus compañeros un método para trasladar la figura en la dirección y magnitud dadas (de tal manera que los puntos marcados coincidan después de la traslación). Escribe tus conclusiones, fruto de la discusión.

El metodo que mas me parecio es usar el vector y el punto ya que de ahi me guaba para saber si la traslacion estaba correcta.

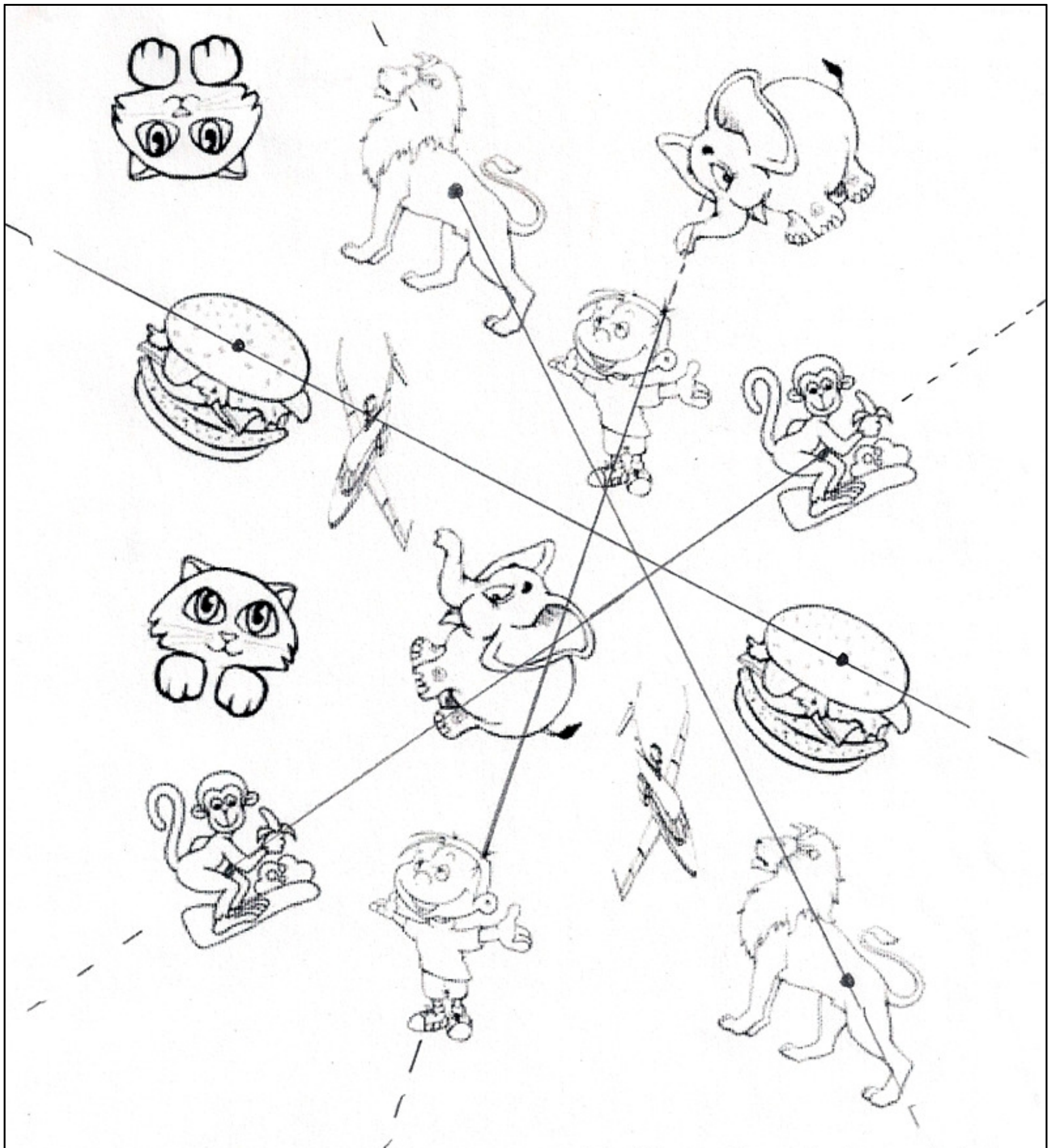
Fig. ***N1.A.1***[6]

La actividad 2 corresponde a experimentaciones adicionales de traslación (con escenarios similares a la actividad 1, pero incorporando trazos curvos), con la finalidad de que puedan desarrollar una estrategia manual para realizar la transformación.

[6] Para facilitar revisiones posteriores, se utilizará nomenclatura con el siguiente formato: **Nivel de Razonamiento**. **Caso de Estudio**. **Número de imagen**. Es decir; la figura N1.A.1 representa la primera figura del caso A, para el Nivel 1.

3. En la siguiente hoja aparecen varias figuras, intenta aparear las que pueden tomarse una como traslación de otra. Si son traslaciones, marca con lápiz el vector que las genera, de lo contrario, justifica sus limitaciones.

Las otras figuras no resultaron traslacion ya que las lineas con misma dirección no coincidian.



4. Haz un resumen sobre las características que identifican a las traslaciones, es decir, ¿Cómo identificas que una figura es una traslación de otra (visualmente)? Justifica ampliamente.

con la misma dirección y trazando el vector con misma direccion.

Fig. ***N1.A.2***

La actividad final, la cual corresponde a la fase 5 del nivel, consistió en la clasificación de parejas de figuras entre traslaciones y no traslaciones. La estrategia usada como criterio para aparear las figuras es similar a la presentada en la primer actividad de la hoja de trabajo; podemos observar el uso de segmentos de recta punteados (los cuales representan la dirección del vector de traslación y un vector resaltado sobre el segmento, para evidenciar la magnitud y el sentido). Al observar las construcciones de los segmentos de recta (con los que se avalan las parejas de figuras trasladadas), es posible observar una estrategia recurrente, la cual consiste en la selección de puntos homólogos de manera intuitiva (es notorio en los puntos marcados para relacionar las imágenes del “león” y la “hamburguesa”), este método nos hace suponer que su discriminación de parejas no se basa en la construcción de los segmentos sino en la comparación global de las duplas de imágenes (el trazado de las rectas pretendía cumplir un papel de verificación, en un intento de imitar las herramientas utilizadas por el profesor y las planteadas en las hojas de trabajo).

El estudiante se mostró pasivo durante las discusiones grupales del nivel, pero sus estrategias para la resolución de las hojas de trabajo siguientes se vieron altamente influenciadas por comentarios de sus compañeros. En cuanto a los fases 4 y 5 (exploración libre e integración, respectivamente), se mantuvo apegado a los requisitos del nivel y no puso en juego herramientas propias de su formación, esto último puede ser interpretado de tres maneras; La primera opción es el cambio en la dinámica de clase utilizada (comparada con el trabajo tradicional en los cursos de la carrera), una segunda alternativa es que no cuenta con herramientas que faciliten las exploraciones propuestas o, en su defecto, las actividades fueron tan poco desafiantes que no demandaron el uso de métodos más complejos.

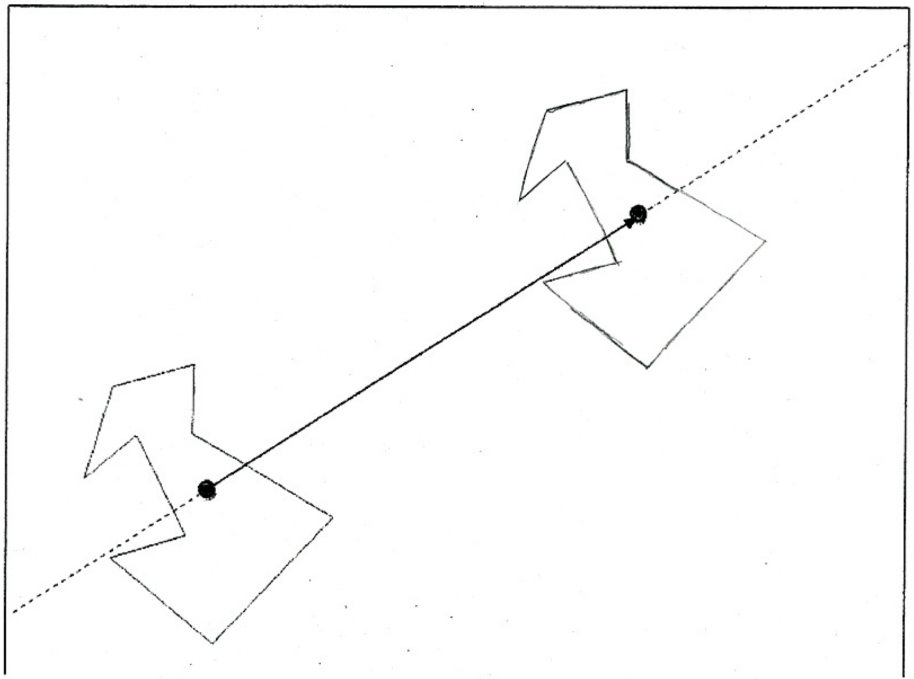
Como resumen, el estudiante cumple satisfactoriamente con las primeras hojas de trabajo (considerando los elementos que se evalúan), pero con algunos detalles de lenguaje que pueden complicar las discusiones grupales en niveles de razonamiento posteriores; por ejemplo, durante la discusión (y también lo declara en la respuesta a la pregunta 5) utilizó recurrentemente el término “*dirección*” para referirse a la inclinación de las figuras, ya que al momento de compartir su estrategia con el resto de sus compañeros, dijo que era necesario que “*los animales estuvieran en la misma dirección*” y cuando se le pidió que clarificara tal idea dijo: “*Es como si los animales vieran hacia el mismo lado*”, por ello podemos asumir que se refiere a la inclinación. En cuanto a las categorías de demostración, no habrá evaluación al respecto dado que no fue solicitada prueba alguna.

Caso B:

Para la resolución de la hoja de trabajo, solicitó regla y papel carbón (pensando en acelerar la exploración y el uso que le daría a la hoja de carbón, se le entregó una copia en blanco de su hoja de trabajo).

ACTIVIDADES:

- Dada la siguiente figura y un vector fijo, obtén la imagen trasladada de la figura en la dirección definida por el vector (utilizando papel carbón, hojas blancas y juego geométrico).
- Elabora las traslaciones solicitadas.



1. Discute con tus compañeros un método para trasladar la figura en la dirección y magnitud dadas (de tal manera que los puntos marcados coincidan después de la traslación). Escribe tus conclusiones, fruto de la discusión.

Poner la Figura en otra hoja y luego colocarla debajo e irla dibujando en donde se quiere trasladar.

Fig. ***N1.B.1***

3. En la siguiente hoja aparecen varias figuras, intenta aparear las que pueden tomarse una como traslación de otra. Si son traslaciones, marca con lápiz el vector que las genera, de lo contrario, justifica sus limitaciones.

El gato y el elefante no tienen la misma dirección, por eso no son traslaciones, necesitarian ir a donde mismo.

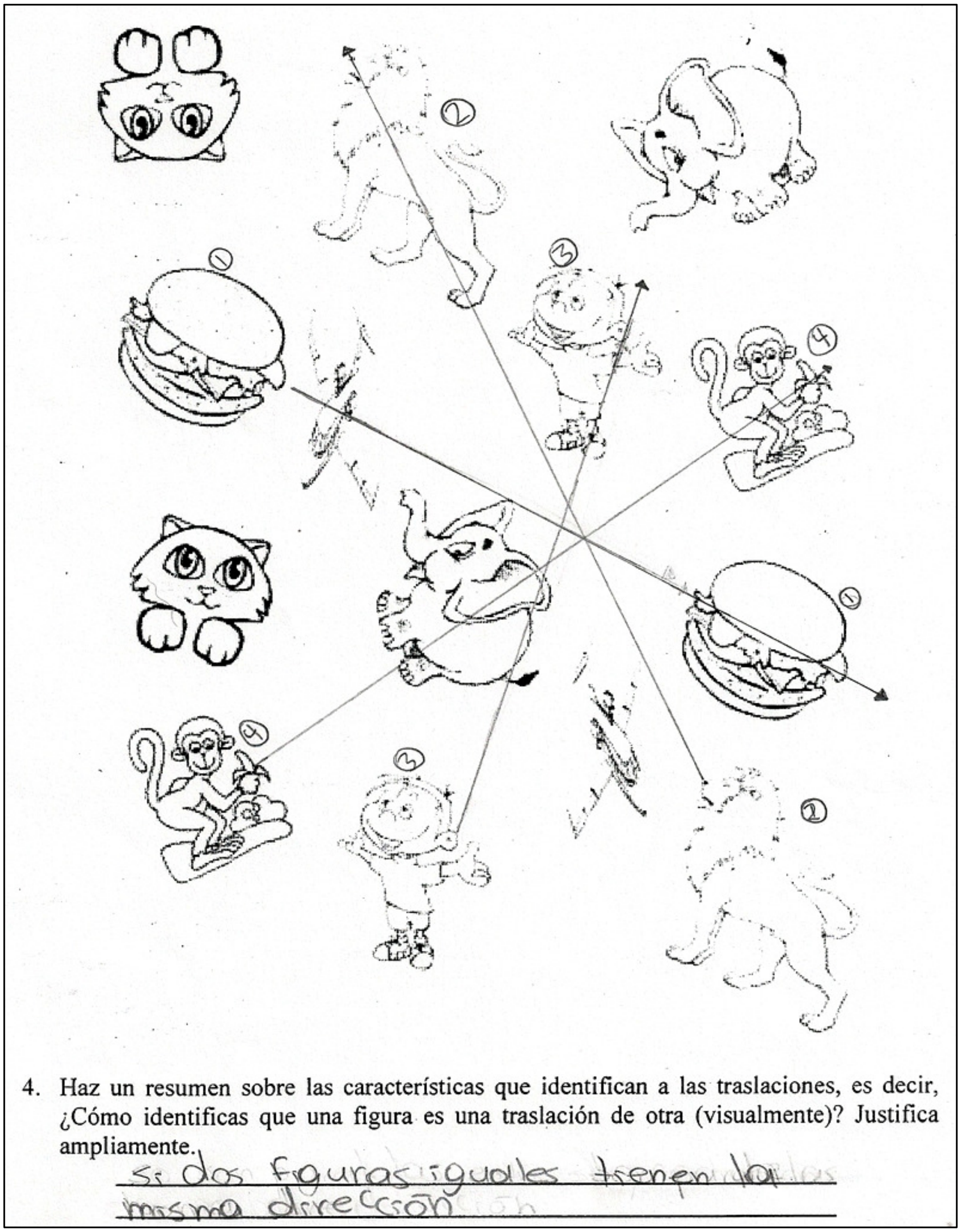


Fig. ***N1.B.2***

En las actividades relacionadas con el apareamiento de figuras trasladadas y no trasladadas, notamos una confusión generalizada en cuanto al significado del término “dirección”, el cual es utilizado para referirse a la inclinación de las figuras trasladadas. Otro elemento recurrente es el impacto de la presentación de traslación como deslizamiento de figuras; para ejemplificar esta afirmación utilizaremos las respuestas del caso “B”, donde el estudiante elabora segmentos de recta (similares a los utilizados en la primera pregunta de la hoja de trabajo 2), pero la diferencia significativa consiste en el papel que desempeña en las afirmaciones del estudiante, ya que los segmentos no sustentan sus afirmaciones hechas y podemos comprobarlo al observar la construcción del vector que relaciona las imágenes de la “hamburguesa”, los segmentos de recta no están anclados en la figura y tan sólo pretenden modelar un movimiento tentativo para relacionarlas. De manera similar al caso “A”, el estudiante sustenta sus afirmaciones en las relaciones que percibe visualmente y, en una segunda instancia, utiliza los segmentos de recta para responder a la pregunta, sin que éstos últimos desempeñen un papel de peso en sus conclusiones.

El estudiante manifestó un perfil introvertido durante las sesiones, lo cual se vio reflejado en su poca participación durante las discusiones grupales. En lo concerniente a las siguientes fases de aprendizaje, la actividad logró mantenerla dentro los objetivos del nivel y aunque no se involucró demasiado en la fase 3, las discusiones fueron bastante enriquecedoras para su trabajo en las siguientes actividades.

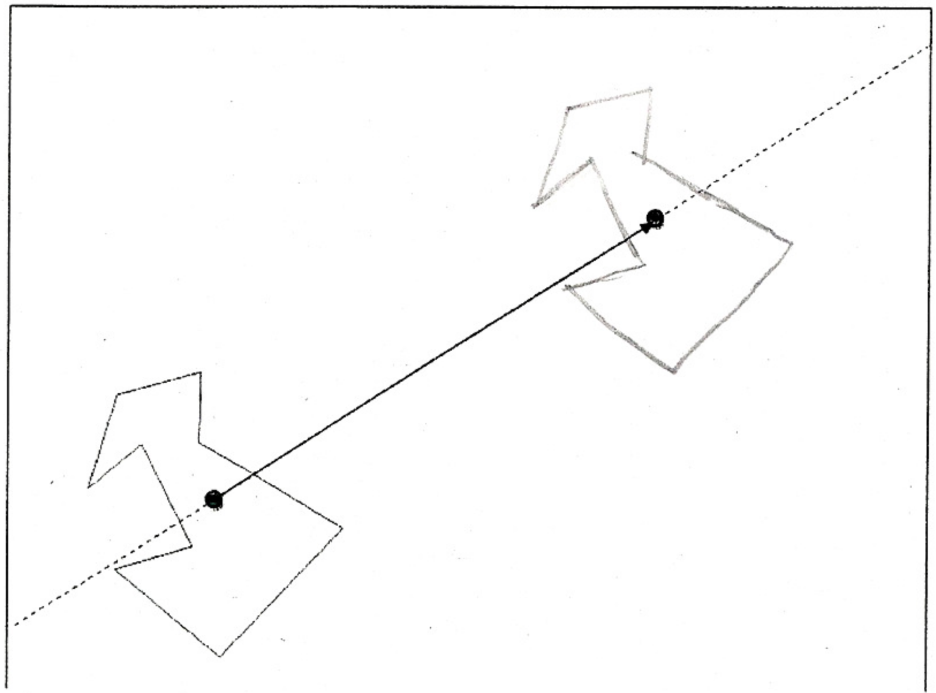
Revalorando su desempeño en las actividades, cumple con los objetivos de la hoja de trabajo, con respuestas apropiadas (considerando el nivel), pero de manera similar al Caso “A”, mostró estar altamente influenciado por elementos perceptivos y una revisión minuciosa de sus hojas de trabajo posteriores, permitirá evaluar el posible traslado de las confusiones observadas en sus respuestas.

Caso C:

El estudiante C, no utilizó regla y para sus construcciones sólo requirió copias de las hojas de trabajo.

ACTIVIDADES:

- Dada la siguiente figura y un vector fijo, obtén la imagen trasladada de la figura en la dirección definida por el vector (utilizando papel carbón, hojas blancas y juego geométrico).
- Elabora las traslaciones solicitadas.



1. Discute con tus compañeros un método para trasladar la figura en la dirección y magnitud dadas (de tal manera que los puntos marcados coincidan después de la traslación). Escribe tus conclusiones, fruto de la discusión.

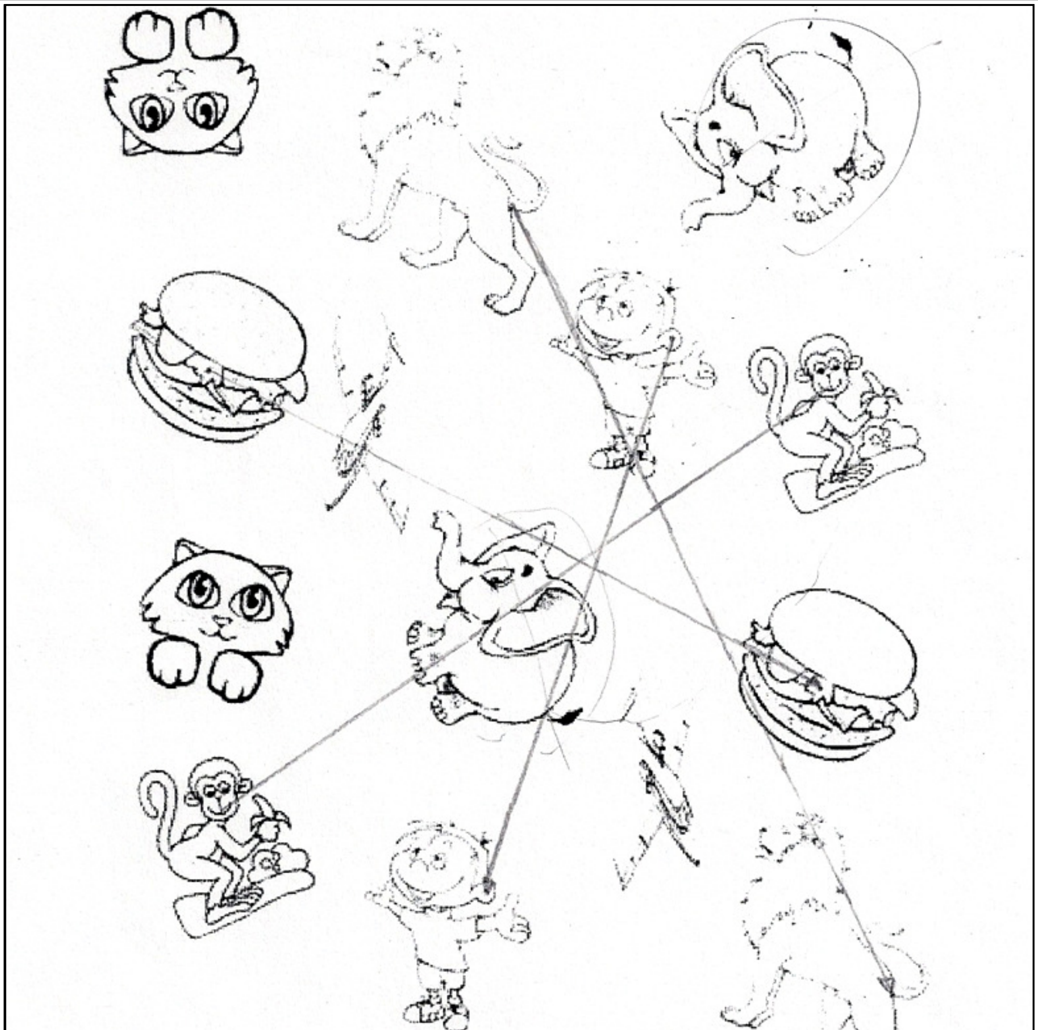
tomamos una imagen como centro de un plano cartesiano y tras la da mos cada uno de los puntos a lo largo del vector con igual longitud e inclinacion.

Fig. ***N1.C.1***

En cuanto a la estrategia utilizada, durante la discusión grupal se le pidió que compartiera el método para realizar las primeras tres actividades de la hoja de trabajo, pero la redacción de la pregunta a la pregunta uno deja ver que se confundió entre la estrategia utilizada y un método general. Sin embargo, la parte rescatable es que nos permite conocer sus técnicas de exploración (en este caso, aparentemente siente mayor comodidad en el plano analítico comparado con un escenario de geometría sintética).

3. En la siguiente hoja aparecen varias figuras, intenta aparear las que pueden tomarse una como traslación de otra. Si son traslaciones, marca con lápiz el vector que las genera, de lo contrario, justifica sus limitaciones.

el gato es una reflección poreso nose puede trasladar
por medio de un vector, el elefante es una rotación
y el avion seria una rotación poreso nose
pueden trasladar por medio de un vector.



4. Haz un resumen sobre las características que identifican a las traslaciones, es decir, ¿Cómo identificas que una figura es una traslación de otra (visualmente)? Justifica ampliamente.

usando varios puntos en la figura
original q' tendrían q' coincidir con los
de la traslación.

Fig. ***N1.C.2***

En cuanto a la selección de figuras trasladadas, fue el único en mencionar durante la discusión grupal a las transformaciones distintas de la traslación (en la pregunta 3 habla de reflexión y rotación), aunque de manera superficial y sin una solicitud de tal información.

Considerando el rol que asumió en las fases de aprendizaje, el estudiante manifestó las condiciones ideales de un alumno, mostrándose participativo en la discusión e interesado en los comentarios de sus compañeros, constantemente generando un ambiente de debate, uno de los cuales se centró en la estrategia para verificar que una figura es traslación de otra.

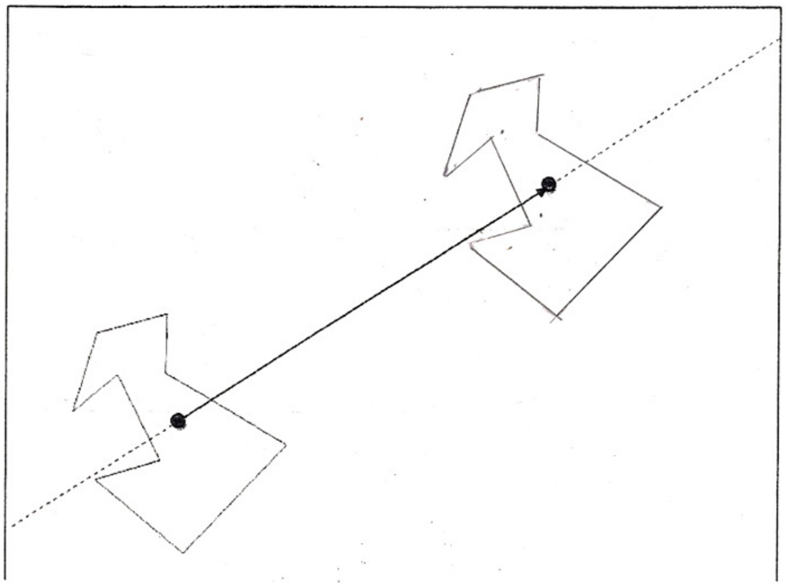
Evaluando sus respuestas de manera integral (considerando las distintas fases de aprendizaje), cumple con los objetivos del nivel y, aunque utilizó elementos puramente visuales en la discriminación de figuras, la fase de explicitación le permitió mostrar relaciones y propiedades de la transformación.

Caso D:

Utilizó regla y copias de las hoja de trabajo y constantemente se preocupó por la precisión de sus respuestas, en más de una ocasión no se retiró del salón hasta completar las hojas de trabajo (en los análisis posteriores será notorio el tiempo dedicado a sus respuestas).

ACTIVIDADES:

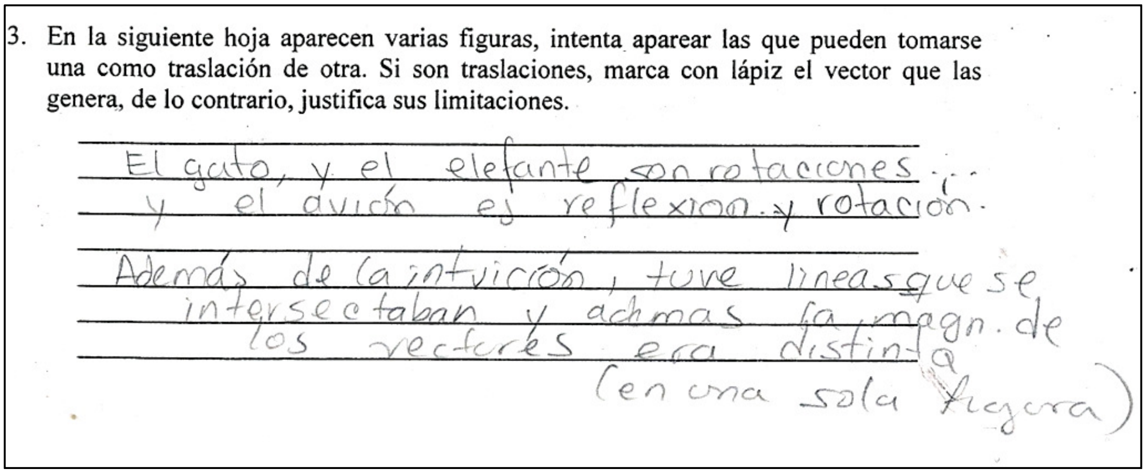
- Dada la siguiente figura y un vector fijo, obtén la imagen trasladada de la figura en la dirección definida por el vector (utilizando papel carbón, hojas blancas y juego geométrico).
- Elabora las traslaciones solicitadas.



1. Discute con tus compañeros un método para trasladar la figura en la dirección y magnitud dadas (de tal manera que los puntos marcados coincidan después de la traslación). Escribe tus conclusiones, fruto de la discusión.

Encajaba primero la línea (toda la línea). y luego me deslizaba hasta que coincidiera el punto sin salirme o desencajarme de la línea.

Fig. ***N1.D.1***


3. En la siguiente hoja aparecen varias figuras, intenta aparear las que pueden tomarse una como traslación de otra. Si son traslaciones, marca con lápiz el vector que las genera, de lo contrario, justifica sus limitaciones.

El gato, y el elefante son rotaciones
y el avión es reflexion y rotación.

Además de la intuición, tuve lineas que se
intersectaban y ademas la magn. de
los vectores era distinta
(en una sola figura)

Fig. ***N1.D.2***

Al margen de su declaración sobre las transformaciones de las figuras que no son traslaciones, la respuesta tres incluye características de las traslaciones que distintos pares de figuras no contienen. Estas afirmaciones son mantenidas para hacer una discriminación de figuras trasladadas y están contempladas en la respuesta 4.

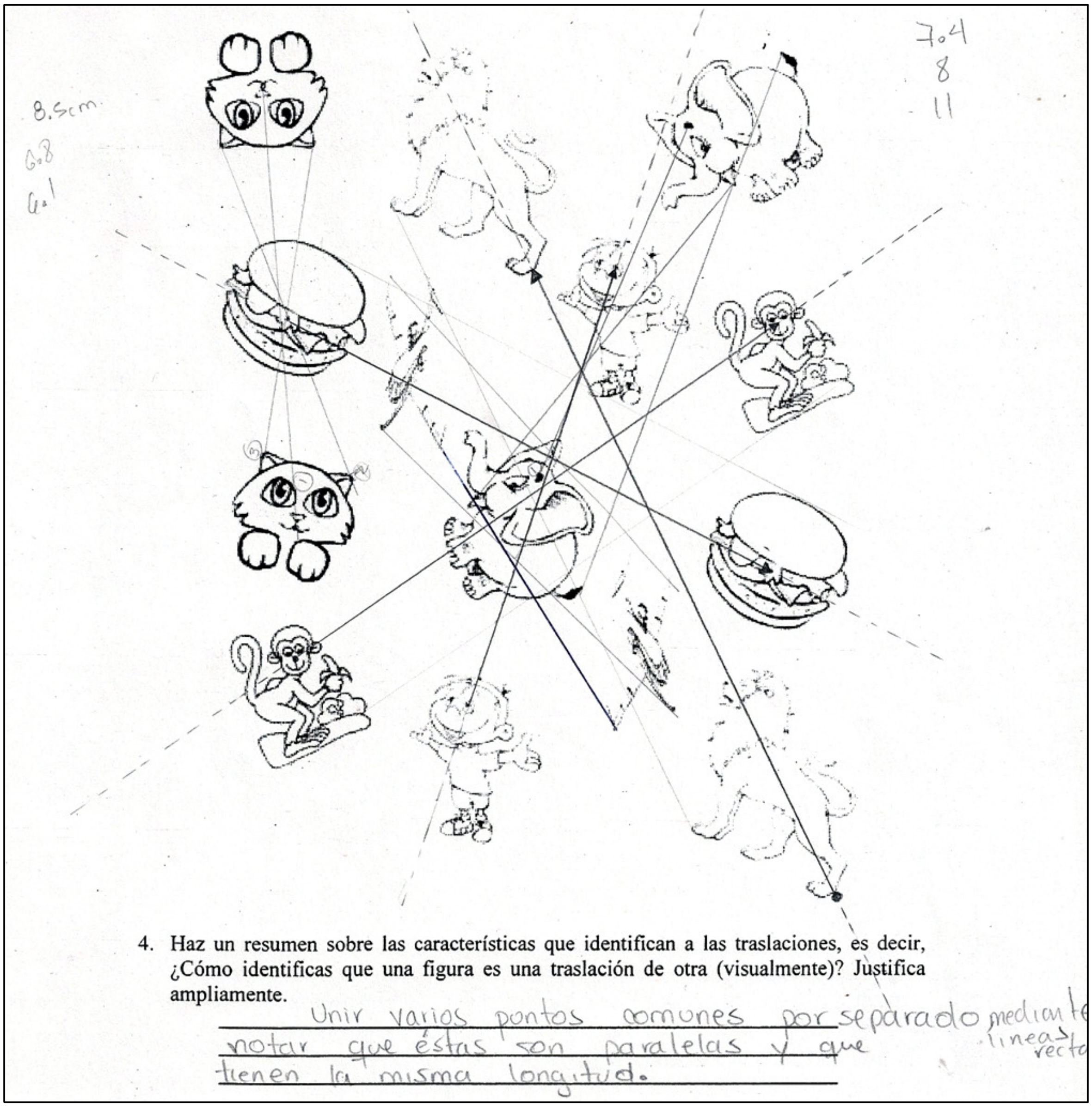


Fig. ***N1.D.3***

A diferencia del resto de compañeros, no sólo utiliza elementos visuales, además incorpora características que conoce de la transformación involucrada, los elementos evidentes son el paralelismo entre los segmentos formados por puntos homólogos y la longitud única de los mismos (en las esquinas superiores de la hoja aparecen tercias de números, los cuales parecen representar un segundo criterio para la discriminación), esto último relacionado con la magnitud del vector de traslación. Observando los segmentos utilizados como apoyo, se evidencia el uso de una estrategia perceptiva, ya que no aparecen los trazos auxiliares para describir a los pares de figuras que si son una traslación.

Durante la fase de explicitación, el estudiante estaba más interesado en escuchar las afirmaciones de sus compañeros que en compartir las propias, cuidaba que sus aportaciones fueran pertinentes, en los momentos en los que no contribuía, constantemente utilizaba gestos (muecas de aprobación, desaprobación, confusión, etc.). En lo concerniente a la fase de integración, involucró propiedades de manera explícita en sus respuestas, lo cual nos hace afirmar que no sólo cumplió con los objetivos del nivel sino que fueron superados.

OBSERVACIONES DEL NIVEL 1

Como estrategia didáctica y dado que la mayoría utilizó un sólo segmento para discriminar entre figuras trasladadas y no trasladadas (salvo el caso D), consideramos apropiado cuestionarlos sobre la posibilidad de que las figuras estuvieran inclinadas 1º, de tal manera que fuera imperceptible a la vista y cómo se verían afectadas sus respuestas al considerar tal reflexión. Durante la discusión grupal, los casos B y C hablaron (complementándose) sobre construir más de un segmento y usar el paralelismo (entre los segmentos formados por puntos homólogos), fue en este momento cuando el caso D compartió su estrategia, la cual fue aprobada por su practicidad.

Los casos seleccionados cumplieron con los requerimientos del nivel, todos son capaces de construir traslaciones mediante la manipulación de figuras (concretamente con el deslizamiento sobre una recta, una distancia dada) y de discriminar visualmente pares de figuras trasladadas de figuras no trasladadas. Considerando lo poco exigente de las pruebas solicitadas en las actividades, las categorías de demostración no tienen cabida en el apartado.

ANÁLISIS DEL SEGUNDO NIVEL DE VAN HIELE
(Hojas de trabajo No.3, No. 4, No.5 y No-5b).

Pensando en dar seguimiento a las hojas de trabajo anteriores y el cierre de la discusión grupal, sobre la necesidad de verificar para más de un segmento, las hojas correspondientes al segundo nivel de Van Hiele incorporan características aisladas de la traslación, con la intención de asignar un papel relevante al vector de traslación. Con la finalidad de reorientar la afirmación sobre deslizamientos para identificar traslaciones, se realizan exploraciones que pretenden encaminar al estudiante a descubrir distintas propiedades como: el paralelismo entre los segmentos formados por puntos homólogos, la inclinación de las figuras (utilizando el paralelismo de segmentos homólogos) y relación de las características con los elementos definitorios de los vectores en el plano.

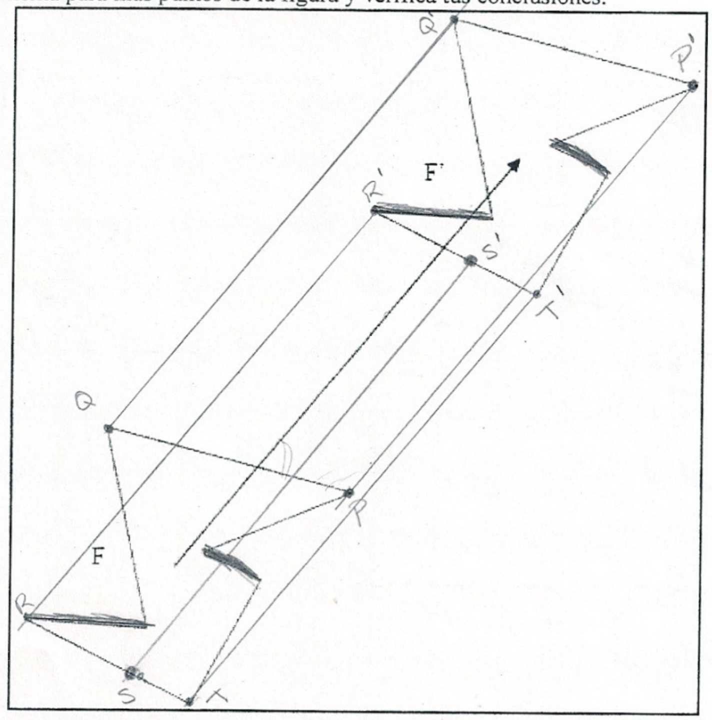
Por las expectativas del nivel, en algunas ocasiones se incorporan exploraciones dirigidas en un ambiente de geometría dinámica y con un lenguaje matemático más extenso. Dos de las actividades fueron realizadas en el centro de cómputo y el resto en el salón de clases, se incorporó una sesión adicional (posterior a la hoja de trabajo 5-b, para que los estudiantes tuvieran la oportunidad de construir una definición de traslación en el plano sintético).

Para responder a las hojas trabajadas en el salón de clases, a los estudiantes se les proporcionó una regla y hojas blancas. Considerando las actividades solicitadas en la presente sección, los elementos incorporados para el análisis se enfocan en las respuestas donde realiza alguna afirmación de peso o conjetura concreta, aclarando que la interpretación de las estrategias de argumentación usadas por los estudiantes son las observaciones de interés.

Caso A:

ACTIVIDADES:

- Utiliza el siguiente dibujo, donde se ilustra un polígono (F) y su traslación (F') a través del vector señalado, toma un punto de la figura original (utiliza lugares clave de la figura para no complicar la búsqueda como: los vértices del polígono, los puntos medios de los lados, etc.) y llámalo P. Posteriormente encuentra su correspondiente de la figura trasladada (etiquétalo con el símbolo P').
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- Responde las preguntas utilizando tu juego geométrico
- Experimenta para más puntos de la figura y verifica tus conclusiones.



Al segmento que trazaste le llamaremos PP'

1. Comparando la magnitud del segmento PP' y el vector de traslación (flecha que define la magnitud y dirección del movimiento). ¿Cómo son las longitudes de los segmentos?
   las longitudes del segmento son iguales

Fig. ***N2.A.1***

Siguiendo las instrucciones, el estudiante mide los segmentos construidos y compara las longitudes con la magnitud del vector de traslación original (dado que la pregunta incide en la estrategia del estudiante, sería poco objetivo evaluar la argumentación en este momento).

- Experimenta con más puntos. ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Si Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura y anota tus observaciones:

Que para cada punto de la figura original le corresponde un punto del mismo lugar de la figura trasladada

Fig. ***N2.A.2***

De manera complementaria, se le solicita que verifique su afirmación para distintos puntos (sin tener acceso al software de Geometría Dinámica), la comprobación elaborada puede interpretarse como un primer acercamiento a la definición puntual de traslación. Las consideraciones expresadas por el alumno son abandonadas posteriormente durante la sesión destinada a la construcción de una definición de traslación por el salón (correspondientes a la fase 5 del segundo nivel).

2. ¿Qué ángulo forman el segmento PP' y el vector de traslación?

0°

- Nuevamente, experimenta con más puntos. ¿Mantienes tu respuesta anterior? ¿Por qué?
- Anota tus observaciones:

Si, por que se observa la misma medida, ya que se toma el punto en el mismo lugar que en la figura original

3. Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones:

Cuando F' tiene las mismas medidas y la misma dirección que la figura F

4. Señala (remarcando con tu lápiz) uno de los lados de la figura original (F), de igual manera indica el correspondiente "lado" de la figura trasladada (F'). ¿Qué ángulo forman los segmentos señalados?

0°

- Mide los lados señalados (el de la figura original y su correspondiente de la figura trasladada) y compara las medidas ¿Cómo son entre ellas?
- Elabora una conclusión sobre los ángulos y medidas de lados homólogos

Los lados son iguales

- Nuevamente, experimenta con otro par de lados de la figura F. ¿Mantienes tu conjetura? ¿Por qué?

Si, la medida de los lados siguen siendo igual. por ser la misma figura, y que están en la misma dirección.

5. Utilizando tu exploración anterior, elabora una conclusión sobre las características que comparten los objetos y sus traslaciones; es decir, define cuando una figura F' es una traslación de otra.

Cuando se encuentra en la misma dirección de un vector. y entonces las medidas ~~ms siempre~~ son iguales

Fig. ***N2.A.3***

Nuevamente aparece la confusión con el término "*dirección*" (obsérvese las preguntas 3, 4 y 5). Al margen de la recurrencia de la confusión con el término, para la presente hoja de trabajo el estudiante declara dos afirmaciones de peso para la transformación de traslación, la cuales son: "*Los lados son iguales (*son congruentes*)"* y *"los lados[…] están en la misma dirección (*son paralelos*)*" reiterando la conclusión en el inciso final de la pregunta 4. Una aclaración sobre la estrategia de argumentación, es el uso de mediciones marcadas en su hoja de trabajo para redactar las conjeturas. En la terminología de Rodríguez aparece un argumento inductivo de ejemplo genérico, por basarse en mediciones y ejemplos específicos, tomados bajo la premisa de ser representativos (nuevamente se hace la aclaración de la influencia de la exploración guiada, así que asumiremos una postura de especulación hasta contrastar las afirmaciones con las respuestas obtenidas en el examen final).

ACTIVIDADES:

1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir cuáles son traslaciones y cuales no (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja. Para cada caso identifica el vector de traslación (escribiendo sus coordenadas y dibujándolo a partir del "origen" en el plano cartesiano) ó argumente las características de la transformación que no se cumple

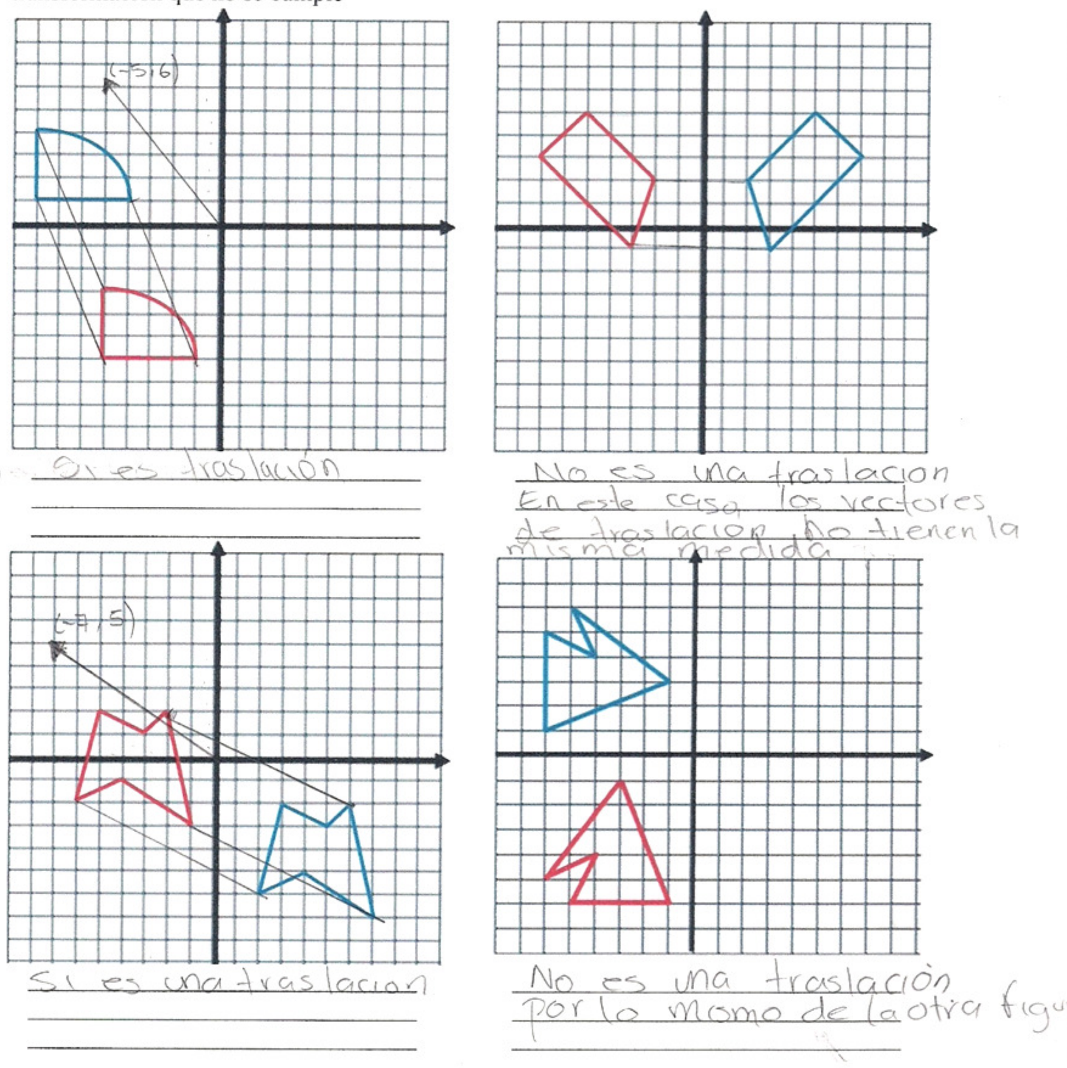


Fig. ***N2.A.4***

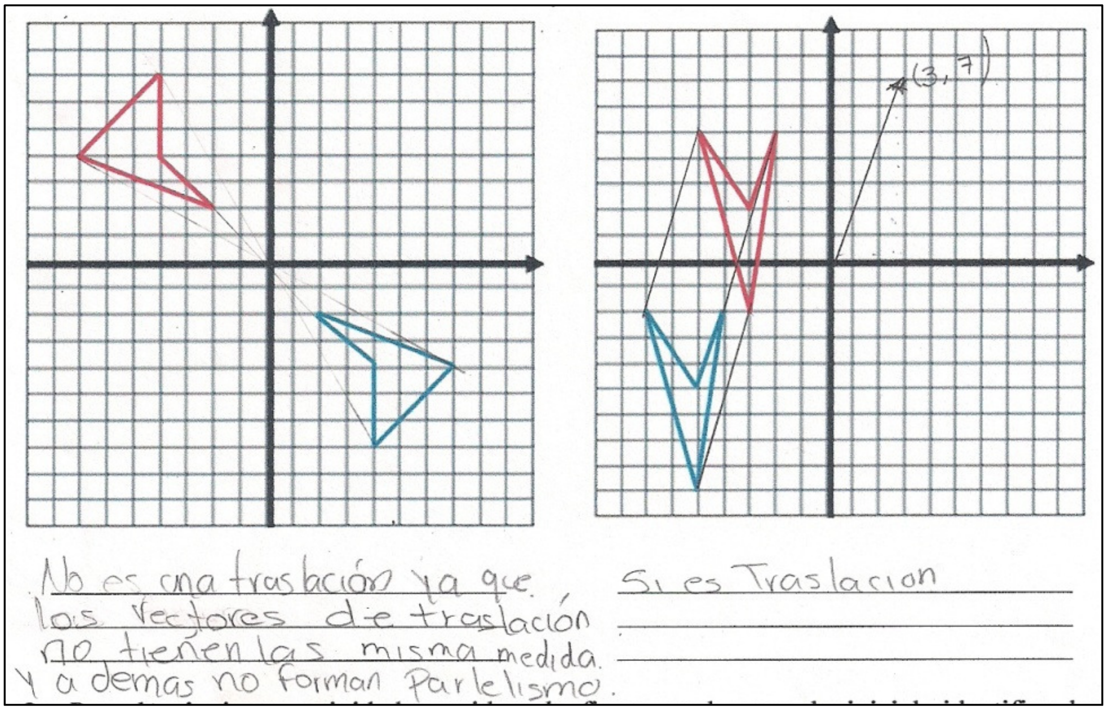
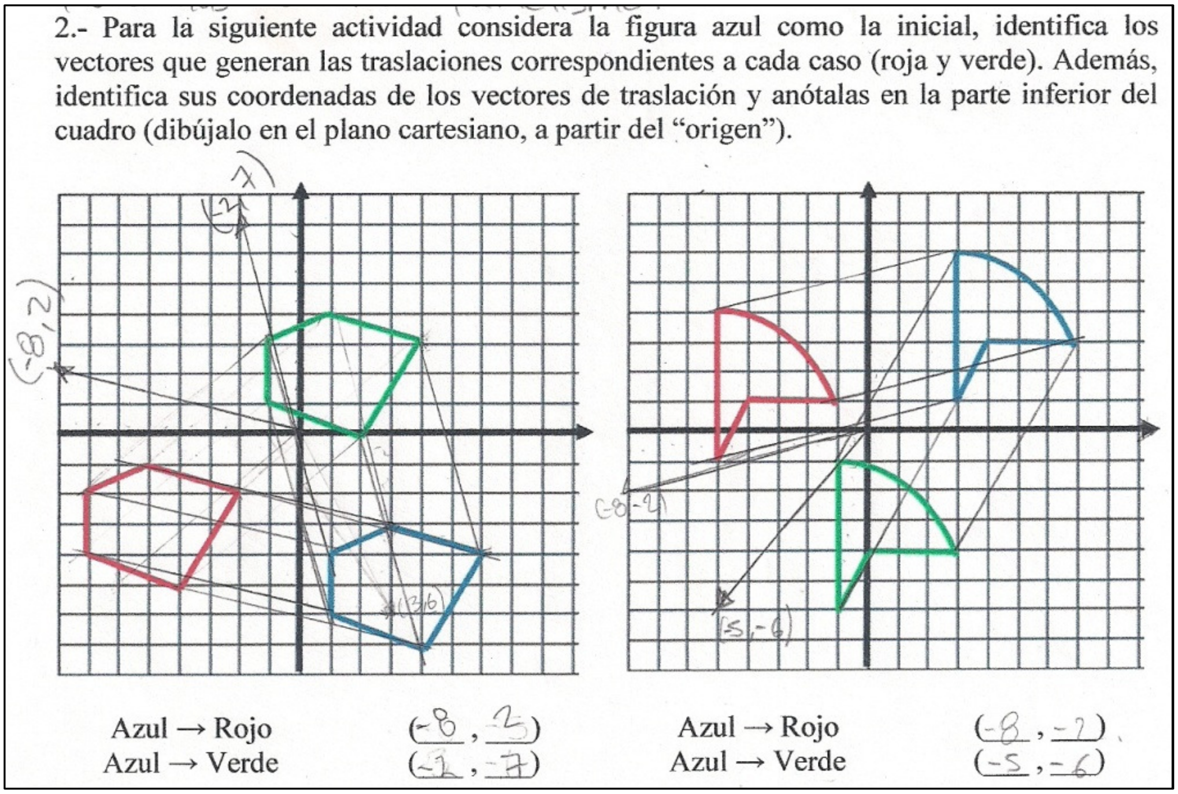


Fig. ***N2.A.5***

Al observar la hoja de trabajo 5, el estudiante elabora trazos auxiliares para verificar que una figura es traslación de otra. En los cuadros 1, 3 y 6 incorpora segmentos entre vértices representativos para realizar las comparaciones (utilizando la estrategia presentada por sus compañeros en la discusión grupal del primer nivel). En un par de ocasiones aparece una confusión sobre el sentido del vector de traslación, pero fue corregido durante la discusión grupal.



2.- Para la siguiente actividad considera la figura azul como la inicial, identifica los vectores que generan las traslaciones correspondientes a cada caso (roja y verde). Además, identifica sus coordenadas de los vectores de traslación y anótalas en la parte inferior del cuadro (dibújalo en el plano cartesiano, a partir del "origen").

Azul → Rojo (-8, -3)
Azul → Verde (-2, -7)

Azul → Rojo (-8, -2)
Azul → Verde (-5, -6)

Fig. ***N2.A.6***

Incorporando una versión alternativa del tratamiento de la cerradura de traslaciones, la actividad 5 es considerada concluida hasta resolver la hoja de trabajo 5b, en la cual se relacionan los vectores de traslación de distintas figuras (con la intención de promover el uso de la composición de traslaciones para describir nuevas traslaciones).

Producto de tu experiencia con las actividades anteriores has generado algunas conclusiones sobre las propiedades que debe de cumplir una figura para ser la traslación de otra.

ACTIVIDADES:

Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo "Traslación 3", aparecen varios elementos.

- Intenta mover los elementos que aparecen. ¿Qué observas? ¿Cuáles son los objetos del archivo que puedes manipular?

  Los Vectores V y W y tambien la figura Azul si nosotros movemos cualquier vetice de la. figura se observa q. la figura roja y azul toman su misma forma, tambien vemos que si movemos completamente la fig. Azul se mueven la roja y verde en el mismo sentido

- Enlista los elementos que el software te permite mover y describe el efecto en el resto de los objetos al hacer dicha manipulación (para responder a ésta pregunta mueve un objeto a la vez).

  El vector V: si se alarga o se hace pequeño la figura roja se mueve junto con el vetor.
  Vector W: lo mismo pasa con este Vector y la figura Verde
  figura Azul: si movemos la figura azul se mueven las otras para el mismo lado.

- Utilizando el plano cartesiano, coloca los vectores V y W en cualquier posición del plano ¿Cuáles son las coordenadas seleccionadas para cada vector? ¿Qué objetos se movieron y cuál es el efecto de seleccionar tales coordenadas en ellos?

  $V=(-5,2)$ y $W=(5,3)$ y solo se mueven las figura roja y verde

- ¿Qué representa cada uno de los vectores del archivo (V, W y T)?

  el vector V representa la direccion de la figura roja y el W la direción de la figura verde

- ¿Cuál es la relación entre el vector T y los vectores V y W?

  No vi que si los tres vectores los pongo en el origen las 3 figuras quedan encimadas como si solo fuera una figura

  $T=W-V$

- Experimenta para distintos valores de V y W, ¿Mantienes tu respuesta anterior? ¿Por qué?

Fig. ***N2.A.7***

Anota tus observaciones:

Si. Por que se sigue manteniendo la resta $T=W-V$.

2. Elabora una conclusión sobre la relación de los vectores que trasladan consecutivamente a una figura geométrica, considera que conoces las coordenadas de los vectores de traslación. Desarrolle su conclusión suponiendo que los vectores tienen coordenadas $V=(v_1, v_2)$ y $W=(w_1, w_2)$.

Cuando los vectores $V=(V_1,V_2)$ y $W=(W_1,W_2)$ yo opino que siempre va existir. $T=W-V$. creo que con lo que platicamos no me queda convencido que sea $T=V-W$. sin $T=W-V$. $\Longrightarrow T=(V_1,V_2)-(W_1-W_2)$

Fig. ***N2.A.8***

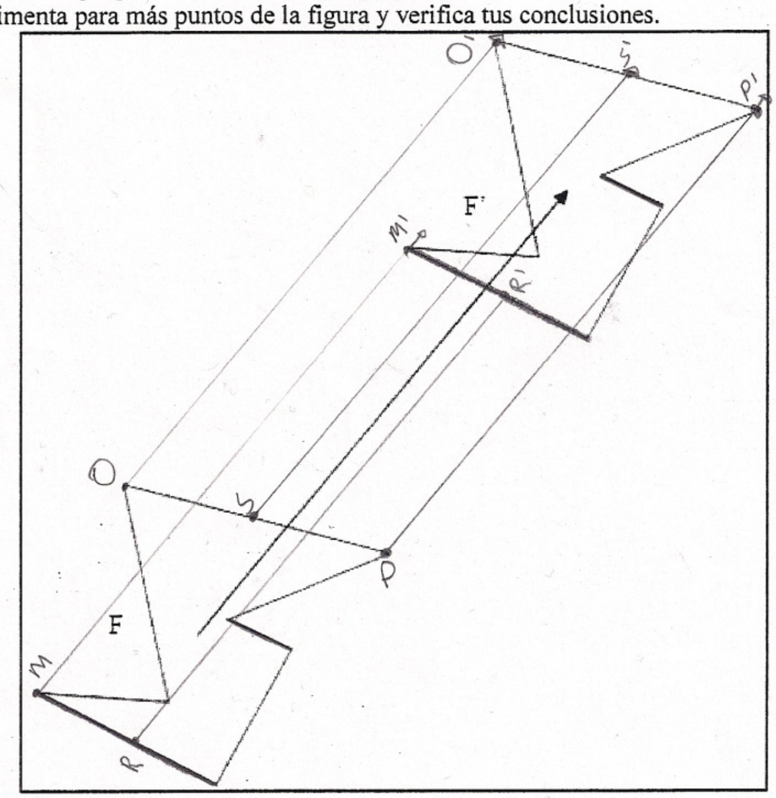
Las discusiones grupales del segundo nivel de razonamiento contaron con una mayor participación del estudiante, aunque el rol que asumió nuevamente fue pasivo y se limitaba a escuchar las estrategias usadas por sus compañeros, sin tener mucho interés en compartir las propias. No logró completar la fase de exploración libre en una sesión (correspondiente a la hoja de trabajo 5 y 5b), así que tuvo que recurrir a tiempo de la siguiente clase (la pérdida de la secuencia influyó considerablemente en sus conclusiones, esta afirmación es evidente al evaluar las respuestas 1 y 2, por lo contradictorio de las mismas). Para evaluar la fase 5, a los estudiantes se les planteó el desafío de diseñar una definición “correcta” de traslación, el estudiante “A” consideró las propiedades de paralelismo de segmentos entre puntos homólogos y la longitud de los trazos, resaltando en su definición elementos de tipo visual, pero sin el uso de herramientas que le permitan asegurarlas (particularmente con la propiedad de paralelismo). El argumento fuerte en el que sustenta la definición es de tipo perceptivo, sin llegar a enriquecerlo con el uso de mediciones.

Resumiendo el desempeño del caso “A”, identificamos una adaptación en cuanto al lenguaje y una mejora significativa con respecto a las estrategias de exploración. Aunque no tenemos evidencia de que asimile los métodos de manera apropiada su uso es aceptable. Las respuestas son evaluadas de manera satisfactoria, considerando los requisitos del segundo nivel.

Caso B:

ACTIVIDADES:

- Utiliza el siguiente dibujo, donde se ilustra un polígono (F) y su traslación (F') a través del vector señalado, toma un punto de la figura original (utiliza lugares clave de la figura para no complicar la búsqueda como: los vértices del polígono, los puntos medios de los lados, etc.) y llámalo P. Posteriormente encuentra su correspondiente de la figura trasladada (etiquétalo con el símbolo P').
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- Responde las preguntas utilizando tu juego geométrico
- Experimenta para más puntos de la figura y verifica tus conclusiones.



Al segmento que trazaste le llamaremos PP'

1. Comparando la magnitud del segmento PP' y el vector de traslación (flecha que define la magnitud y dirección del movimiento). ¿Cómo son las longitudes de los segmentos?
iguales

- Experimenta con más puntos. ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Si Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura y anota tus observaciones:

Para los puntos O y O' el segmento que los une tiene la misma longitud que FF', igual para el segmento MM'

Fig. ***N2.B.1***

2. ¿Qué ángulo forman el segmento PP' y el vector de traslación?

0°.

- Nuevamente, experimenta con más puntos. ¿Mantienes tu respuesta anterior? ¿Por qué?
- Anota tus observaciones:

sucede lo mismo, porque todos los demas segmentos son paralelos al vector FF'

3. Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones:

Cuano F' tiene las mismas medidas y la misma dirección que una figura F

4. Señala (remarcando con tu lápiz) uno de los lados de la figura original (F), de igual manera indica el correspondiente "lado" de la figura trasladada (F'). ¿Qué ángulo forman los segmentos señalados?

0°.

- Mide los lados señalados (el de la figura original y su correspondiente de la figura trasladada) y compara las medidas ¿Cómo son entre ellas?
- Elabora una conclusión sobre los ángulos y medidas de lados homólogos

-son iguales.

-los ángulos son 0, ya que los lados son paralelas.

- Nuevamente, experimenta con otro par de lados de la figura F. ¿Mantienes tu conjetura? ¿Por qué?

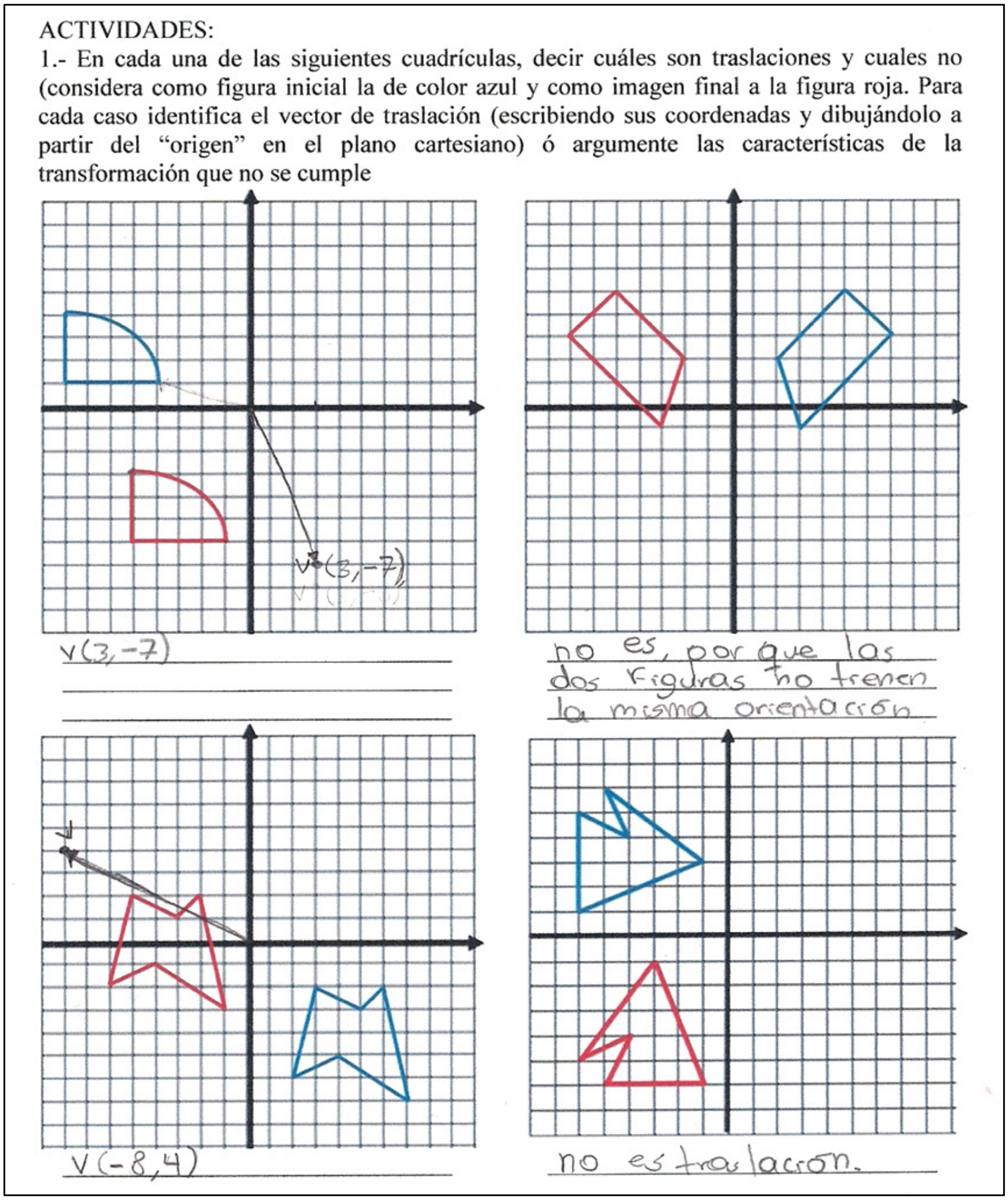
Si, por que todos los lados de la figura son paralelos a sus correspondientes en la traslacion.

5. Utilizando tu exploración anterior, elabora una conclusión sobre las características que comparten los objetos y sus traslaciones; es decir, define cuando una figura F' es una traslación de otra.

Cuando F' tiene las mismas medidas y la misma dirección que una figura F.

Fig. ***N2.B.2***

De manera similar al caso anterior, el estudiante resuelve la actividad mediante el uso de mediciones de los trazos elaborados, construyendo una conjetura aceptable sobre las características de los segmentos formados por puntos homólogos.


ACTIVIDADES:

1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir cuáles son traslaciones y cuales no (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja. Para cada caso identifica el vector de traslación (escribiendo sus coordenadas y dibujándolo a partir del "origen" en el plano cartesiano) ó argumente las características de la transformación que no se cumple

Fig. ***N2.B.3***

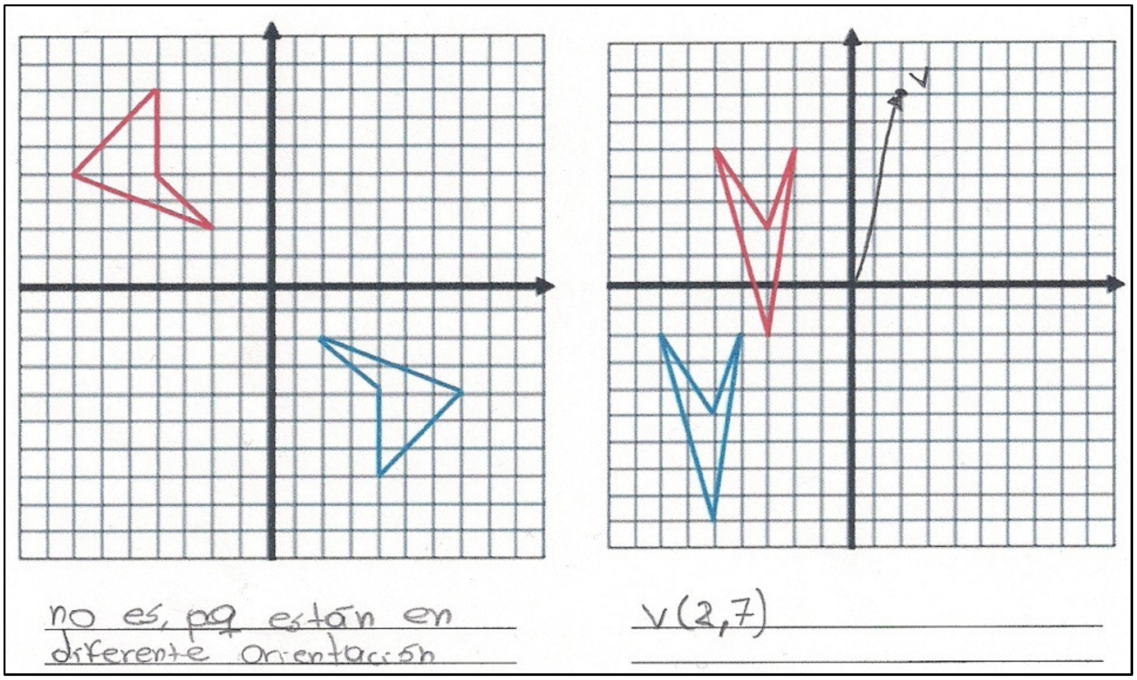


Fig. ***N2.B.3***

En la hoja de trabajo número 5 aparece una corrección en cuanto al término "*dirección*", sustituyéndolo por la palabra "*orientación*" al describir las transformaciones del segundo y quinto cuadro (nuevamente hacemos la aclaración sobre la interpretación del término "*orientación*", al ser utilizada para referirse a la inclinación de las figuras). La herramienta para asegurar que una figura es traslación de otra, consistió en marcar puntos homólogos y hacer conteos de las unidades en dirección vertical y horizontal, si los desplazamientos coincidían para al menos 2 puntos (y sus correspondientes homólogos) se tomaba como una traslación y se utilizaba un método similar para marcar el vector.

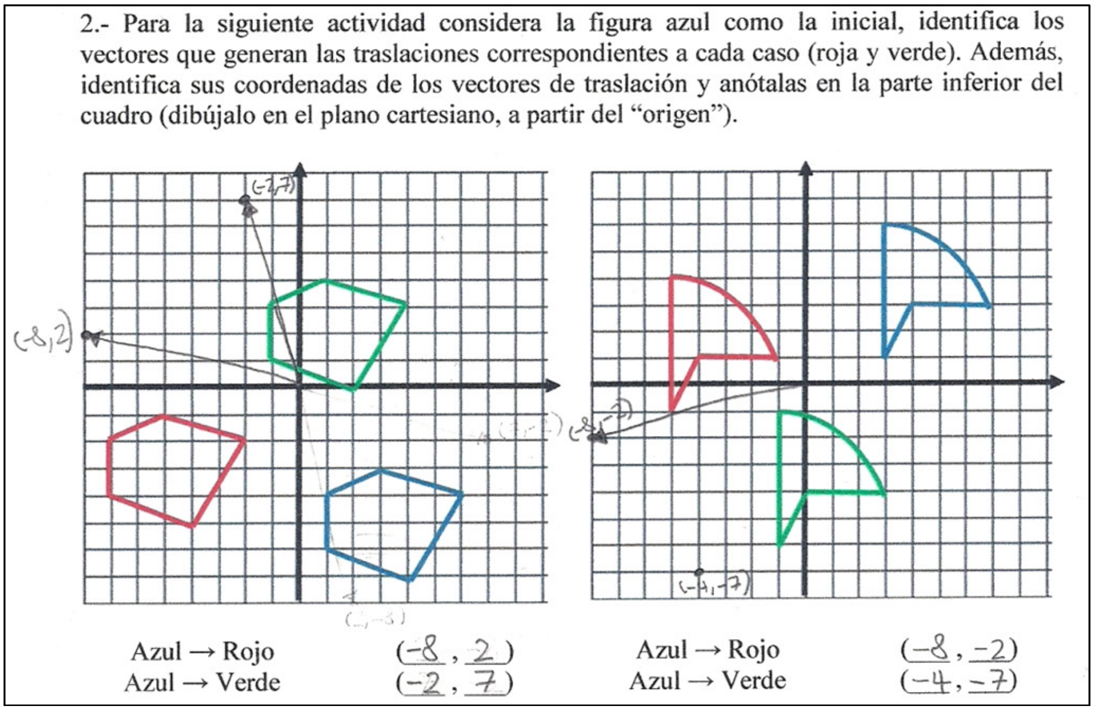


Fig. ***N2.B.4***

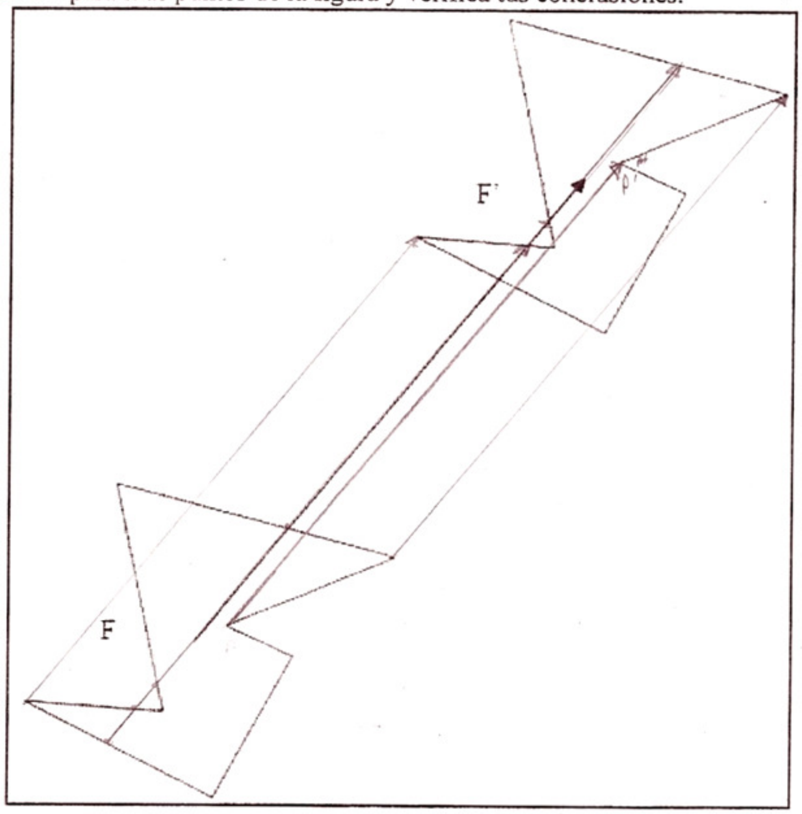
El estudiante no realizó la hoja de trabajo 5b, cumpliendo solamente con las fases 3 y 5, sin asumir un papel de peso en ninguna de ellas. Durante la última sesión, donde construyen la definición de traslación, fue la primera en llegar y por ello construyó una primera versión del término (el cual fue aprobado y asumido como propio por los estudiantes "A" y "C", este último lo enriqueció considerablemente en más de una ocasión), la definición tomaba como pilar a la inclinación de las figuras (manifestando constantemente como sinónimos a "orientación", "dirección" e "inclinación").

El desempeño del estudiante es aceptable, considerando que es capaz de identificar propiedades de manera parcial, sin relacionarlas apropiadamente, pero los elementos de su definición muestran una fuerte influencia perceptiva, además del traslado de confusiones en la terminología utilizada.

Caso C:

ACTIVIDADES:

- Utiliza el siguiente dibujo, donde se ilustra un polígono (F) y su traslación (F') a través del vector señalado, toma un punto de la figura original (utiliza lugares clave de la figura para no complicar la búsqueda como: los vértices del polígono, los puntos medios de los lados, etc.) y llámalo P. Posteriormente encuentra su correspondiente de la figura trasladada (etiquétalo con el símbolo P').
- Une el punto P con el punto P' por medio de un segmento.
- Responde las preguntas utilizando tu juego geométrico
- Experimenta para más puntos de la figura y verifica tus conclusiones.

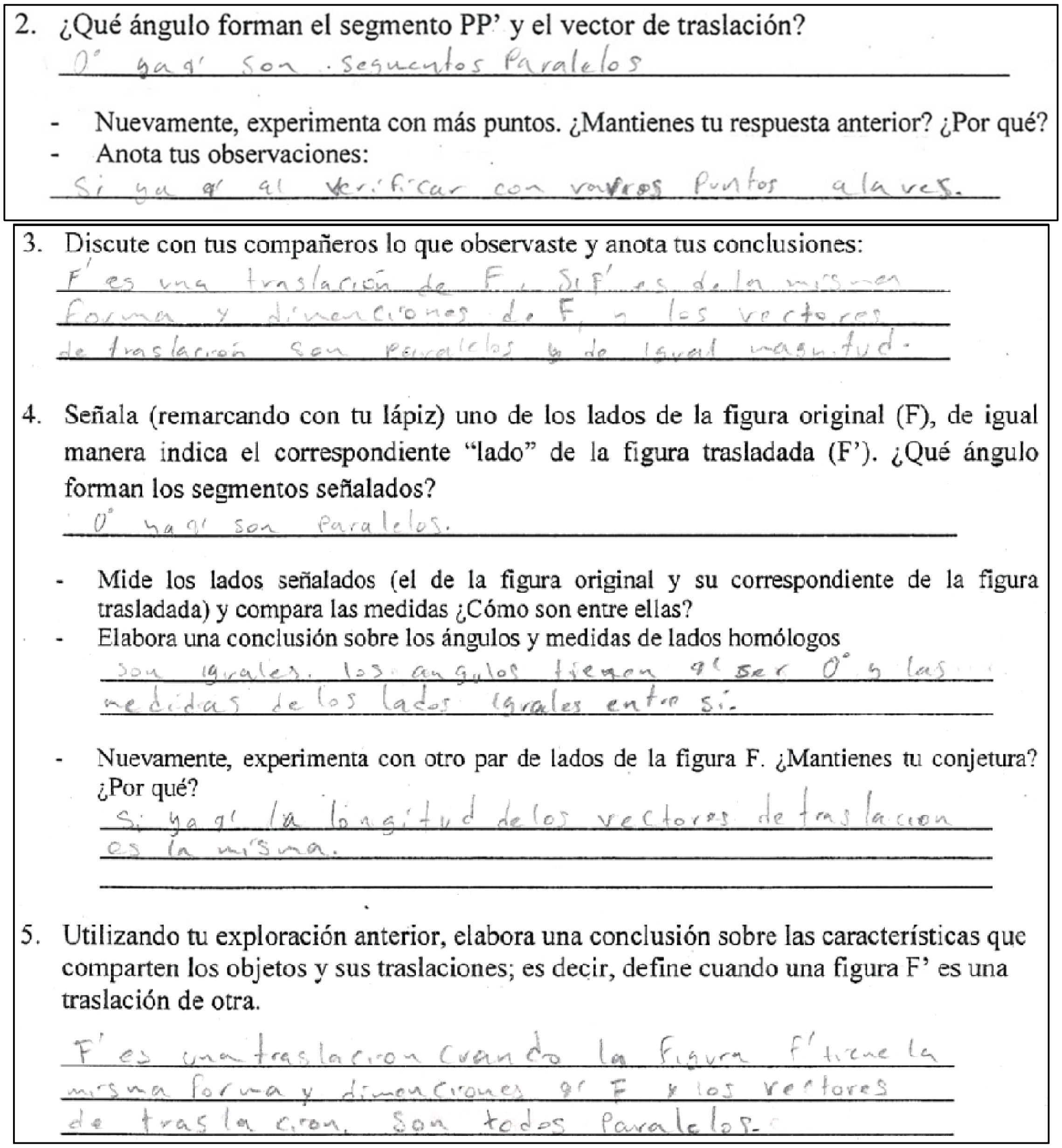


Al segmento que trazaste le llamaremos PP'

1. Comparando la magnitud del segmento PP' y el vector de traslación (flecha que define la magnitud y dirección del movimiento). ¿Cómo son las longitudes de los segmentos? Son de igual longitud.

- Experimenta con más puntos. ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Sí Verifícalo para al menos 2 puntos más de la figura y anota tus observaciones:
todas las distancias son iguales ya q' es una traslacion alo largo del vector.

Fig. ***N2.C.1***



2. ¿Qué ángulo forman el segmento PP' y el vector de traslación?

0° ya q' son segmentos Paralelos

- Nuevamente, experimenta con más puntos. ¿Mantienes tu respuesta anterior? ¿Por qué?
- Anota tus observaciones:

Si ya q' al verificar con varios puntos a la vez.

3. Discute con tus compañeros lo que observaste y anota tus conclusiones:

F' es una traslación de F, si F' es de la misma forma y dimenciones de F, y los vectores de traslación son paralelos y de igual magnitud.

4. Señala (remarcando con tu lápiz) uno de los lados de la figura original (F), de igual manera indica el correspondiente "lado" de la figura trasladada (F'). ¿Qué ángulo forman los segmentos señalados?

0° ya q' son paralelos.

- Mide los lados señalados (el de la figura original y su correspondiente de la figura trasladada) y compara las medidas ¿Cómo son entre ellas?
- Elabora una conclusión sobre los ángulos y medidas de lados homólogos

Son iguales. los angulos tienen q' ser 0° y las medidas de los lados iguales entre sí.

- Nuevamente, experimenta con otro par de lados de la figura F. ¿Mantienes tu conjetura? ¿Por qué?

Si ya q' la longitud de los vectores de traslacion es la misma.

5. Utilizando tu exploración anterior, elabora una conclusión sobre las características que comparten los objetos y sus traslaciones; es decir, define cuando una figura F' es una traslación de otra.

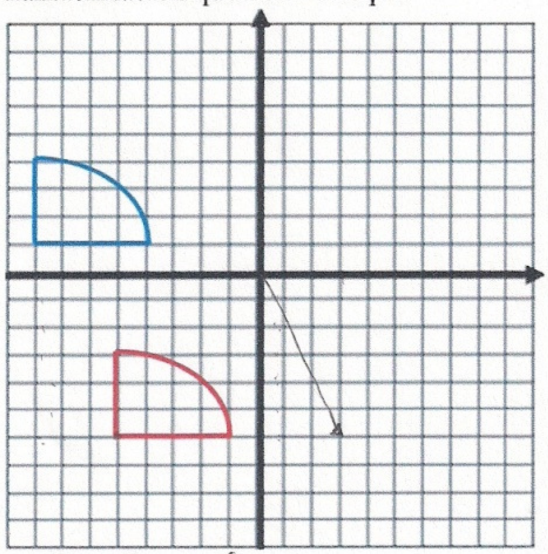
F' es una traslacion cuando la figura F' tiene la misma forma y dimenciones q' F y los vectores de traslacion, son todos paralelos.

Fig. ***N2.C.2***

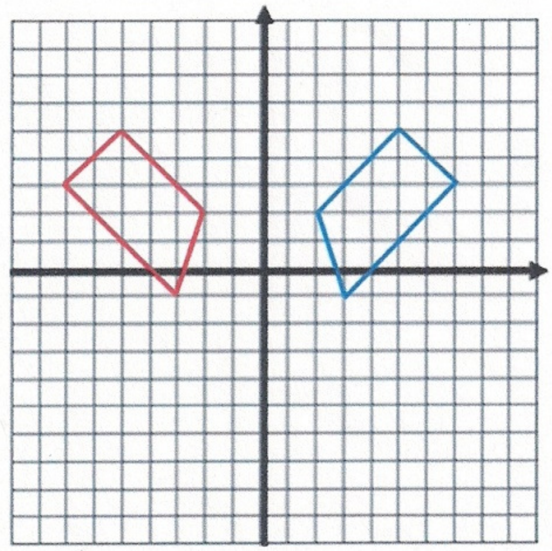
El la pregunta final de la hoja de trabajo 3, se les cuestiona sobre las características que comparten los elementos y sus traslaciones (con la intención de mejorar los criterios declarados en la actividad anterior). El estudiante "C" menciona el paralelismo de los vectores de traslación (en plural, manifestando una diferencia entre vectores al cambiar su punto de aplicación).

ACTIVIDADES:

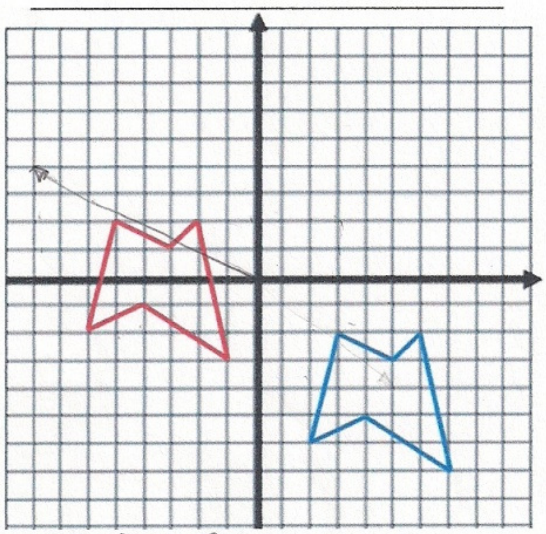
1.- En cada una de las siguientes cuadrículas, decir cuáles son traslaciones y cuales no (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja. Para cada caso identifica el vector de traslación (escribiendo sus coordenadas y dibujándolo a partir del "origen" en el plano cartesiano) ó argumente las características de la transformación que no se cumple



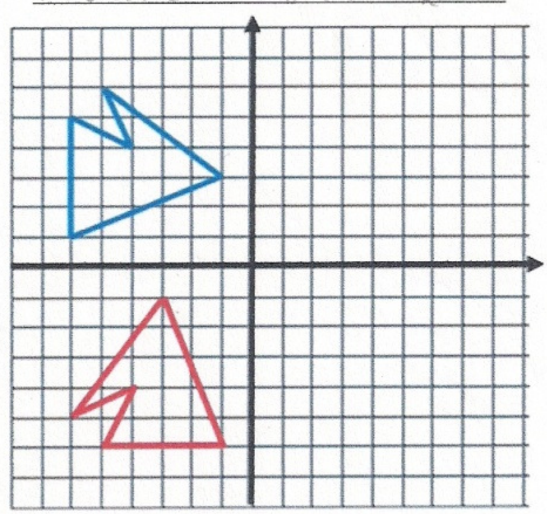
(3,-7) Si



esta no es ya q' los vectores de traslacion son d' diferente magnitud. es una reflexion



(-8,4) Si



No es ya q' los vectores de traslacion son diferentes

Fig. ***N2.C.3***

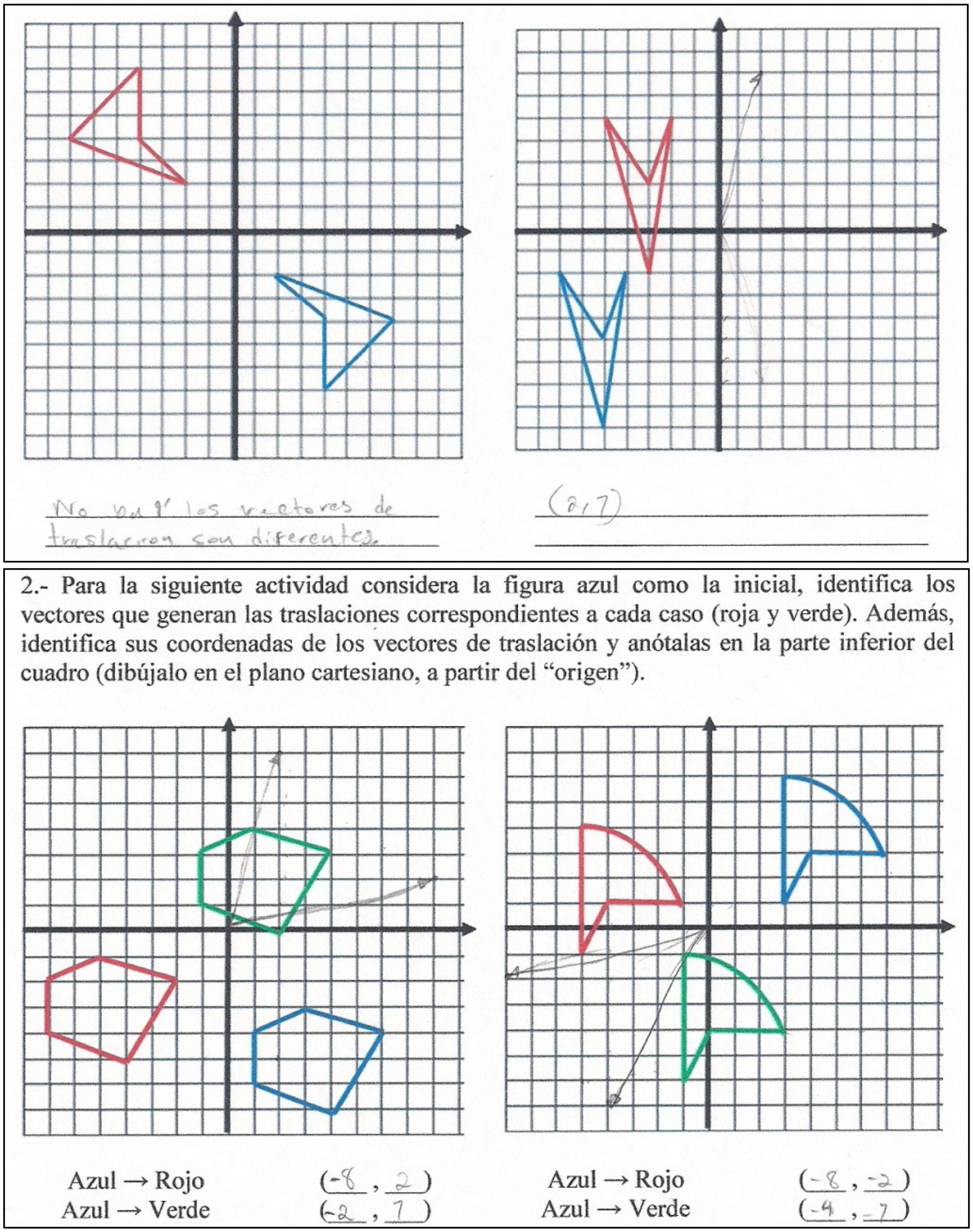


Fig. ***N2.C.4***

Reitera el criterio basado en el paralelismo de los vectores, para distinguir a las traslaciones. Esta postura se arraigóen las creencias del estudiante al grado de utilizarla como elemento definitorio para la transformación de traslación, a continuación se incluye la versión que redactó para referirse a la traslación:

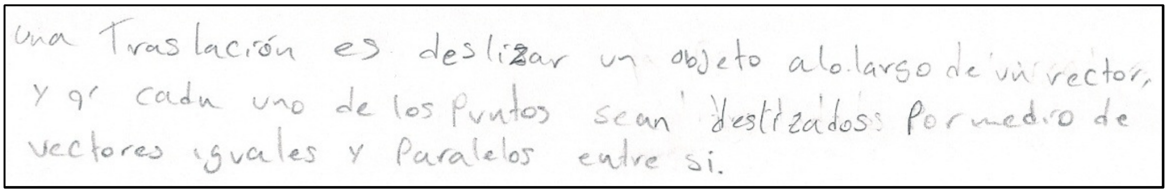

una Traslación es deslizar un objeto a lo largo de un vector, y q' cada uno de los Puntos sean deslizados por medio de vectores iguales y Paralelos entre si.

Fig. ***N2.C.5***

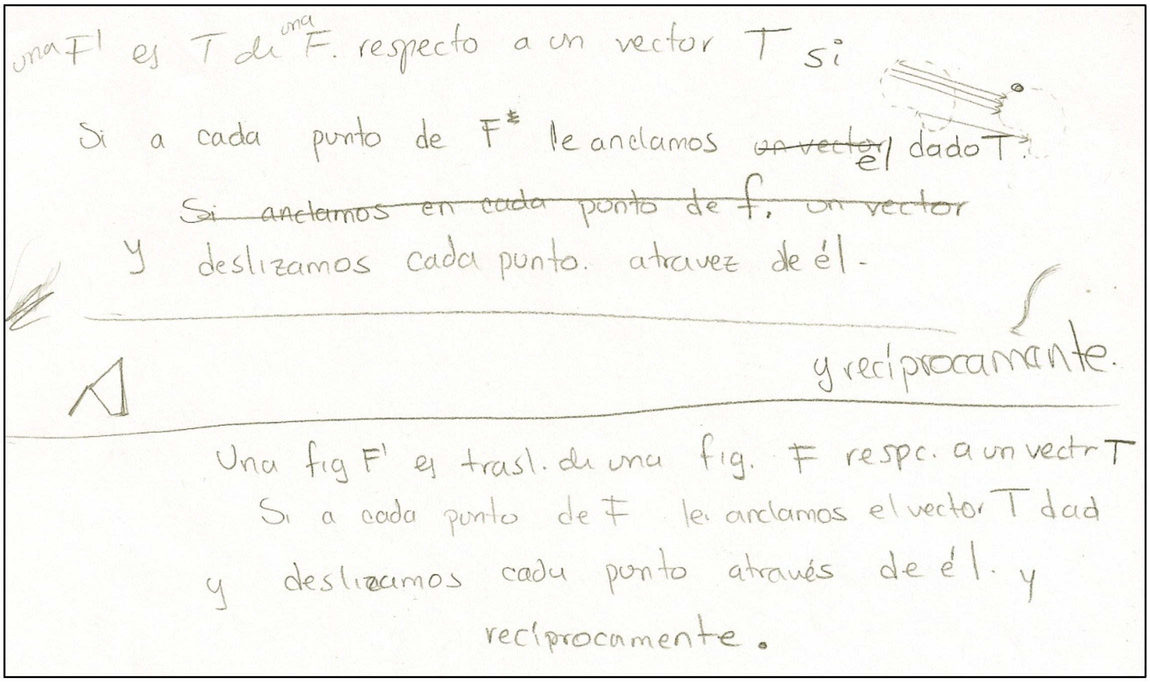
El estudiante asocia de manera aislada distintas propiedades de la traslación, pero se siente en condiciones para elaborar una definición y presentarla para el consenso del grupo. La definición menciona propiedades, pero con una aparente inclinación al uso del paralelismo como elemento central (la aparente tendencia puede ser interpretada como redundante, ya que el hablar de "vectores iguales" implica el paralelismo), durante las discusiones enriqueció distintas definiciones de sus compañeros al incluir el paralelismo. El descuido constante del vector de traslación como propiedad definitoria no fue compartido por 3 de sus compañeros (entre los cuales destaca el caso D) y el escenario permitió construir dos equipos con la intención de refutar las definiciones elaboradas por el equipo contrario.

Las respuestas de la hoja de trabajo, muestran su conocimiento sobre propiedades de la transformación, aunque sin llegar a relacionarlas de manera apropiada (elemento central para el nivel 2). En cuanto a los sustentos de sus afirmaciones, por el peso de la propiedad de paralelismo y la omisión del papel del vector, muestran una categoría de inducción con ejemplo genérico pura. El estudiante se desenvolvió apropiadamente y se considera que cumple los requisitos para continuar con el siguiente nivel.

Caso D:

Aunque el estudiante tuvo repetidas faltas durante las actividades del segundo nivel, participó en la resolución de la hoja de trabajo 5-b y la sesión dedicada a la definición de traslación.

La definición presentada a la clase fue la siguiente y, a diferencia del caso C, construyó la transformación a través de la manipulación puntual (con esto ya no se consideraban la figuras como un todo, la cual se convirtió en una técnica usada de manera recurrente por algunos de sus compañeros).


una F' es T de una F. respecto a un vector T si

Si a cada punto de F* le anclamos ~~un vector~~ el dado T.

~~Si anclamos en cada punto de f, un vector~~

y deslizamos cada punto. atravez de él.

y recíprocamante.

Una fig F' es trasl. de una fig. F respc. a un vectr T

Si a cada punto de F le anclamos el vector T dad

y deslizamos cada punto através de él. y

recíprocamente.

Fig. ***N2.D.1***

Las hojas de trabajo son satisfactorias y aunque no se completaron todas las actividades, fue bastante eficiente y activo durante las fases 3 y 5. El estudiante asumió el papel de líder en el debate donde se compararon las definiciones creadas por dos equipos y su prioridad fue la consistencia de su definición (en la hoja que incluye su versión personal aparece, en la parte superior derecha, un dibujo que aparenta ser una verificación del enunciado). Comparando la definición con el “caso C”, en ésta versión podemos observar a la trasformación como una instrucción puntual, lo cual facilita su uso. Cuando se discutió sobre las diferencias entre los enunciados, el estudiante fue capaz de generar un contraejemplo convincente para refutar la definición basada en paralelismo.

El estudiante no sólo puso en evidencia la identificación de distintas propiedades, además fue capaz de relacionarlas apropiadamente y generar conclusiones más complejas, los componentes de sus afirmaciones muestran un razonamiento inductivo (por partir de experiencias dadas por ciertas).

OBSERVACIONES DEL NIVEL 2

Los casos C y D cumplieron con los requerimientos del nivel, todos son capaces de identificar traslaciones a través de características puntuales, en cuanto a los casos A y B discriminan apropiadamente, pero sus respuestas exhiben carencias heredadas del nivel anterior, o que nos hace suponer que siguen influenciados por los elementos del primer nivel (al grado de que mantienen sus confusiones originales).

En cuanto a la sesión dedicada a la definición de traslación fueron marcados dos equipos, el formado por los estudiantes que interpretaban a la traslación como una función (donde a cada punto se le asigna un correspondiente, con la ayuda de un vector fijo) y aquellos que consideraban necesario incorporar propiedades de la transformación (las más recurrentes fueron el paralelismo y la congruencia de los segmentos formados por puntos homólogos). Como cierre de la discusión y con la finalidad de generar polémica, se les cuestionó a ambos equipos sobre figuras con trazos curvos y las modificaciones que implicaría en sus definiciones, el equipo que usó los vectores en la definición no se vio afectado; mientras que el grupo que defendía el paralelismo como elemento central mantuvo su escrito pero replanteó la idea de paralelismo (hablando de paralelismo de curvas en términos de las rectas tangentes de puntos homólogos). El contraejemplo que dio por terminada la discusión fue aportado por el caso “D”, el cual hablo de figuras como una colección de puntos aislados (con la intención de omitir trazos continuos, que puedan ser relacionados con paralelismo), tal afirmación no logró ser refutada por el grupo contrario y se dio por terminada la sesión.

ANÁLISIS DEL TERCER NIVEL DE VAN HIELE
(Hojas de trabajo No.6, No. 7, No.8, No.9, No.10 y No.11).

Con miras de integrar las distintas transformaciones, se añaden hojas de trabajo donde se exploran distintas propiedades de la reflexión y rotación, además de sesiones destinadas a la construcción de sus respectivas definiciones. Los objetivos perseguidos por el tercer nivel, no sólo se limitan a la exploración y definición de las trasformaciones en el plano, sino que además pretenden evaluar la cerradura de la traslación de manera general (sin el uso de escenarios concretos y promoviendo una cambio en el tipo de pruebas permitidas).

De manera similar al nivel de razonamiento anterior, las hojas de trabajo incluían actividades para ser resueltas en el centro de cómputo, particularmente las hojas de trabajo 9 y 10 fueron elaboradas para implementarse con esos requisitos, pero complicaciones temporales obligaron a sustituirlas por un par de sesiones en el salón de clases.

Caso A:

1. Si la figura F es trasladada por el vector v y la imagen a su vez por el vector w ($T_w \circ T_v$). ¿Se puede simplificar la traslación a un sólo movimiento? Sin utilizar vectores, ¿Cómo puede determinar gráficamente el movimiento de dicha composición?

Si

Deslizando la figura.

Fig. ***N3.A.1***

La pregunta estaba orientada a describir a la composición de traslaciones como la diagonal de un paralelogramo, omitiendo la versión analítica de los vectores con el fin de agotar los elementos que la geometría sintética nos ofrece para el tratamiento de las transformaciones. Considerando la respuesta del estudiante, podemos suponer que no comprendió la pregunta (lo cual es bastante probable, ya que varios estudiantes mostraron confusión sobre lo que se solicitaba).

2. Si la figura F se le aplica la composición $T_u \circ T_v \circ T_w$, donde los vectores tienen coordenadas u= (u_1, u_2), v= (v_1, v_2), w= (w_1, w_2). ¿Se puede simplificar la expresión? Si su respuesta es afirmativa diga cómo, si considera que no es posible justifique por qué y qué elementos necesita para que lo sea.

Si, Se pueden simplificar a una sola coordenada

$T_u \circ T_v \circ T_w = (U_1 + V_1 + W_1, U_2 + V_2 + W_2)$

3. Dada una traslación T_v ¿Es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo ¿La solución es única? ¿Por qué?

Si, Pero la solución no es unica. por que igual la podemos descomponer. en producto de mas de dos traslaciones

4. Dada una traslación T_v, donde $v=(v_1, v_2)$ ¿De cuántas maneras se puede descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores que intervienen en la traslación. Suponga que $w=(w_1, w_2)$ y $z=(z_1, z_2)$ son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_z \circ T_w$), expresa la relación entre los vectores v, w y z.

de muchas maneras y debe cumplir que se encuentre en la misma dimención

Fig. ***N3.A.2***

Las preguntas omiten casos particulares y están dirigidas a promover la relación de los vectores en la composición de traslaciones. En las respuestas presentadas son notorias las reflexiones sobre casos generales, particularmente en la pregunta 2 muestra una prueba deductiva de experimento mental. La etiqueta se asigna después de considerar el comportamiento del estudiante durante la fase 3 del nivel, ya que usaba flechas (refiriéndose a ellas como vectores) para ejemplificar su afirmación.

5. Si T_v se descompone como el producto de tres, cuatro o cinco traslaciones, justificar cuantas soluciones hay para cada caso.

Una sola solución. Para cada caso.

Fig. ***N3.A.3***

Considerando la respuesta de la pregunta dos, donde verifica la relación entre la composición de traslaciones y los valores de los componentes de vectores asociados, la afirmación a la pregunta 5 resulta confusa y la justificación con el uso de la suma de los componentes de los vectores no fue requerida.

7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

Una traslación es cuando a cada punto de F le corresponde un punto de F' siguiendo una misma dirección y sentido

Fig. ***N3.A.4***

Entre las preguntas de las primeras hojas de trabajo del nivel, se solicita el diseño de una definición final para traslación (considerando que la actividad de cierre del nivel de razonamiento anterior correspondía a la discusión conjunta para crear una versión grupal), para la construcción del enunciado se otorgó la libertad para incorporar elementos de geometría sintética o analítica. En la definición se observa una influencia de la instrucción puntual elaborada por el caso D, aunque sin mencionar el término vector y sustituirlo al mencionar algunas de sus componentes (de manera incompleta).

En otro orden de ideas, en la redacción de la pregunta aparece la indicación "*Enuncia una definición formal de la traslación en el plano*" entre signos de interrogación y aunque el error es significativo en cuanto a lo solicitado, no generó confusión entre los compañeros (aparentemente pasó desapercibido durante la resolución de la hoja de trabajo). Relacionado con la misma actividad, el enunciado contiene la palabra "**formal**"; este dato resulta irrelevante para el estudiante y pasa inadvertido ó, al menos, no es considerado como relevante.

8. Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que existan), además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

Mas que nada todos tenemos alguna noción de traslación, y ami me parecio que la definición de **Caso D** fue más clara y presisa, almenos pienso que me convencio mas.

Fig. ***N3.A.5***

Al completar la fase 3 (explicitación) comenta de manera explícita[7] la influencia del caso D, basta ver la respuesta a la *pregunta 8* donde da las razones que consideró para aprobar su versión. A partir de las siguientes hojas de trabajo, se deja de lado la exploración de traslaciones y se abordan las transformaciones de rotación y reflexión, con los siguientes resultados:

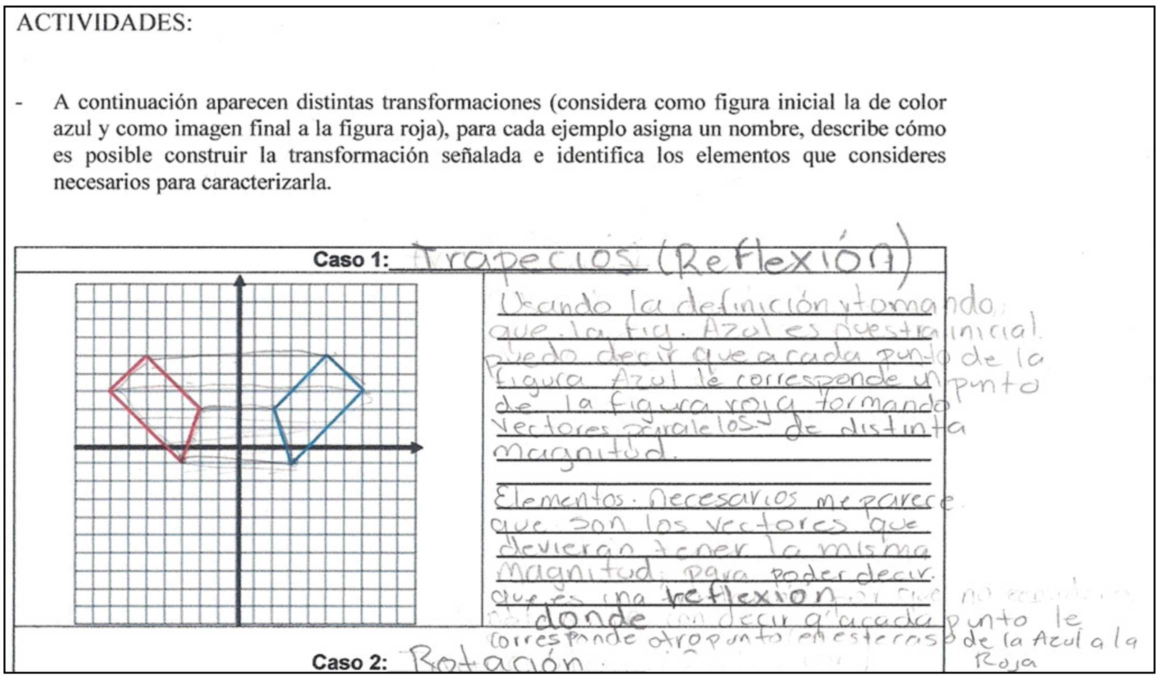


Fig. ***N3.A.6***

La primera actividad corresponde a la identificación de elementos que caracterizan a distintas transformaciones (equivalente al papel que desempeñan los vectores en la traslación). En el cuadro inicial aparecen trazos de apoyo, los cuales se mencionan como vectores, el papel que desempeñan en la trasformación no resulta muy claro. Durante la discusión grupal se le pidió al estudiante una versión más amplia de respuesta, en sus aportaciones habló de cómo era su estrategia de verificación, la cual consistía en construir vectores (entre puntos homólogos) y comparar su inclinación. En este caso en particular mencionó que el paralelismo se mantenía y era suficiente para definir la trasformación.

[7] La redacción original incluía el nombre del estudiante asignado al "caso D", pero fue editada por cuestiones de confidencialidad.

Ante la postura del estudiante se le presentó un escenario hipotético, donde desconoce la imagen de la figura azul bajo la transformación (la figura roja), y no logró concretar una respuesta durante el resto de la sesión (aproximadamente 15 minutos), terminando por asumir la respuesta del caso C. La exploración del caso A, se interpreta por inductiva por ejemplo genérico puro (en este caso, los ejemplos “genéricos” son los puntos representativos que seleccionó para la verificación).

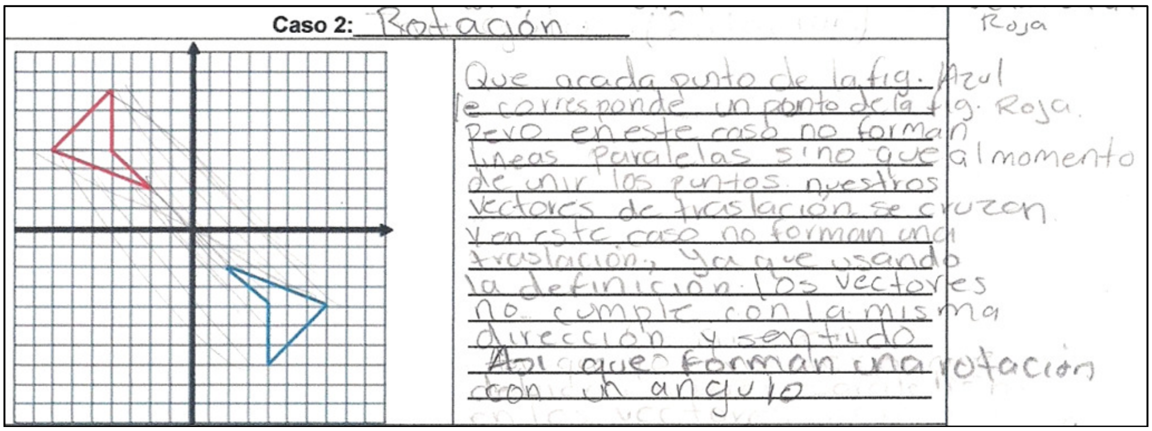


Fig. ***N3.A.7***

Nuevamente recurre a la construcción de segmentos entre puntos “homólogos”, pero de manera errónea (salvo para el vértice que se encuentra más cercano al origen), dado que su estrategia no fue de mucho apoyo, opta por hablar de rotación sin ninguna exploración que lo avale (tan sólo lo perceptivo).

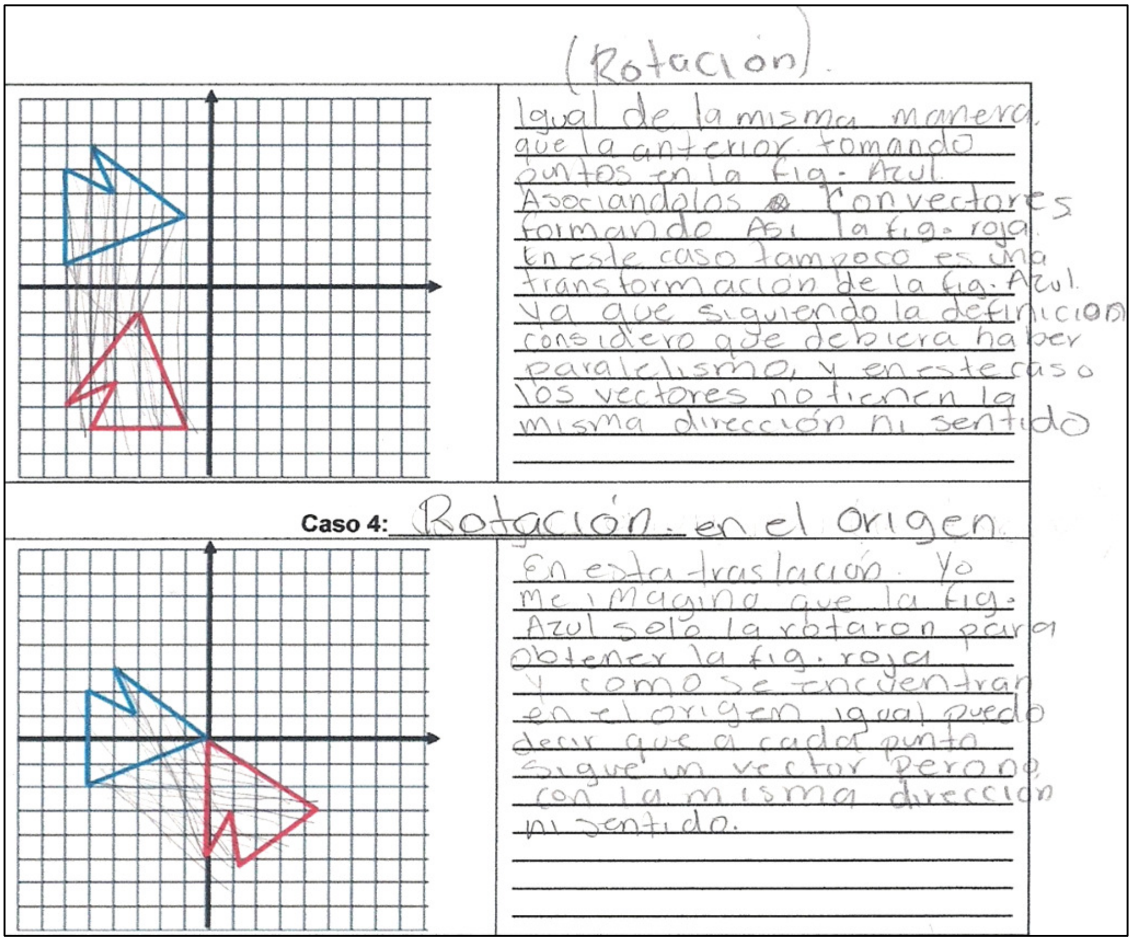


Fig. ***N3.A.8***

Al describir las transformaciones siguientes muestra una confusión importante, el estudiante asume que las imágenes (con las transformaciones) son contra-ejemplos de traslaciones (esto es notorio en las 3 transformaciones finales, las cuales son rotaciones y no respetan ni el paralelismo de segmentos formados por puntos homólogos ni la magnitud de los mismos). La confusión del estudiante se presenta en sus palabras en el caso 4 de la hoja de trabajo, ya que inicia con la frase "*en esta traslación […]*". Considerando su desempeño en las hojas de trabajo anterior, es normal suponer que sus respuestas fueron afectadas por las hojas de trabajo previas, aparentemente la hoja 7 representó un cambio brusco de la linealidad de las actividades.

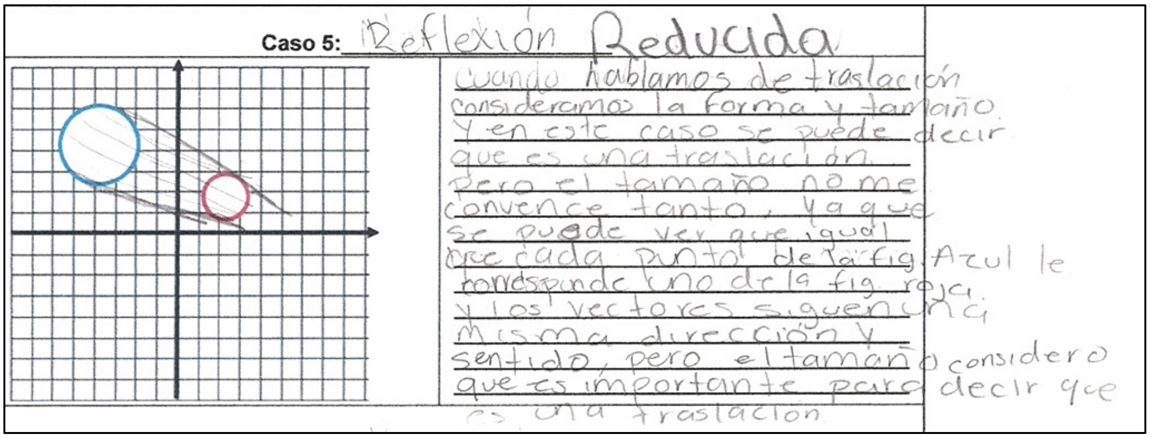
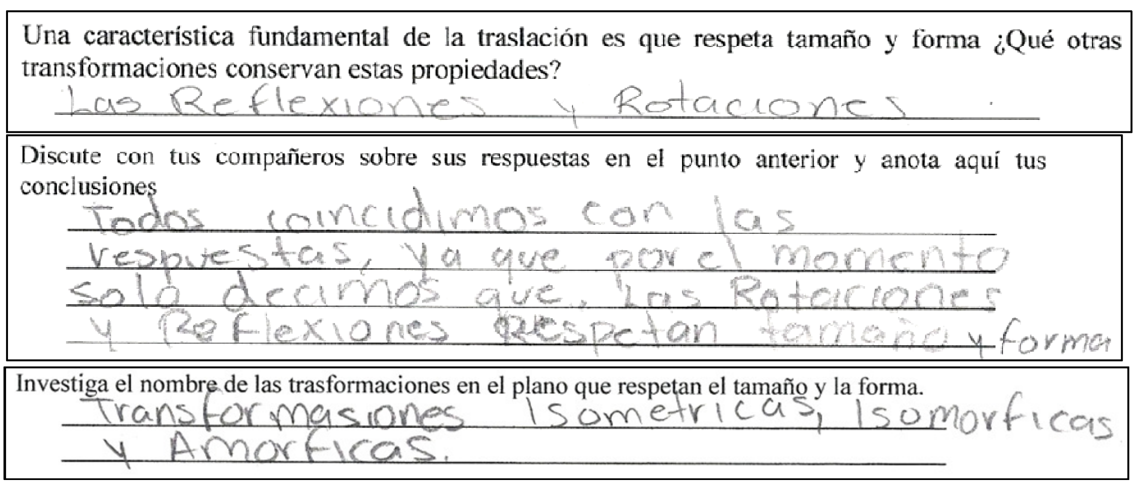


Fig. ***N3.A.9***

Nuevamente expresa un comparativo con la traslación, y en su respuesta menciona los elementos que no comparte la trasformación presentada con la traslación. Durante la discusión grupal, el estudiante participó sólo para aclarar dudas sobre las estrategias utilizadas por sus compañeros, por una aparente desconfianza de sus afirmaciones.


Una característica fundamental de la traslación es que respeta tamaño y forma ¿Qué otras transformaciones conservan estas propiedades?
Las Reflexiones y Rotaciones.

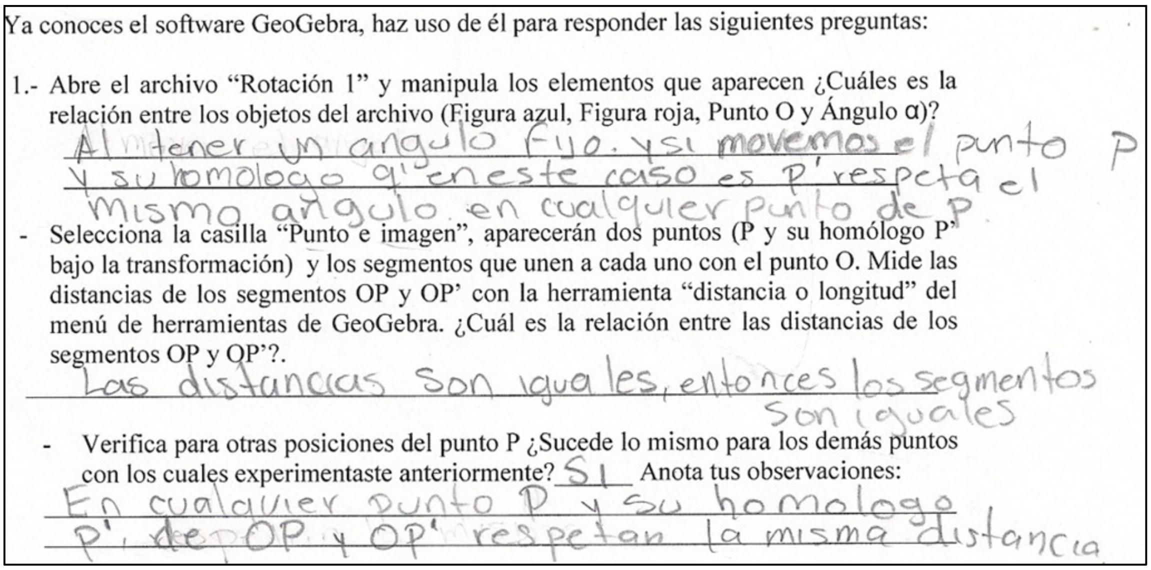
Discute con tus compañeros sobre sus respuestas en el punto anterior y anota aquí tus conclusiones
Todos coincidimos con las respuestas, ya que por el momento sólo decimos que, las Rotaciones y Reflexiones respetan tamaño y forma

Investiga el nombre de las trasformaciones en el plano que respetan el tamaño y la forma.
Transformasiones Isometricas, Isomorficas y Amorficas.

Fig. ***N3.A.10***

Para enriquecer la fase 3 y considerando que la sesión anterior no fue suficiente para terminar la hoja de trabajo 7, se inició la siguiente clase con la discusión grupal, apoyados en un archivo GeoGebra con las distintas transformaciones construidas. El objetivo era enriquecer las estrategias de los estudiantes al considerar elementos dinámicos y contrarrestando con lo limitado del estudio de la versión estática, en las que se trabajó previamente. El apoyo del archivo generó un mejor ambiente de discusión, tanto para afirmar como para refutar las respuestas de los estudiantes.

Las preguntas finales de la hoja de trabajo cumplen su labor al presentar la relación entre traslaciones, rotaciones y reflexiones (isometría), procediendo con ello al estudio individual de cada transformación.


Ya conoces el software GeoGebra, haz uso de él para responder las siguientes preguntas:

1.- Abre el archivo "Rotación 1" y manipula los elementos que aparecen ¿Cuáles es la relación entre los objetos del archivo (Figura azul, Figura roja, Punto O y Ángulo α)?

Al tener un angulo fijo. y si movemos el punto P y su homologo q' en este caso es P' respecta el mismo angulo. en cualquier punto de P

- Selecciona la casilla "Punto e imagen", aparecerán dos puntos (P y su homólogo P' bajo la transformación) y los segmentos que unen a cada uno con el punto O. Mide las distancias de los segmentos OP y OP' con la herramienta "distancia o longitud" del menú de herramientas de GeoGebra. ¿Cuál es la relación entre las distancias de los segmentos OP y OP'?.

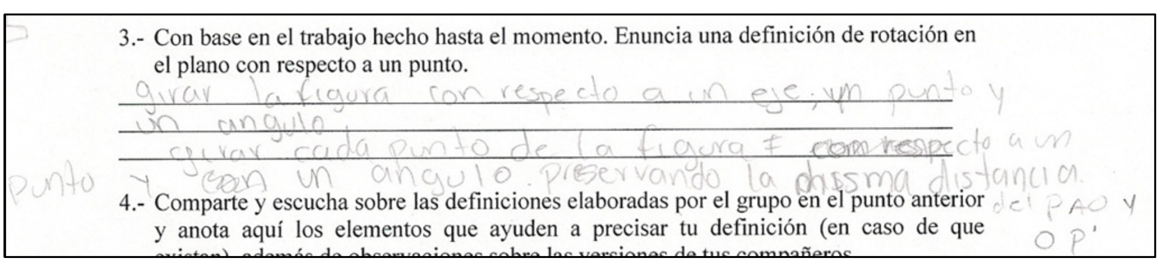
Las distancias son iguales, entonces los segmentos son iguales

- Verifica para otras posiciones del punto P ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Si Anota tus observaciones:

En cualquier punto P y su homologo P', de OP y OP' respetan la misma distancia

Fig. ***N3.A.11***

La exploración dirigida promueve la identificación de ciertas propiedades de rotación, con la finalidad de estar en condiciones de elaborar una definición mediante el uso de sus construcciones e intentando omitir aspectos visuales de la trasformación (aprovechando el trabajo dedicado a los niveles 1 y 2, en la traslación). Las respuestas muestran un desempeño aceptable del caso "A", aunque constantemente redacta de manera incompleta sus respuestas.


3.- Con base en el trabajo hecho hasta el momento. Enuncia una definición de rotación en el plano con respecto a un punto.

girar la figura con respecto a un eje, un punto y un angulo

girar cada punto de la figura ~~con respecto~~ con respecto a un punto y ~~con~~ con un angulo. preservando la ~~mism~~ misma distancia del PAO y OP'

4.- Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que

Fig. ***N3.A.12***

En la pregunta donde se pide una definición, menciona "un eje" para la construcción, y las definiciones fueron tan variadas que se tomó la decisión de incluir una sesión adicional para ampliar la discusión sobre las definiciones. Durante la clase dedicada a unificar las definiciones, el estudiante mantiene la afirmación sobre el eje, pero es hasta que sus compañeros comparten sus afirmaciones personales, éste opta por realizar modificaciones. La primera versión que presentó en la discusión grupal fue la siguiente:

"Girar una figura con respecto a ***un eje****, punto y ángulo"*

La corrección más significativa, como fruto de los comentarios fue la omisión del eje en la definición, fue entonces cuando el estudiante dio su versión final y la escribió en el pizarrón de la siguiente forma:

"Girar cada punto (P) de F, con respecto a un punto y un ángulo, preservando la distancia de P a O."

Durante la discusión grupal se utilizaron distintas terminologías, en un afán de facilitar el debate se incorporó una terminología común, donde "*P*" representa puntos, "*F*" a una figura que los contiene, "*O*" al centro de giro y "α" al ángulo de rotación. Evaluando solamente la definición final, la cual incluye modificaciones por observaciones de sus compañeros, notamos un enunciado superficial y poco representativo de la transformación. La primer carencia es el uso de la palabra "*Girar*", ya que el término es un sinónimo de rotación y resulta redundante el usarlo en ésta definición (el caso B también usó el término de manera similar y durante la discusión grupal se les hizo la observación, aparentemente no fue considerado como relevante). Una segunda observación es la apariencia de los enunciados; la versión del caso "A" se asemeja más a una descripción de la transformación que a una definición representativa, tomando como precedente la discusión grupal previo a la hoja de trabajo 6 (donde se construyó la definición de traslación) y los elementos aprobados por el consenso, tales como: Una instrucción puntual para construir la transformación, la inclusión de los elementos definitorios en el previo al enunciado, consistencia y economía de las afirmaciones.

Como se mencionó en la descripción del nivel, las hojas de trabajo 9 y 10 fueron sustituidas por sesiones en el salón de clases (en contra del diseño original), la dinámica consistió en explorar la reflexión, con la intención de generar una estrategia para construir los puntos homólogos de una figura, a partir de la imagen original y el eje de reflexión. El estudiante no asistió a la sesión y su inasistencia sería contraproducente en su rendimiento posterior.

ACTIVIDADES:

Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo "Reflexión 2", donde aparecen varios elementos manipulables. En el archivo podrás explorar de manera general tu conjetura sobre la composición de reflexiones, hecha en la actividad anterior.

- Manipula las rectas: roja y verde (las cuales representan el primer y segundo eje de reflexión respectivamente).

  Al momento de mover o mas bien rotar los ejes se observa que la figura P' y P'' se mueven. cuando movemos el eje rojo se mueve la Fig. P' y P'' y cuando movemos el otro eje solo se meeve la figura P.

- ¿Qué transformación te lleva de la figura original (azul) a la imagen final (verde)? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

  La transformacion que yo considero es como una doble reflexión.

Fig. ***N3.A.13***

Como actividad de cierre para el nivel, se realiza una exploración sobre la composición de reflexiones y el estudiante no logra identificar una transformación familiar, incluso durante la discusión grupal mostró confusión sobre las afirmaciones de sus compañeros. Cabe aclarar que los elementos que aparecen en el archivo GeoGebra utilizado, se platicaron con los estudiantes (incluyendo la forma de construirlo), incluso se declaró que las figuras eran el producto de la composición de reflexiones, con los ejes marcados (visibles en pantalla).

Durante la realización de las distintas hojas de trabajo, el estudiante mostró confusiones constantes y requirió de mayor tiempo que sus compañeros para completar las actividades. Sus participaciones en la fase 3 bajaron considerablemente, comparando su desempeño en los niveles anteriores, y sus conclusiones y definiciones (fase 5) resultan incompletas.

Las estrategias de argumentación son variadas, pero se apoya de manera recurrente en elementos preceptivos (por el enfoque visual que planteó en su definición y la discriminación de transformaciones con los mismos medios) o en mediciones y generalizaciones a partir de éstas (inductivo de ejemplo genérico puro).

El desempeño del estudiante no es suficiente para considerarlo como candidato de la evaluación del nivel 4, sus respuestas fueron erróneas o insuficientes en varias preguntas; indicando que el estudiante es principiante en la problemática y por ello se le etiqueta con un nivel 3 con adquisición baja. La evaluación del estudiante lo descarta para darle continuidad a su trabajo y realizar la hoja de trabajo 12, pero si solicitarle la resolución del examen final.

Caso B:

1. Si la figura F es trasladada por el vector v y la imagen a su vez por el vector w ($T_w \circ T_v$). ¿Se puede simplificar la traslación a un sólo movimiento? Sin utilizar vectores, ¿Cómo puede determinar gráficamente el movimiento de dicha composición?
Deslizando la figura F

Fig. ***N3.B.1***

Nuevamente aparece una confusión con la pregunta 1 y es respondida de manera similar al caso anterior, el problema aparente es el significado de la palabra "*movimiento*" y la restricción del uso de vectores, los que generan una redacción confusa.

3. Dada una traslación T_v ¿Es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo ¿La solución es única? ¿Por qué?
Si; no es única pq pueden ser vectores diferentes

4. Dada una traslación T_v, donde $v=(v_1, v_2)$ ¿De cuántas maneras se puede descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores que intervienen en la traslación. Suponga que $w=(w_1, w_2)$ y $z=(z_1, z_2)$ son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_z \circ T_w$), expresa la relación entre los vectores v, w y z.

De muchas... Los vectores deben tener dos componentes, estar en $\mathbb{R}^2$. y ser diferentes de V.

5. Si T_v se descompone como el producto de tres, cuatro o cinco traslaciones, justificar cuantas soluciones hay para cada caso.

muchas, pq tendra vectores diferentes.

6. Comparte tus respuestas con el resto de tus compañeros y utiliza el siguiente espacio para redactar tu conclusión final, producto de la discusión grupal.

Deslizar la figura F por un vector que sea la suma de los vectores

Fig. ***N3.B.2***

La sección donde se aborda la composición de traslaciones en casos generales se responde apropiadamente, pero sin una justificación apropiada para el nivel. Los elementos de mayor influencia fueron comentarios de sus compañeros durante la fase dos (exploración dirigida), donde exteriorizaron algunas confusiones y estrategias. Las justificaciones hechas consideran ejemplos genéricos, pero sin una forma clara de organizarlos y, por lo tanto, no es objetivo asignar una categoría de demostración particular, sino una influencia perceptiva e inductiva.

7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

Deslizar una figura por un vector a otro lugar.

Fig. ***N3.B.3***

Para finalizar la hoja de trabajo 6, se solicita la versión personal de traslación (recordando que el cierre del nivel de razonamiento anterior incluía la construcción de una definición grupal del término). La definición del estudiante no considera las aportaciones de sus compañeros durante la discusión previa y se limita a describir la transformación mediante una estrategia visual para identificarla, lo cual resulta poco práctica y ambigua.

8. Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que existan), además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

Deslizar la figura sobre un vector que sea la suma de los otros vectores, y que hay una infinidad de soluciones

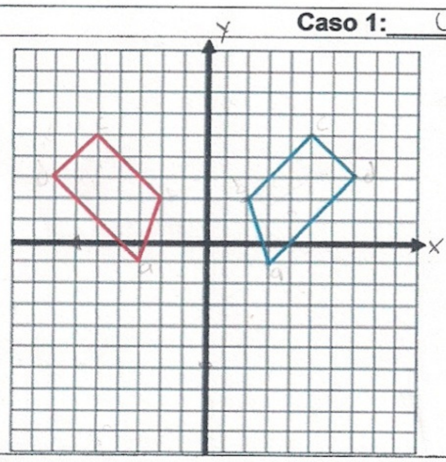
Fig. ***N3.B.4***

En la pregunta final de la hoja de trabajo 6, equivalente a la fase 5, el estudiante sigue respondiendo apropiadamente pero sin mostrar un antecedente claro de sus afirmaciones.

ACTIVIDADES:

- A continuación aparecen distintas transformaciones (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja), para cada ejemplo asigna un nombre, describe cómo es posible construir la transformación señalada e identifica los elementos que consideres necesarios para caracterizarla.

Caso 1: Uno



Reflejamos la figura sobre el eje y, cada punto está a la misma distancia del eje.

Fig. ***N3.B.5***

El primer escenario de las transformaciones es abordado aceptablemente y, además, el estudiante incluye una estrategia puntual para realizar la construcción a partir de la figura original y el eje de reflexión (el cual se presenta de manera implícita como el eje y).

.

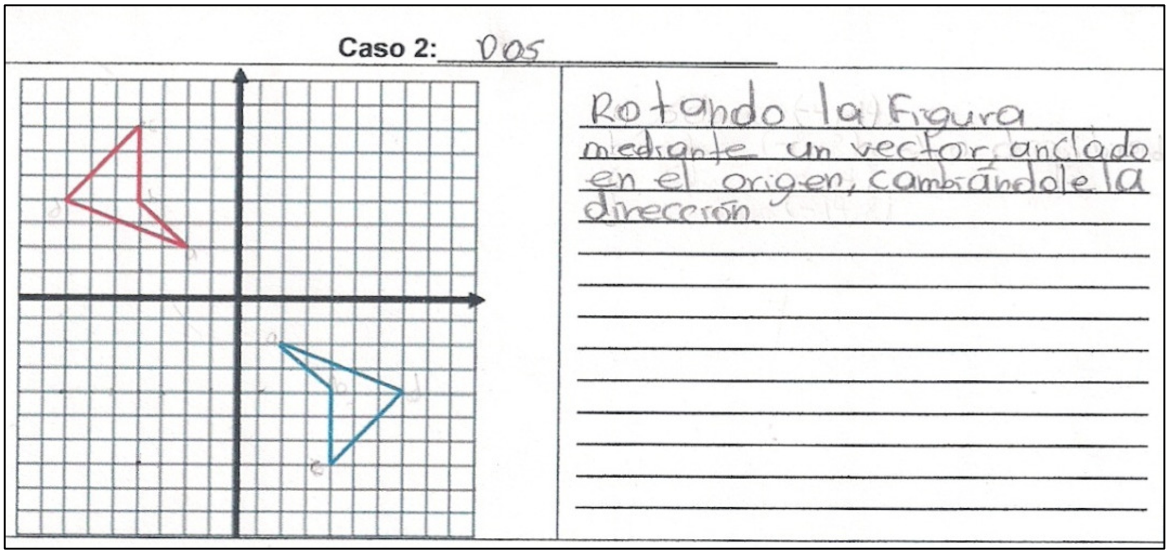


Fig. ***N3.B.6***

El hablar de vectores sin mencionar la magnitud, dirección o sentido resulta confuso, pero dio mayor claridad a sus métodos durante la discusión grupal. Cuando se le solicitó explicar su respuesta (estrategia), construyó en el pizarrón el vector $\overrightarrow{OP}$ (donde O es el origen del plano cartesiano y P es un punto arbitrario de la figura azul) e identificó el punto homólogo a P (P') mediante el cambio de sentido del vector y el uso del Origen como punto de partida; lo cual clarifica el significado de la frase *"…cambiándole la dirección"* como el cambio en el sentido del vector original.

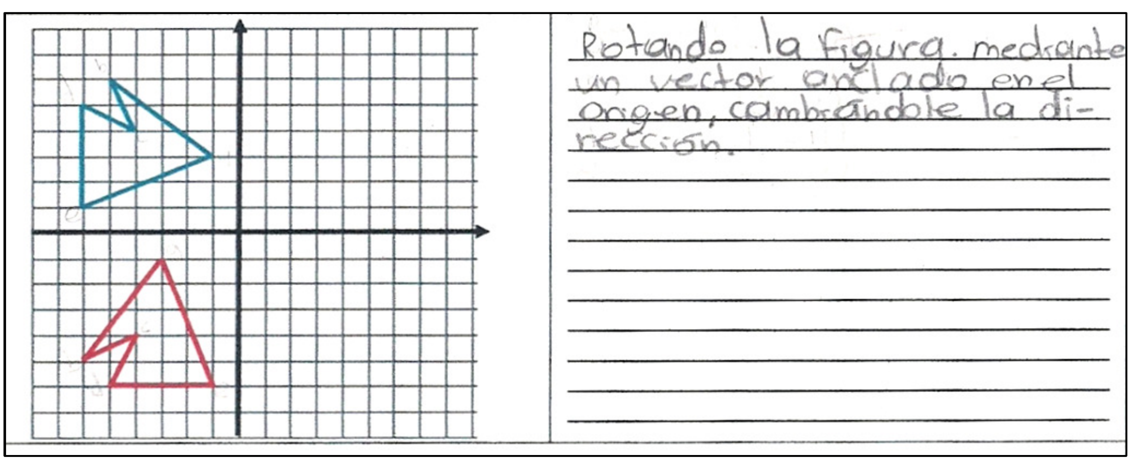


Fig. ***N3.B.7***

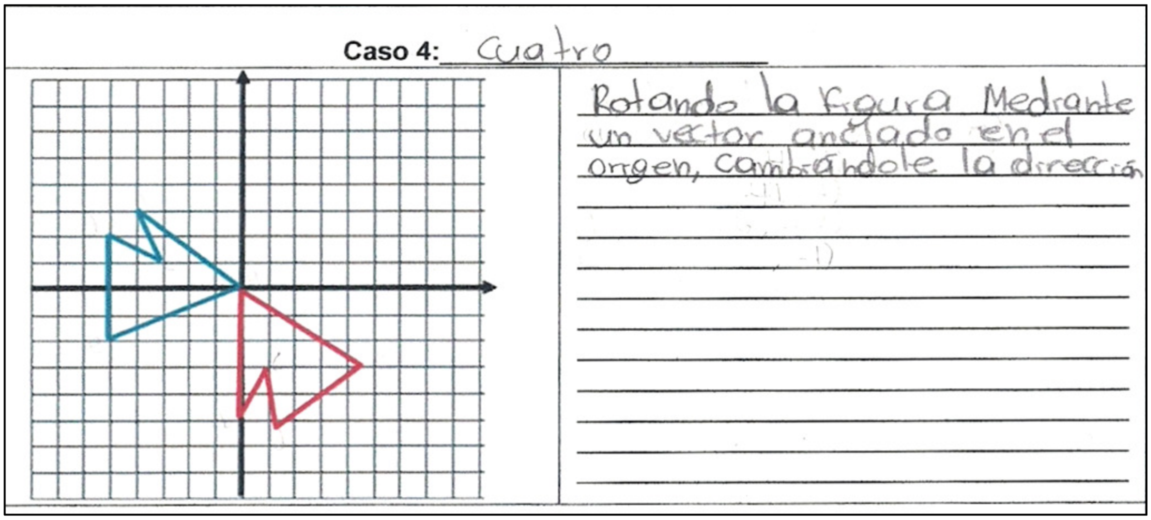
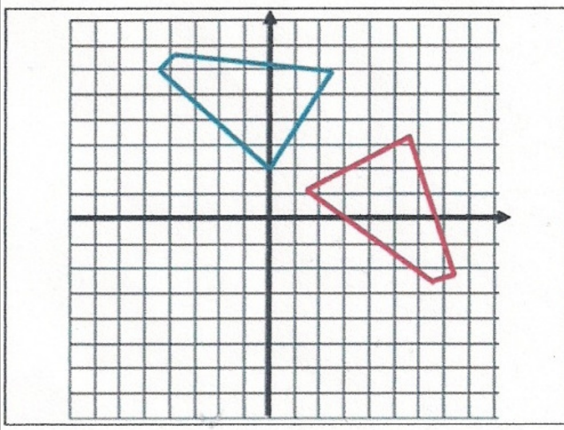


Fig. ***N3.B.8***

Para las rotaciones distintas de 180º (los casos 3 y 4), el estudiante declara una repetición de la misma estrategia del caso anterior, pero sin detallar el significado que cobra la expresión: *"cambiándole la dirección"*. En el contexto alternativo, el estudiante no logró reproducir una explicación equivalente de la estrategia presentada para el caso 2, al no lograr definir con claridad el método para construir la imagen bajo la transformación de la figura azul con apoyo de vectores, la complicación principal se adjudica a la dirección (y sentido) de los vectores auxiliares.

Considerando las limitaciones de los casos expuestos, el estudiante asume una categoría de demostración basada en elementos inductivos puros, donde el error radica en usar un ejemplo poco representativo de las rotaciones en el plano (giro de 180º).



Rotando la Figura.

- Una característica fundamental de la traslación es que respeta tamaño y forma ¿Qué otras transformaciones conservan estas propiedades?

La reflexión, rotación.

Fig. ***N3.B.9***

El último caso de transformación fue resuelto sobre el final de la sesión, así que el estudiante no logró percibir la reflexión visualmente, en un primer intento, ni diseñar una estrategia de verificación (la diferencia significativa entre la reflexión presentada en el caso 1 y la del cuadro anterior es el eje de reflexión no vertical). Se omite el caso 6 de la transformación, donde aparece una transformación homotética, ya que no fue respondida por el estudiante.

3.- Con base en el trabajo hecho hasta el momento. Enuncia una definición de rotación en el plano con respecto a un punto.

Girar una Figura mediante un punto y un ángulo

Fig. ***N3.B.10***

En la hoja de trabajo 8 solamente respondió a la pregunta 3, donde se solicita una definición de rotación, debido a un retardo para llegar a clase. Como consecuencia, la poca exploración fue notoria en la sesión dedicada a la discusión de definiciones (programada para el día siguiente). Al iniciar la siguiente clase y sin el apoyo de las versiones hechas el día anterior, el estudiante redactó la siguiente definición de rotación:

“Cambiar el sentido y la posición de una figura, mediante un punto y un ángulo”

De manera similar al caso A, muestra una influencia de elementos perceptivos y poca claridad sobre el papel de la frase *“Cambiar el sentido y posición de una figura […]”*, ante los cuestionamientos de sus compañeros sobre el significado de la frase, opta por modificar su enunciado de la siguiente manera:

“Girar una figura mediante un punto y un ángulo”

La nueva expresión aparenta ser una descripción de la transformación más que una definición, al no mostrar el papel que cumple cada elemento mencionado (ángulo y punto, este último se refiere al centro de giro). Nuevamente se menciona el término “*girar*” como pilar del enunciado, sustituyendo la construcción puntual en las definiciones aprobadas para traslación y la practicidad de las mismas.

Un cambio considerable se da durante la sesión dedicada a la construcción grupal de la definición de reflexión. En la fase de explicitación, el estudiante sugirió el uso de vectores de igual magnitud y dirección pero con sentido contrario, anclados en el eje de reflexión; la estrategia resultó efectiva y convincente para la mayoría de los compañeros pero fueron incapaces (incluso el caso B) de usar la estrategia para redactar la definición. El método se sustenta en inducción a través de ejemplos genéricos con inferencia (relacionando las propiedades de los vectores), pero sin mucha claridad para mejorarlo.

ACTIVIDADES:

Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo "Reflexión 2", donde aparecen varios elementos manipulables. En el archivo podrás explorar de manera general tu conjetura sobre la composición de reflexiones, hecha en la actividad anterior.

- Manipula las rectas: roja y verde (las cuales representan el primer y segundo eje de reflexión respectivamente).

Los puntos de P y P' están a la misma distancia del Eje₁ y son deslizados por una circunferencia de radio igual a la distancia P o P' al eje. Lo mismo para P' y P'', con respecto al eje₂ (verde)

- ¿Qué transformación te lleva de la figura original (azul) a la imagen final (verde)? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

Una doble reflexión
Reflejar la figura P mediante el eje₁, y así reflejar P' mediante el eje₂.

- En el mismo archivo, experimenta cuando los ejes de reflexión son paralelos, activando la celda "Recta paralela`" (este botón limita las posiciones de la recta de color verde, permitiendo sólo rectas paralelas al eje de reflexión rojo y que pasan por el punto C). ¿Qué isometría trasforma la figura F en F''? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

Una traslación.

Fig. ***N3.B.11***

Al presentar las conjeturas sobre la composición de reflexiones, el estudiante mostró confusiones similares a las planteadas por el caso A (cuando la composición de reflexiones es con ejes de reflexión no paralelos), salvo que en esta ocasión logró reorientar el rumbo durante la discusión grupal. Durante la explicitación, el estudiante fue el primero en compartir sus resultados, se le cuestiono por su respuesta en el segundo inciso y, observando la imágenes en la pantalla de la computadora, comentó "*parece una rotación*", fue entonces cuando se le preguntó sobre el centro de giro y el ángulo de rotación sin obtener una respuesta de su parte.

Aunque es normal que la percepción represente la primera justificación para los incisos 2 y 3, sería más apropiado llamarlos como una estrategia de exploración y restringir el término de categoría de demostración a la asumida para validación final del enunciado. Con esta aclaración, el estudiante B se limita a construir una conjetura sin un interés en transformarla en teorema o sin herramientas para hacerlo.

La pregunta final, donde se cuestiona sobre el resultado de la composición de reflexiones con ejes paralelos, el estudiante responde "*Es una traslación*" y al solicitarle el vector de traslación o sus componentes, no fue capaz de responder. En ésta ocasión, si es posible asegurar que la justificación perceptiva fue la considerada como suficiente para avalar la conjetura. En un intento de organizar la idea planteada, se le solicitó al estudiante redactar una conjetura completa sobre la composición de reflexiones con ejes paralelos, pero no concretó la tarea y requirió el apoyo del caso C (aportando sugerencias y una redacción tentativa). Al margen de eso, la versión durante la discusión grupal fue:

> *"La composición de reflexiones con ejes paralelos equivale a una traslación de magnitud igual al doble de la distancia entre los ejes de reflexión, sentido del primer eje al segundo y dirección perpendicular a los ejes."*

Como resumen del desempeño en este nivel, el estudiante dejó en blanco varias preguntas de las hojas de trabajo y mantuvo una postura perceptiva para la construcción de las definiciones. Durante la fase 3 tuvo altibajos en sus participaciones, mostrándose pasivo en las sesiones dedicadas a la construcción de definiciones. Las categorías de demostración que utilizó son de tipo perceptivo o inductivo (en ambos casos se realizan generalizaciones a partir de exploraciones con ejemplos representativos, al menos en apariencia).

El estudiante exhibió un desempeño aceptable durante la exploración de composiciones de reflexiones (fase 5), mostrando mayor eficiencia en la discusión grupal. Sin embargo, el factor que hace cuestionable la apropiación del nivel es la cantidad de preguntas que no fueron respondidas y las justificaciones perceptivas para las conjeturas de la hoja de trabajo 11. El estudiante muestra una mezcla de distintos niveles de razonamiento, aunque las características del segundo aparecen con mayor frecuencia; las principales capacidades que ha mostrado son las siguientes:

- ❖ Percepción de objetos como un todo y formados por propiedades aisladas.
- ❖ Comparación de objetos mediante propiedades específicas.
- ❖ Enfoques empíricos de la veracidad de las proposiciones.

En contraparte el estudiante no mostró su habilidad para construir definiciones económicas (además de identificar definiciones equivalentes) y la transformación de definiciones incompletas en completas. La evaluación del estudiante puede dividirse en dos facetas; la asumida durante la exploración y elaboración de definiciones, y la presentada para la elaboración de conjeturas sobre las composiciones de reflexiones (donde fue capaz de generar nuevas propiedades a partir de las conocidas anteriormente, al menos de manera visual). La construcción de definiciones evidenció carencias en las estrategias de exploración, al grado de presentar hojas de trabajo incompletas, en cambio, el desempeño de la hoja de trabajo 11 fue aceptable, aunque con respuestas incompletas o escasas. En general, el desempeño del estudiante es considerado dentro del nivel 3, y por las generalizaciones perceptivas exhibidas se le asignó un grado de adquisición baja del nivel, el resultado excluye al estudiante de la continuidad de las hojas de trabajo y la resolución la actividad 12.

Caso C:

2. Si la figura F se le aplica la composición $T_u \circ T_v \circ T_w$, donde los vectores tienen coordenadas u= (u_1, u_2), v= (v_1, v_2), w= (w_1, w_2). ¿Se puede simplificar la expresión? Si su respuesta es afirmativa diga cómo, si considera que no es posible justifique por qué y qué elementos necesita para que lo sea.

Si. el movimiento seria T_u, T_v y T_w esto seaxia sacar la resultante de la resta de $u-v = (u_1-v_1, u_2-v_2) = \vec{g}$ vector y al vector g le aplicamos T_w y el vector $\vec{\gamma} = (\vec{g} - w)$ $= ((u_1-v_1)-w_1, (u_2-v_2)-w_1)$ esto seria el vector de traslacion g' define todo el movimiento en una sola traslacion.

Fig. ***N3.C.1***

El primer acercamiento a la composición de traslaciones muestra una influencia de la hoja de trabajo 5b, donde las relación identificada se presentó como una resta de vectores. Previo a la discusión grupal, incluso durante la fase de 2 (exploración dirigida), el estudiante mencionó su respuesta y el caso D corrigió su método (dirigiéndose al profesor).

3. Dada una traslación T_v ¿Es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo ¿La solución es única? ¿Por qué?

Si, y no es única, ya q' existen una infinidad de vectores q' cualquiera suma de ellos nos da la trazlación T_v

4. Dada una traslación T_v, donde $v=(v_1, v_2)$ ¿De cuántas maneras se puede descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores que intervienen en la traslación. Suponga que $w=(w_1, w_2)$ y $z=(z_1, z_2)$ son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_z \circ T_w$), expresa la relación entre los vectores v, w y z.

una infinidad de maneras ya q' con la condición q' deven cumplir es $V = w+z$ ó $V = z+w$ ($v_1 = w_1+z_1$, $v_2 = w_2+z_2$) ó bien ($v_1 = z_1+w_1$, $v_2 = z_2+w_2$)

Fig. ***N3.C.2***

Los comentarios del caso “D” durante la exploración dirigida se perciben en las respuestas siguientes, donde se muestra una relación en términos de la suma de vectores explícitamente (pregunta 4). El argumento original tuvo una influencia inductiva y la confusión entre el escenario de la hoja 5b y la actividad 6, pero en esta ocasión aparecen elementos deductivos, sin despegarse del ejemplo que lo genera y con una modificación del ambiente a partir del cual realiza sus inferencias (sustituyendo el registro Geométrico por el escenario Analítico). Los elementos sugieren una categoría de demostración “de experimento mental transformativa”.

5. Si T_v se descompone como el producto de tres, cuatro o cinco traslaciones, justificar cuantas soluciones hay para cada caso.

hay una infinidad por la pregunta anterior ya q' cada vector lo puedes descomponer en suma de vectores y si sigues aplicando puedes obtener un numero infinito de vectores q' su producto sea igual a Tv

6. Comparte tus respuestas con el resto de tus compañeros y utiliza el siguiente espacio para redactar tu conclusión final, producto de la discusión grupal.

las mismas respuestas y una traslación se puede expresar como una suma o resta de vectores.

Fig. ***N3.C.3***

Las siguientes respuestas se plantean en un escenario general y, en la pregunta 6, exhibe a los vectores como los elementos centrales de la transformación, incorporando su postura sobre la resta de vectores para describir composiciones (aunque sin aportar mucha información al respecto, ni métodos para discriminar el uso de sumas ó restas).

7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

es el movimiento q' ace una figura f para besar a la figura f' y esta definida por ~~vector~~ trayectorias rectas

Fig. ***N3.C.4***

La propuesta para definición formal de traslación incorpora, aunque de manera incompleta, el papel de los vectores en la transformación; incluso tacha la palabra *"vector"* y opta por referirse a ellos como *"trayectorias rectas"*. El enunciado muestra una influencia perceptiva y, de manera similar a los casos A y B, pueden ser considerados superficiales, pero representa un intento de definición puntual de la transformación (comentario hecho a todos durante la discusión grupal). El estudiante incorpora las observaciones e intenta precisar su definición, respondiendo a la pregunta 8 de la siguiente manera:

8. Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que existan), además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

es el movimiento puntual de una figura f para obtener la figura f' y esta definido por una o varias trayectorias rectas.

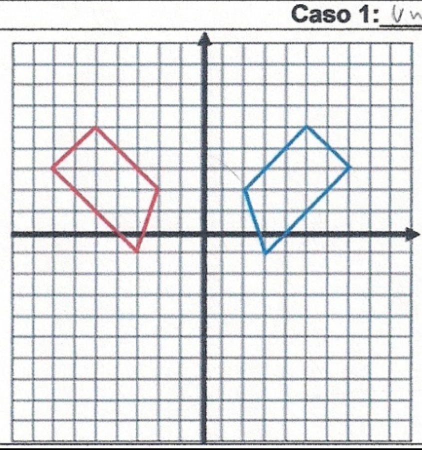
Fig. ***N3.C.5***

La modificación posterior a la fase 3, es el análisis de la transformación punto a punto (pero sin aportar mucha información sobre su aplicación). Podemos considerarla como una definición incompleta, donde la mayor confusión es por hablar de “trayectorias rectas”, lo cual puede ser interpretado erróneamente al usar el enunciado.

ACTIVIDADES:

- A continuación aparecen distintas transformaciones (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja), para cada ejemplo asigna un nombre, describe cómo es posible construir la transformación señalada e identifica los elementos que consideres necesarios para caracterizarla.

Caso 1: Una reflección



en esta ocupamos un eje de reflección donde cada punto estara ala misma distancia del eje d' reflección y estan sobre una recta perpendicular al eje para cada uno de los puntos

Fig. ***N3.C.6***

En la hoja de trabajo 7 el estudiante asumió un rol más participativo y presentó varias estrategias para definir las transformaciones, las cuales resultaron convincentes para los casos A y B. Las componentes de traslación mencionadas fueron: El eje de reflexión y algunas propiedades relacionadas a la construcción (perpendicularidad de los segmentos formados por puntos homólogos, equidistancia entre el eje y puntos correspondientes). Durante la discusión grupal utilizó herramientas de geometría sintética para justificar sus argumentos (experimento mental transformativo).

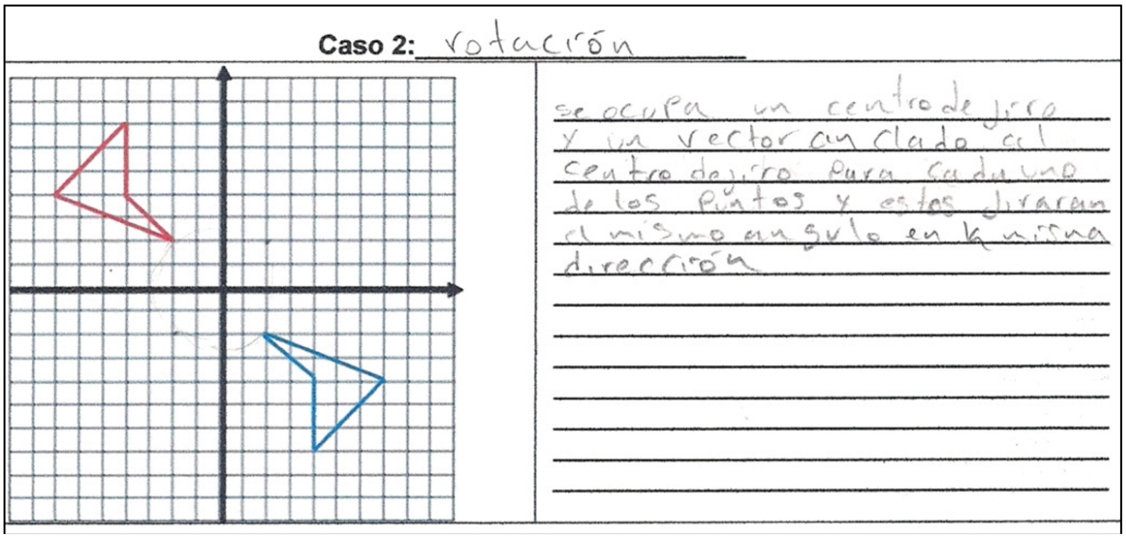


Fig. ***N3.C.7***

Para explicar la rotación durante la fase de explicitación, construyó circunferencias con el foco en el centro de giro (exteriorizando la consideración) y radio de magnitud igual al segmento que une al centro de giro y un punto P arbitrario. Para marcar al correspondiente P’ utilizó la intersección de la circunferencia con la figura (depurando de manera intuitiva). Posteriormente, el profesor realizó la construcción en un archivo de GeoGebra, para comprobar la consistencia de la misma (verificando en distintos puntos P y siguiendo las instrucciones del estudiante). Los alumnos escucharon los comentarios del caso C y no hubo replicas sobre su trabajo. Por la estrategia utilizada, nuevamente tenemos una demostración inductiva con ejemplo genérico con inferencia, donde pone en juego las propiedades implícitas que asigna a la construcción.

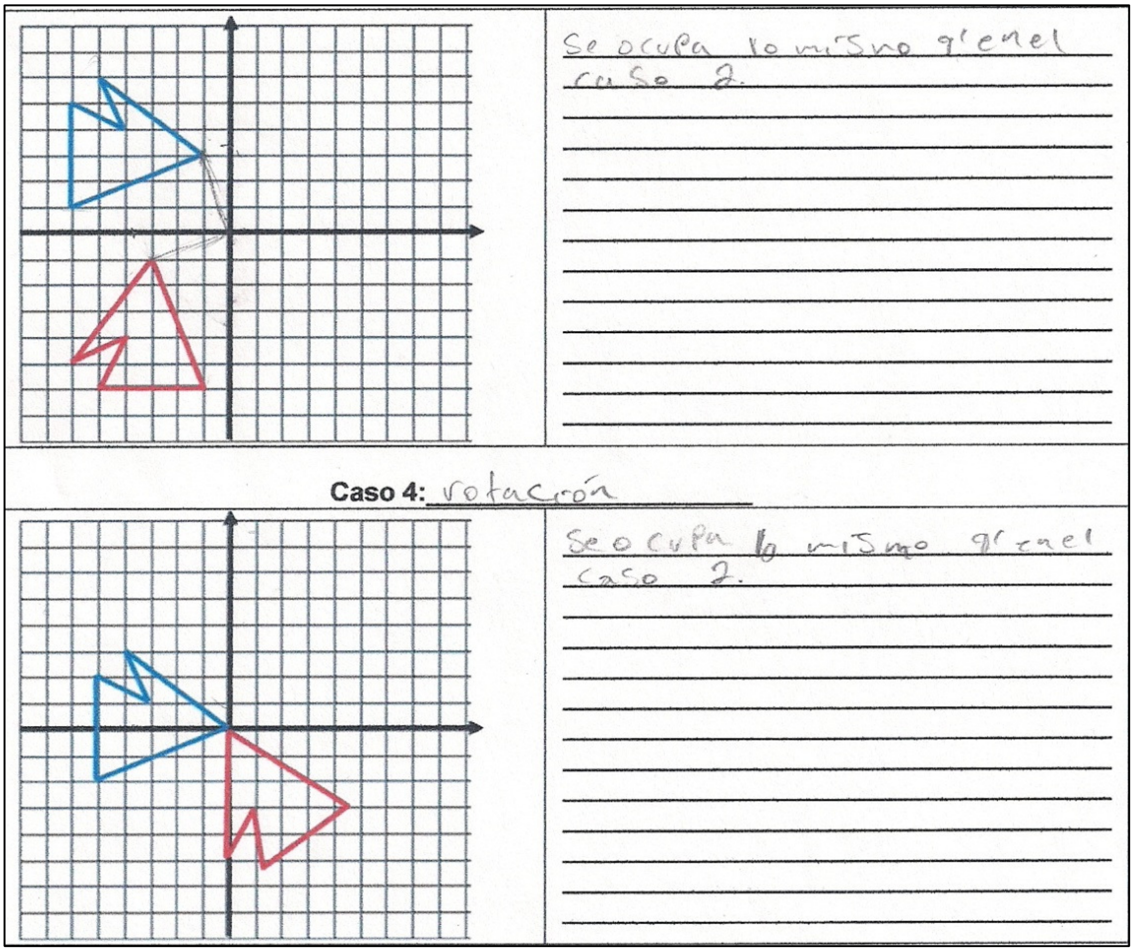


Fig. ***N3.C.8***

No consideró necesario ampliar su respuesta en los escenarios que identifica rotaciones, extrapolando la estrategia diseñada.

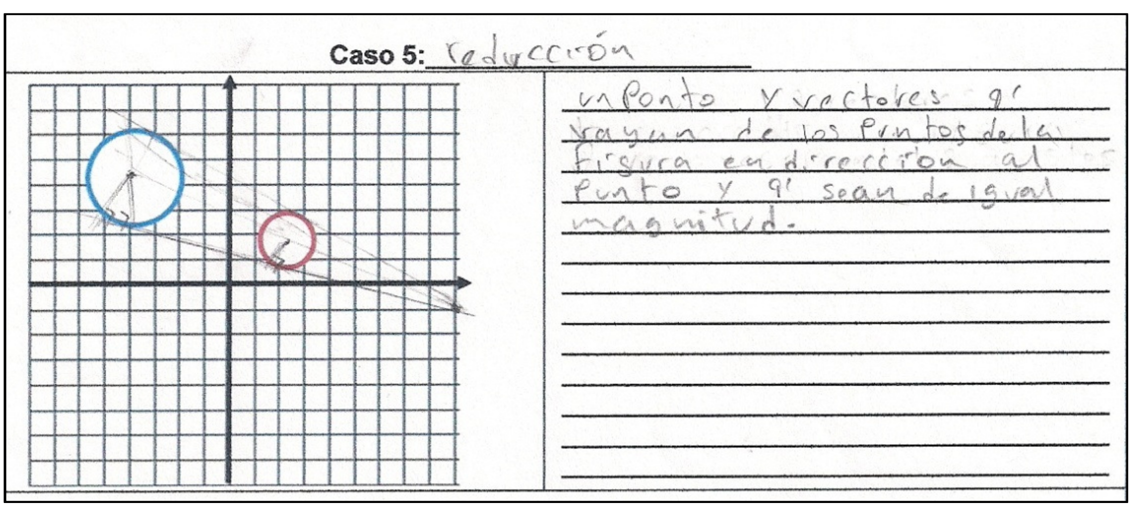
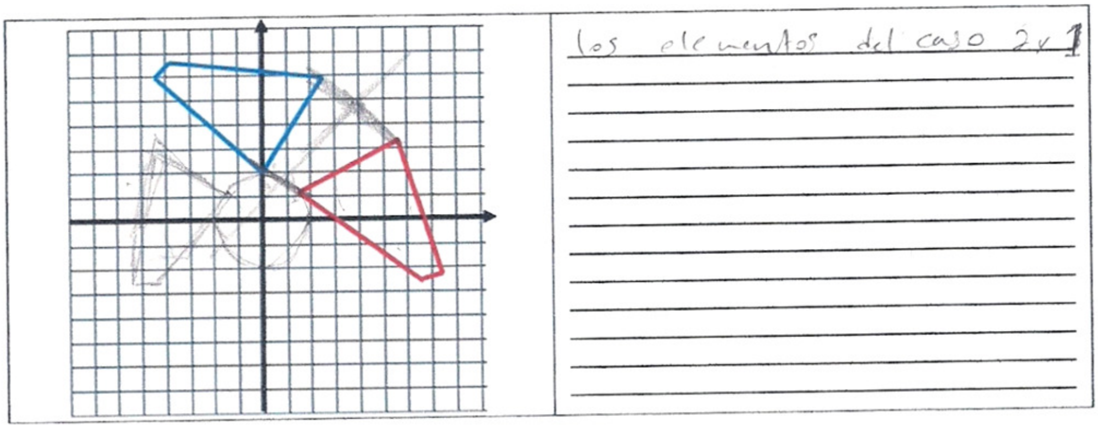


Fig. ***N3.C.9***

La transformación incluida en la hoja de trabajo que no representa una isometría fue abordada por el estudiante, en su respuesta habla de *“puntos y vectores”* como indispensables para definir la transformación, pero sin mucha claridad de su papel. En el ambiente geométrico muestra una relación homotética, la cual no logró ser concretada ni aprovechada en su respuesta final. La categoría se basa en la percepción de relaciones geométricas, con inferencia y ejemplo genérico.



- Una característica fundamental de la traslación es que respeta tamaño y forma ¿Qué otras transformaciones conservan estas propiedades?
  la rotacion y la reflecxion

Fig. ***N3.C.10***

En el último caso, aparece una confusión entre la reflexión y rotación; el estudiante realiza algunos trazos de apoyo y durante la discusión grupal comentó que el caso 6 puede ser definido como una rotación o una reflexión. Atribuimos el desconcierto a la primera impresión de la imagen y el uso incorrecto de su estrategia original. Cabe señalar, que la discusión lo hizo reconsiderar su respuesta y optó por desecharla.

Investiga el nombre de las trasformaciones en el plano que respetan el tamaño y la forma.
Isometrias

Fig. ***N3.C.11***

Las isometrías es un término que aparece en las respuestas de los estudiantes, posiblemente por incluirlo en el examen diagnóstico realizado previo a las actividades.

Ya conoces el software GeoGebra, haz uso de él para responder las siguientes preguntas:

1.- Abre el archivo "Rotación 1" y manipula los elementos que aparecen ¿Cuáles es la relación entre los objetos del archivo (Figura azul, Figura roja, Punto O y Ángulo α)?

la fisura roja rota un angulo α sobre el punto O y respeta la forma y dimencion de la fisura azul

- Selecciona la casilla "Punto e imagen", aparecerán dos puntos (P y su homólogo P' bajo la transformación) y los segmentos que unen a cada uno con el punto O. Mide las distancias de los segmentos OP y OP' con la herramienta "distancia o longitud" del menú de herramientas de GeoGebra. ¿Cuál es la relación entre las distancias de los segmentos OP y OP'?.

es la misma distancia

- Verifica para otras posiciones del punto P ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? SI Anota tus observaciones:

estos dos puntos se encuentran en una circunferencia de radio igual ala distancia del segmento OP ó OP'

Fig. ***N3.C.12***

Durante las exploraciones de la hoja de trabajo 8, incorporó su estrategia para definir transformaciones como justificación (hablando de *"circunferencia"* en el segundo inciso de la pregunta 1).

2.- Selecciona la casilla "Marcar ángulo" ¿Qué elemento aparece? ¿Cómo se relaciona con el ángulo α?

el recorrido del segmento OP' y es el mismo angulo q' α

- Verifica para otras posiciones del punto P y para distintos ángulos α ¿Mantienes tu respuesta anterior? SI Anota tus observaciones:

ya q' el segmento OP' esta jirado sobre la circunferencia de radio OP en un angulo α

3.- Con base en el trabajo hecho hasta el momento. Enuncia una definición de rotación en el plano con respecto a un punto.

es jirar la figura alolargo de una circunferencia * un cierto angulo.
* con centro en punto O y el radio igual ala distancia del punto O a la figura.

Fig. ***N3.C.13***

Su estrategia de construcción de rotaciones sigue influenciando las respuestas de la hoja de trabajo 8, inclusive es notorio en la definición que plantea. Con respecto al enunciado que presenta, añade los elementos de construcción de la circunferencia.

La siguiente sesión se dedicó a la discusión sobre las definiciones y, el estudiante mantuvo su postura de incluir a la circunferencia para enfatizar la construcción puntual de la transformación, la versión presentada fue la siguiente:

"Girar la figura a lo largo de la circunferencia de centro O y radio r=OP, cada uno de los puntos (un cierto ángulo)"

Al observar su trabajo, fue conveniente hablar con el salón sobre el problema técnico de usar la palabra *"girar"* en la definición. Además, una observación puntual para el estudiante fue la sugerencia de sustituir el papel de la circunferencia por las propiedades que avalan su inclusión en la definición. El estudiante "E"[8], añadió las observaciones sugeridas para el caso C y presentó la siguiente versión:

"Mover la figura un ángulo α respecto a un punto O, respetando las distancias entre los puntos de la figura y O"

El caso C compartió la versión del estudiante E, entonces les fue solicitada una versión formal de su definición, usando la siguiente oración: *"¿Cómo creen que aparecería en un libro de geometría?, de los usados en la licenciatura"*, los estudiantes se sentaron juntos por unos minutos (mientras el resto de compañeros hablaba de sus definiciones) y presentaron la siguiente definición para el consenso del salón:

"Sean F, O y α. F' será una rotación de F con respecto a O, si: ∀ P∈F entonces OP=OP' y α es igual al ángulo entre los segmentos OP y OP'"

Con el afán de aprovechar el avance presentado en la definición, se les dio la

[8] El caso E no se encuentra dentro de los casos seleccionados por su constante inasistencia, pero tuvo importantes aportaciones en el nivel 1 y 3.

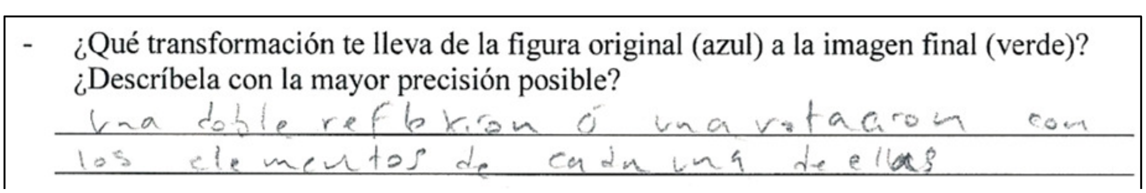
sugerencia de sustituir la afirmación sobre la igualdad de α con el ángulo formado por los segmentos por el enunciado *"$\alpha=POP'$"*, la propuesta no resultó problemática y se aprobó como versión grupal. Un par de observaciones sobre la definición sugerida son: La biyección de la transformación no es contemplada y la falta de información sobre el punto P' (interpretado como la imagen del punto P bajo la transformación), este último cumple el rol central en el enunciado. La definición cuenta con una justificación aparentemente formal transformativa, pero con carencias de estructura, como la afirmación de existencia de P'. Una versión corregida implica usar la existencia de P' como criterio para cumplir con el enunciado ($\forall P \in F$ *entonces* $\exists P'$*, tal que* $OP=OP'$ *y* $\alpha=POP'$).

Un escenario similar se dio durante la definición grupal de reflexión, en este caso el estudiante incorporó la estrategia de construcción de reflexiones; al incluir un punto auxiliar "X" formado por la intersección entre el eje de reflexión y el segmento PP' (donde P' es la imagen de P bajo la transformación). Por cuestiones de tiempo, se le solicitó para el día siguiente una versión más económica de su definición, e influenciado por el trabajo en la rotación, presentó lo siguiente:

"Sean F y l. F' será una reflexión de F con respecto a l, si:
$\forall P \in F$ entonces $d(l,P)=d(l,P')$ y $l \perp PP'$"

La estructura formal de la definición no es completa (de manera similar a la presentada en la construcción de la definición de rotación), pero representa un acercamiento significativo, con influencias más apegadas a un experimento mental transformativo.

La hoja de trabajo 11, también capturó un buen desempeño del estudiante durante las fases 2 y 3; realizando exploraciones sistemáticas que le facilitaron la generación de conjeturas y modificaciones constantes para perfeccionar su redacción.


- ¿Qué transformación te lleva de la figura original (azul) a la imagen final (verde)? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

Una doble reflexion ó una rotacion con los elementos de cada una de ellas

- En el mismo archivo, experimenta cuando los ejes de reflexión son paralelos, activando la celda "Recta paralela`" (este botón limita las posiciones de la recta de color verde, permitiendo sólo rectas paralelas al eje de reflexión rojo y que pasan por el punto C). ¿Qué isometría trasforma la figura F en F''? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

es una doble reflexion o una traslación con los elementos necesarios para cada una de ellas.

Fig. ***N3.C.13***

La pregunta relaciona con la composición de reflexiones fue respondida apropiadamente y durante la discusión grupal fue el segundo en compartir sus respuestas (el caso B fue su antecesor) y logró precisar su respuesta (en cuanto al centro de giro y el ángulo de rotación). El enunciado completo, redactado por el estudiante en el pizarrón, durante la discusión grupal, fue el siguiente:

> *"La composición de reflexiones con ejes no paralelos, son una rotación con centro de giro en el cruce de los ejes y un ángulo de rotación igual al doble del formado por los ejes de reflexión."*

Para redactar la versión final, fue necesaria la medición de los distintos ángulos que aparecen en un archivo GeoGebra, diseñado para la exploración y discusión de dudas tales como: *¿Dónde se encuentra el centro de giro? ¿Existe uno distinto al anterior? ¿Por qué? ¿Cuál es el valor de α para este caso?,* etc.

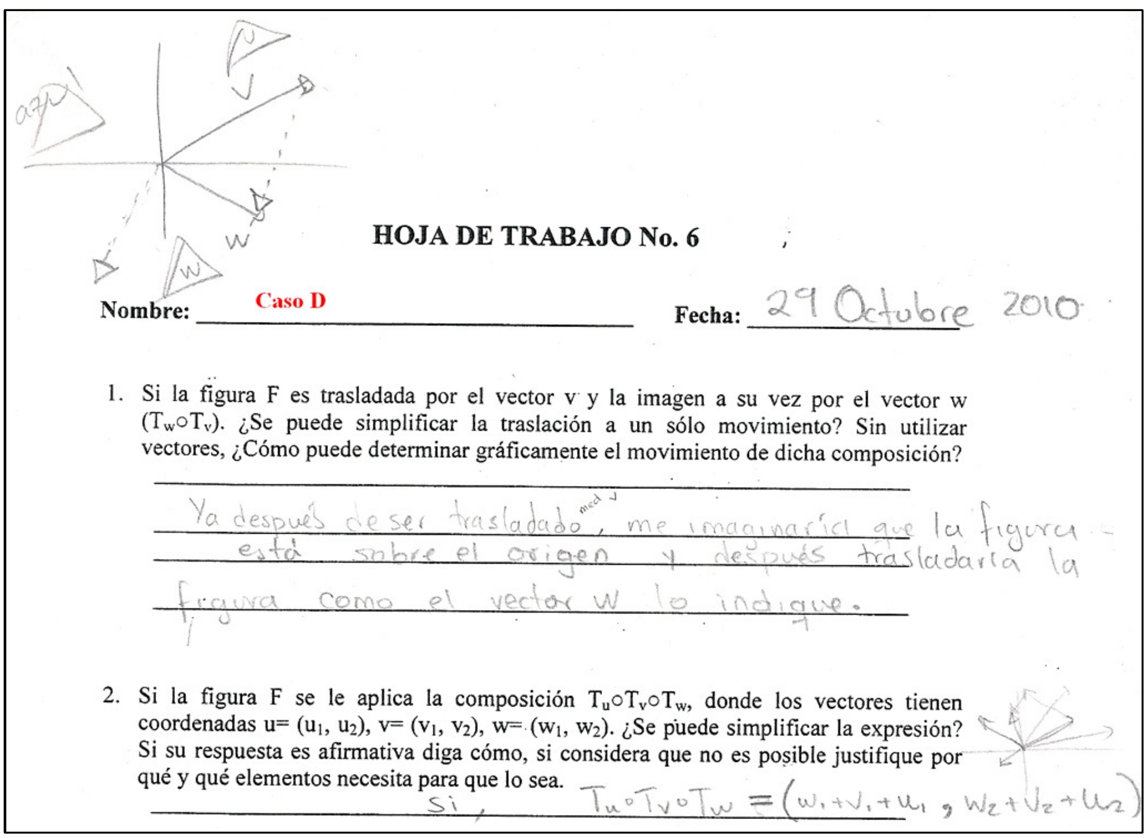
La conjetura sobre la composición de reflexiones con ejes paralelos, no fue redactada por el estudiante, pero se involucró en la redacción al realizar sugerencias constantes (apoyando al caso B). Las comprobaciones que realizó para justificar ambas afirmaciones fue la medición de segmentos, ángulos y consideraciones perceptivas.

El estudiante mostró disposición para abordar las problemáticas del nivel, sus respuestas muestran exploraciones concretas y un arraigo de estrategias personales. Tuvo mayor participación durante la fase de explicitación y realizó aportaciones significativas para el avance de la discusión grupal. Las categorías de demostración fueron inductivas con ejemplos genéricos, experimento mental transformativo y algunos intentos de construir una afirmación formal transformativa, las justificaciones de este estilo resultaron incompletas y el estudiante utilizó las pruebas que domina para compensar las limitantes.

Las definiciones son presentadas como construcciones puntuales, pero en ocasiones los enunciados resultaron poco económicos. Las actividades adicionales asignadas al estudiante, relacionadas con la economía de las definiciones, fueron abordadas apropiadamente, ya que modificó sustancialmente sus respuestas.

El estudiante cumple con los requerimientos del nivel, siendo capaz de describir nuevas propiedades a partir de otras ya conocidas (informalmente) y construir definiciones aceptables. Las habilidades mostradas lo convierten en candidato para realizar la hoja de trabajo 12 (correspondiente al cuarto nivel de Van Hiele) y no sólo alel examen, como los casos A y B.

Caso D:



HOJA DE TRABAJO No. 6

Nombre: Caso D Fecha: 29 Octubre 2010

1. Si la figura F es trasladada por el vector v y la imagen a su vez por el vector w ($T_w \circ T_v$). ¿Se puede simplificar la traslación a un sólo movimiento? Sin utilizar vectores, ¿Cómo puede determinar gráficamente el movimiento de dicha composición?

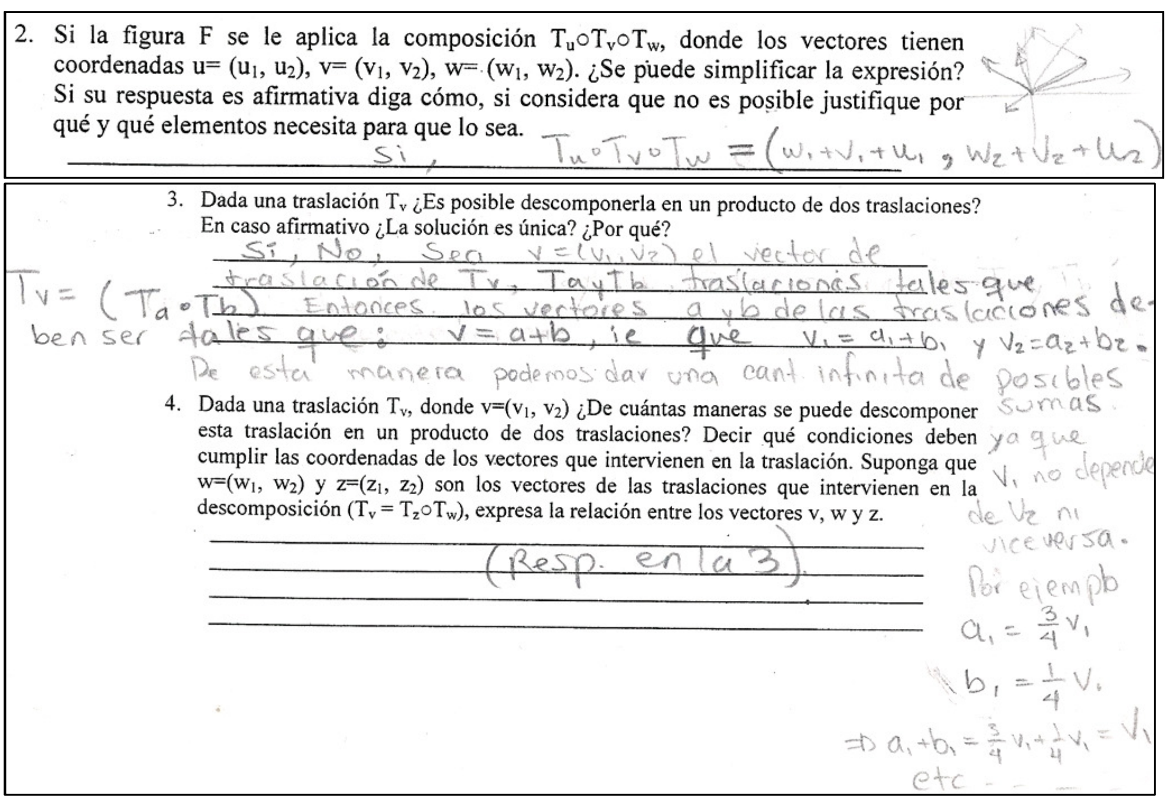
Ya después de ser trasladado, me imaginaría que la figura está sobre el origen y después trasladaría la figura como el vector w lo indique.

2. Si la figura F se le aplica la composición $T_u \circ T_v \circ T_w$, donde los vectores tienen coordenadas u= (u_1, u_2), v= (v_1, v_2), w= (w_1, w_2). ¿Se puede simplificar la expresión? Si su respuesta es afirmativa diga cómo, si considera que no es posible justifique por qué y qué elementos necesita para que lo sea.

Si, $T_u \circ T_v \circ T_w = (w_1+v_1+u_1,\ w_2+v_2+u_2)$

Fig. ***N3.D.1***

De acuerdo a la respuesta de la pregunta 1 (sobre la composición de traslaciones), el estudiante muestra una confusión distinta a la observada en el resto de sus compañeros, el caso D asocia la palabra *"movimiento"* con una descripción de la composición en términos de los deslizamientos asociados a cada vector (con consideraciones adicionales como el acomodo de los vectores y las figuras involucradas, con el fin de precisar la instrucción), para responder a la pregunta, el estudiante apoyó su construcción en el dibujo que aparece en la parte superior izquierda de la página (donde reproduce la información del archivo utilizado en la hoja de trabajo anterior y rescata información del mismo). En la pregunta No. 2, en cambio, aprovecha la herramienta de vectores para justificar el producto de la composición de traslaciones y utiliza su estrategia para replicar la respuesta del Caso "C" (influyendo de manera positiva en el rendimiento de este último, con la distinta información mencionada).



2. Si la figura F se le aplica la composición $T_u \circ T_v \circ T_w$, donde los vectores tienen coordenadas u= (u_1, u_2), v= (v_1, v_2), w= (w_1, w_2). ¿Se puede simplificar la expresión? Si su respuesta es afirmativa diga cómo, si considera que no es posible justifique por qué y qué elementos necesita para que lo sea.

Si, $T_u \circ T_v \circ T_w = (w_1 + v_1 + u_1 , w_2 + v_2 + u_2)$

3. Dada una traslación T_v ¿Es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo ¿La solución es única? ¿Por qué?

Si, No, Sea $v = (v_1, v_2)$ el vector de traslación de T_v, T_a y T_b traslaciones tales que $T_v = (T_a \circ T_b)$. Entonces los vectores a y b de las traslaciones deben ser tales que: $v = a + b$, ie que $v_1 = a_1 + b_1$ y $v_2 = a_2 + b_2$. De esta manera podemos dar una cant. infinita de posibles sumas. ya que v_1 no depende de v_2 ni viceversa. Por ejemplo $a_1 = \frac{3}{4} v_1$, $b_1 = \frac{1}{4} v_1$ $\Rightarrow a_1 + b_1 = \frac{3}{4} v_1 + \frac{1}{4} v_1 = v_1$ etc...

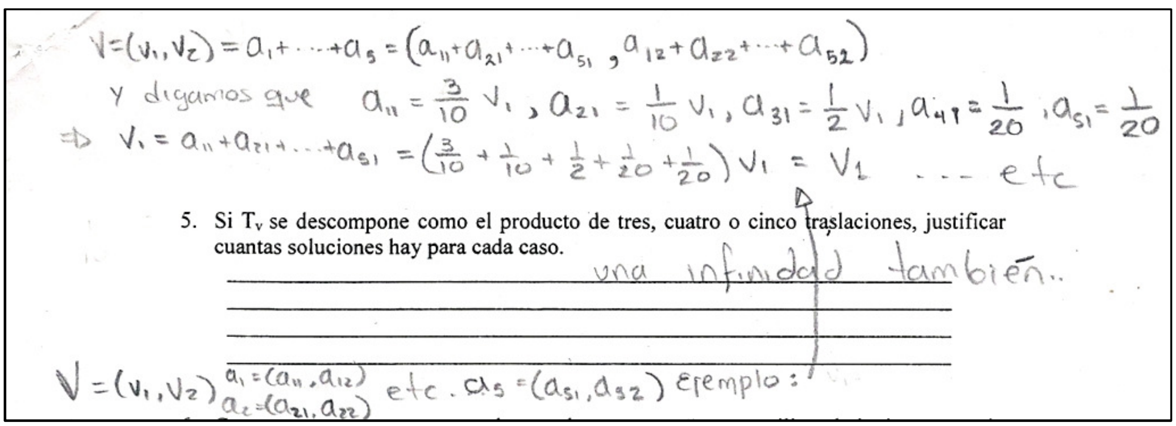
4. Dada una traslación T_v, donde $v=(v_1, v_2)$ ¿De cuántas maneras se puede descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores que intervienen en la traslación. Suponga que $w=(w_1, w_2)$ y $z=(z_1, z_2)$ son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_z \circ T_w$), expresa la relación entre los vectores v, w y z.

(Resp. en la 3)

Fig. ***N3.D.2***

Considerando su trabajo anterior, el estudiante sigue utilizando a los vectores y sus propiedades para justificar sus observaciones. Las pruebas manejadas por el caso D, parten de métodos perceptivos y culminan en justificaciones deductivas (en la parte superior derecha observamos un dibujo de apoyo, utilizado para justificar la afirmación de las preguntas 2, 3 y 4).

Los argumentos presentados en la hoja de trabajo sugieren una categoría de demostración “formal transformativa”; ya que parten de la definición de traslación declarada por el estudiante en las distintas oportunidades (de manera implícita) e infiere conclusiones sin apoyarse en ejemplos (al menos en la mayoría de los casos). Sin embargo, las justificaciones no alcanzan la condición de “Axiomática” por la abstracción parcial que muestra al realizar trazos de apoyo o dibujos para plantear las afirmaciones complejas.



$V=(v_1,v_2)=a_1+\cdots+a_5=(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{51},\ a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{52})$

y digamos que $a_{11}=\frac{3}{10}v_1,\ a_{21}=\frac{1}{10}v_1,\ a_{31}=\frac{1}{2}v_1,\ a_{41}=\frac{1}{20},\ a_{51}=\frac{1}{20}$

$\Rightarrow v_1=a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{51}=\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)v_1=v_1$ ... etc

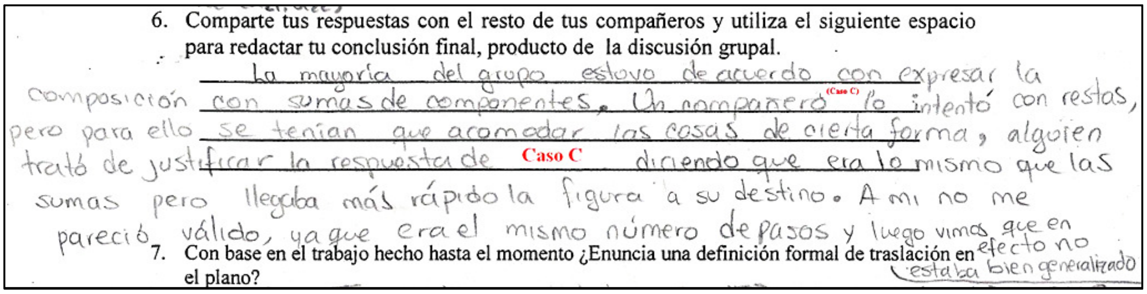
5. Si T_v se descompone como el producto de tres, cuatro o cinco traslaciones, justificar cuantas soluciones hay para cada caso.

una infinidad también..

$V=(v_1,v_2)$ $a_1=(a_{11},a_{12})$ $a_2=(a_{21},a_{22})$ etc. $a_5=(a_{51},a_{52})$ ejemplo:

Fig. ***N3.D.3***

El estudiante responde de manera general en las preguntas que así lo solicitan; particularmente en la respuesta 3, la justificación es tan amplia que su conclusión se usa como referencia para las preguntas siguientes.



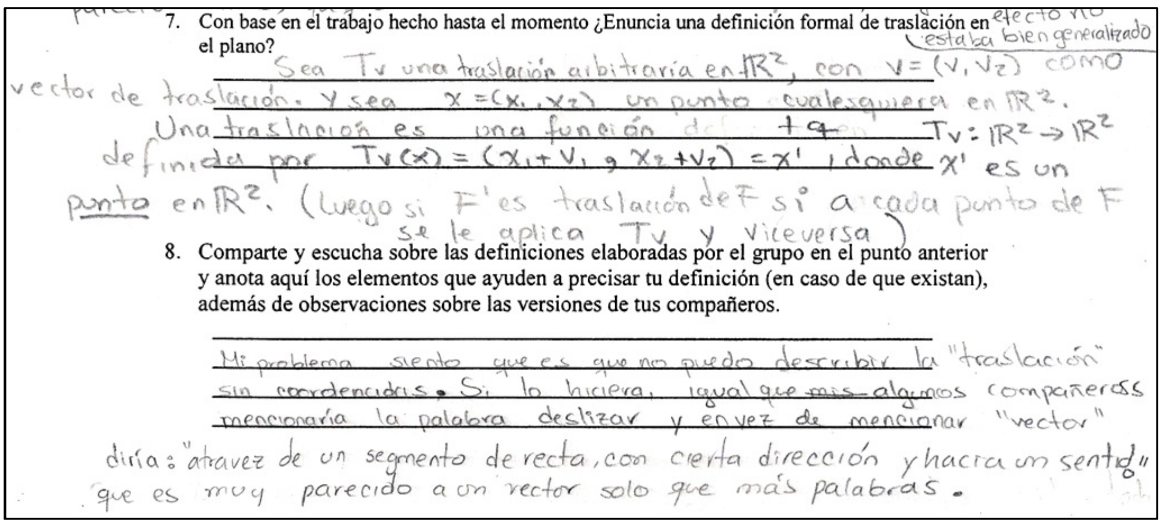
6. Comparte tus respuestas con el resto de tus compañeros y utiliza el siguiente espacio para redactar tu conclusión final, producto de la discusión grupal.

La mayoría del grupo estuvo de acuerdo con expresar la composición con sumas de componentes. Un compañero (Caso C) lo intentó con restas, pero para ello se tenían que acomodar las cosas de cierta forma, alguien trató de justificar la respuesta de Caso C diciendo que era lo mismo que las sumas pero llegaba más rápido la figura a su destino. A mi no me pareció válido, ya que era el mismo número de pasos y luego vimos que en efecto no estaba bien generalizado

7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

Fig. ***N3.D.4***

Aunque el estudiante no deja de lado las actividades solicitadas, muestra una influencia en su respuesta por parte del caso C; al grado de compartir su versión de la discusión grupal (ya mencionada en los apartados anteriores).



7. Con base en el trabajo hecho hasta el momento ¿Enuncia una definición formal de traslación en el plano?

Sea T_v una traslación arbitraria en $\mathbb{R}^2$, con $v = (v_1, v_2)$ como vector de traslación. Y sea $x = (x_1, x_2)$ un punto cualesquiera en $\mathbb{R}^2$. Una traslación es una función [illegible] tq $T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_v(x) = (x_1 + v_1, x_2 + v_2) = x'$, donde x' es un punto en $\mathbb{R}^2$. (Luego si F' es traslación de F si a cada punto de F se le aplica T_v y viceversa)

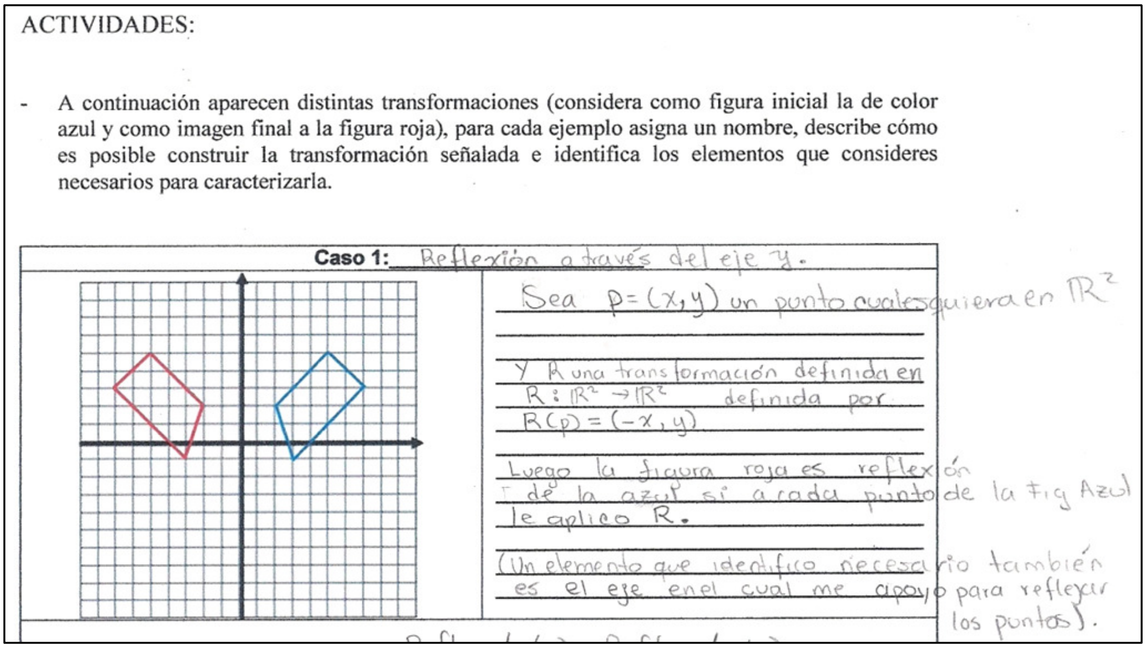
8. Comparte y escucha sobre las definiciones elaboradas por el grupo en el punto anterior y anota aquí los elementos que ayuden a precisar tu definición (en caso de que existan), además de observaciones sobre las versiones de tus compañeros.

Mi problema siento que es que no puedo describir la "traslación" sin coordenadas. Si lo hiciera, igual que ~~más~~ algunos compañeros mencionaría la palabra deslizar y en vez de mencionar "vector" diría: "a través de un segmento de recta, con cierta dirección y hacia un sentido" que es muy parecido a un vector solo que más palabras.

Fig. ***N3.D.5***

El caso D redacta una definición de traslación con un lenguaje formal, que considera las observaciones planteadas durante las sesiones anteriores y la siguiente (posterior a las discusiones grupales de la hoja de trabajo). Incluyendo, no sólo su respuesta, sino que además plantea los problemas percibidos en las versiones de sus compañeros. Las respuestas 7 y 8, muestran la importancia que el estudiante asigna al vector de traslación en la redacción de la definición y un intento de construir una definición equivalente con el uso de las coordenadas del vector (aunque el mismo estudiante percibe una versión descriptiva de los vectores, que mantiene las propiedades necesarias en la definición).

Las estrategias utilizadas en las justificaciones, muestran conclusiones directas a partir de las propiedades conocidas de la transformación (deductivas) y planteando un escenario general (descartando ejemplos concretos), lo cual es suficiente para asignar una categoría de demostración "formal transformativa".


ACTIVIDADES:

- A continuación aparecen distintas transformaciones (considera como figura inicial la de color azul y como imagen final a la figura roja), para cada ejemplo asigna un nombre, describe cómo es posible construir la transformación señalada e identifica los elementos que consideres necesarios para caracterizarla.

Caso 1: Reflexión a través del eje y.

Sea $p=(x,y)$ un punto cualesquiera en $\mathbb{R}^2$

Y R una transformación definida en $R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $R(p) = (-x, y)$

Luego la figura roja es reflexión de la azul si a cada punto de la Fig Azul le aplico R.

(Un elemento que identifico necesario también es el eje en el cual me apoyo para reflejar los puntos).

Fig. ***N3.D.6***

Para responder a la siguiente hoja de trabajo, el estudiante utiliza un lenguaje funcional (presentando, en algunos casos, la "regla de correspondencia" que vincula la figura original y su imagen). En el caso 1, lo define como una reflexión y menciona al **eje de reflexión** como *"un elemento necesario"* para elaborar la construcción (equivalente al papel de los vectores en la construcción de traslaciones). Las justificaciones parten de exploraciones perceptivas, pero se presentan con una apariencia deductiva; todo esto surgió al reorganizar la información recopilada en la fase 2 con la construcción **función** analítica que vincula a las figuras del cuadro presentado.

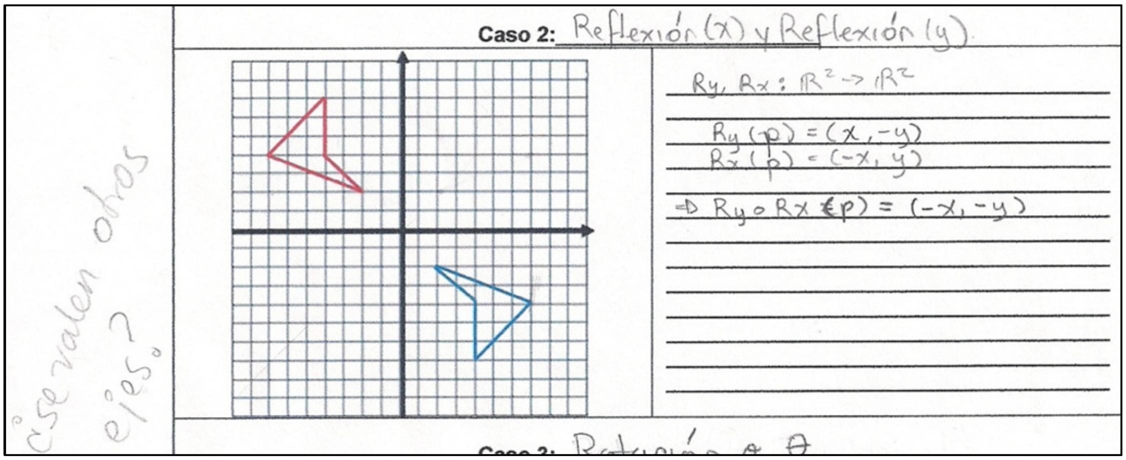


Fig. ***N3.D.7***

Para el “caso 2” se percibió un adelanto considerable en cuanto a la organización de las actividades; en la imagen presentada aparece una rotación de 180º con centro de giro en el origen, la mayoría de los estudiantes percibió la transformación con este modelo (o muy cercano a él), el caso D en contraparte, describió la transformación como una composición de reflexiones (donde los ejes de reflexión son los ejes cartesianos) y redacta en la parte izquierda de la hoja una interrogante personal: “*¿Se valen otros ejes?*” haciendo alusión a ejes de reflexión distintos a los ejes del plano; tal interrogante fue compartida durante la discusión grupal y el estudiante concluyó que “*los ejes deberían estar a 90º*”. Cuando se le pregunto sobre el efecto de no tener ángulos rectos entre los ejes de reflexión no logró concretar una respuesta.

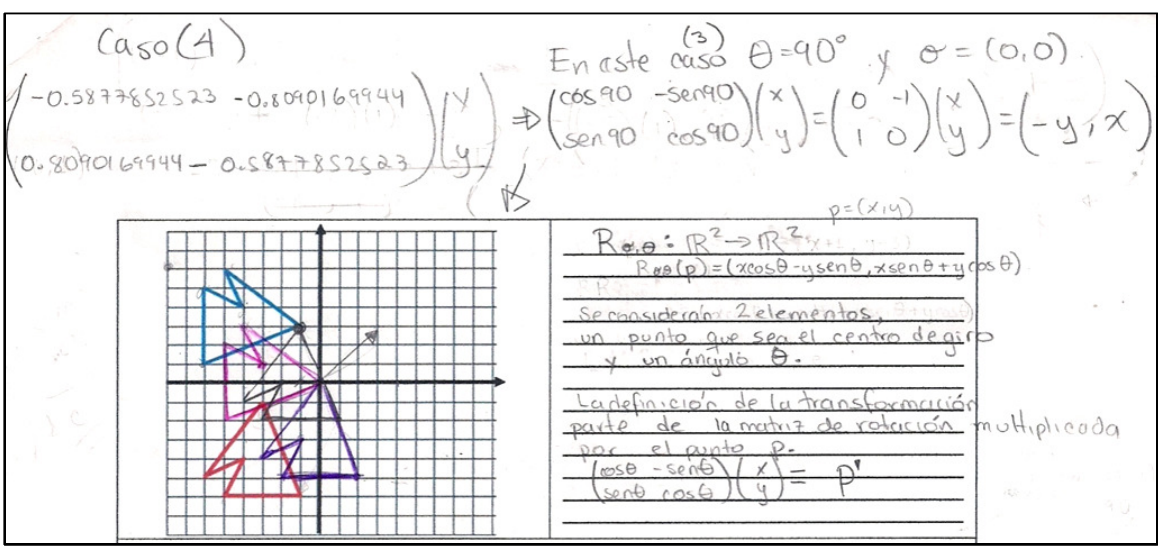


Fig. ***N3.D.8***

Para resolver los casos 3 y 4 utiliza las matrices de rotación como método de justificación; aunque originalmente realiza las exploraciones con herramientas perceptivas. El caso 3, particularmente, muestra un primer intento de manipulación de las figuras dentro del plano (respaldado con construcciones intuitivas) e incluso explica la trasformación durante la discusión grupal mediante la composición de una rotación y una traslación (en el plano aparece un vector auxiliar que representa la traslación tentativa), este acercamiento fue desechado por el estudiante y optó por usar la matriz de rotación en los casos siguientes (la explicación con matrices aparece en la parte superior de la hoja, respondiendo a los casos 3 y 4).

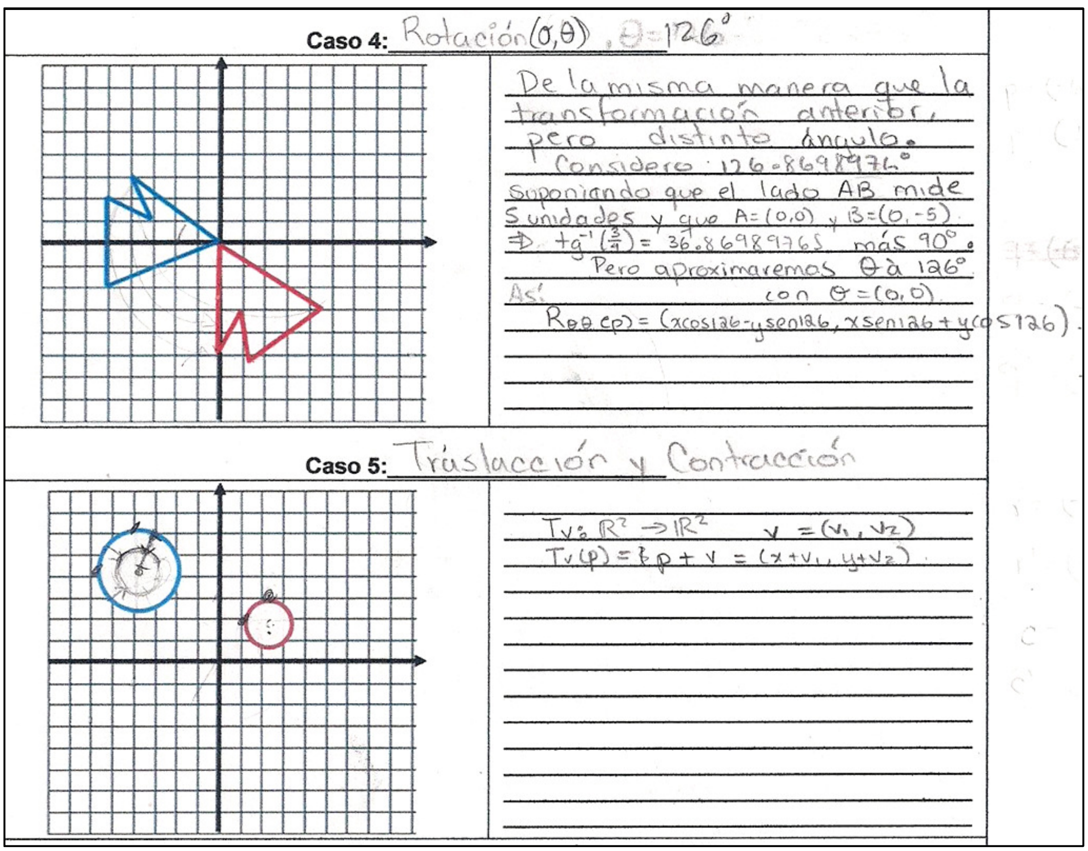
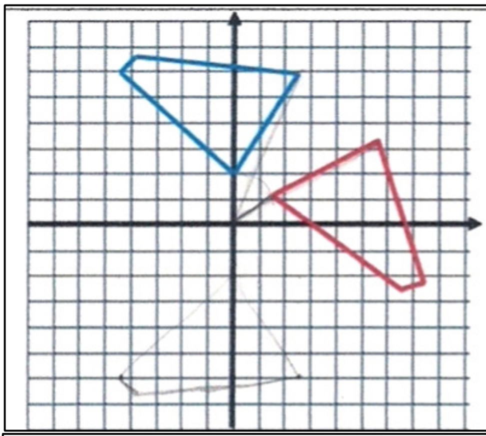


Fig. ***N3.D.9***

Para el caso 4 realiza mediciones de lados claves del polígono, con la intención de identificar el ángulo de rotación y generaliza la observación a la figura completa; los cálculos que aparecen en los renglones los utiliza para justificar el por qué del ángulo utilizado en la matriz de rotación. El primer argumento que aparece en la transformación es de tipo perceptivo, ya que se deduce el ángulo de 126º a partir de la selección de vértices aparentes del polígono y el cálculo de las pendientes de las rectas que los contienen, completando la respuesta con la presentación de la transformación de manera analítica a partir del trabajo sobre la matriz de rotación. La organización de las pruebas elaboradas, se interpretan como una demostración transformativa de experimento mental; donde se realiza una conversión del ambiente geométrico al analítico, con una referencia de peso sobre los segmentos de la figura presentada y culminando en la matriz de rotación declarada como pilar del argumento.

Para el caso 5, la representa como la composición de una traslación y una contracción (en ese orden), pero sus dudas y comentarios durante la fase 3 mostraron poca claridad sobre los elementos requeridos, incluso deja incompleta su respuesta final en la hoja de trabajo.



De la misma manera que el caso 3 y 4
Con aproximadamente un
$45° < \theta < 90°$
y tmb aprox en $\theta = (0,0)$.

Una característica fundamental de la traslación es que respeta tamaño y forma ¿Qué otras transformaciones conservan estas propiedades?

la rotación y la reflexión (y las composiciones de éstas)

Discute con tus compañeros sobre sus respuestas en el punto anterior y anota aquí tus conclusiones

Hubo una compañera que se quedó con la idea de que todo se hacía con vectores (ya que hicimos mucho enfásis en la T de traslación).

Investiga el nombre de las trasformaciones en el plano que respetan el tamaño y la forma. 110.

Traslación, Giro o Rotación, Simetría Axial, y la Simetría con Deslizamiento que como mencioné anteriormente, las composiciones también preservan tamaño y forma.

Fig. ***N3.D.10***

La última transformación permite observar una confusión en el caso 6 y donde, de manera similar al caso C, el estudiante no percibe el cambio de orientación de la figura y redacta en su versión final una rotación erróneamente. Las respuestas describen la impresión del trabajo del caso A y una explicación plausible del por qué de su rendimiento *("una compañera que se quedó con la idea de que todo se hacía con vectores")*. La respuesta final fue obtenida de internet durante la fase 3 y, contrario a sus compañeros, incluye la **reflexión con deslizamiento**; refiriéndose a ella como "*simetría con deslizamiento*".

Ya conoces el software GeoGebra, haz uso de él para responder las siguientes preguntas:

1.- Abre el archivo "Rotación 1" y manipula los elementos que aparecen ¿Cuáles es la relación entre los objetos del archivo (Figura azul, Figura roja, Punto O y Ángulo α)?

La figura roja es la transformación de la azul bajo la Transf de Rotación, y el ángulo α nos dice el ángulo que se usa en la rotación para obtener P'

- Selecciona la casilla "Punto e imagen", aparecerán dos puntos (P y su homólogo P' bajo la transformación) y los segmentos que unen a cada uno con el punto O. Mide las distancias de los segmentos OP y OP' con la herramienta "distancia o longitud" del menú de herramientas de GeoGebra. ¿Cuál es la relación entre las distancias de los segmentos OP y OP'?.

OP = 17 , OP' = 17 Son las mismas,
OP = 24 , OP' = 24 Así, OP = OP' y podríamos decir que O es el centro de una circunferencia de radio r = OP = OP' donde P y P' son puntos de la circunferencia

- Verifica para otras posiciones del punto P ¿Sucede lo mismo para los demás puntos con los cuales experimentaste anteriormente? Sí Anota tus observaciones:

2.- Selecciona la casilla "Marcar ángulo" ¿Qué elemento aparece? ¿Cómo se relaciona con el ángulo α?

Aparece una sombra roja indicando el ángulo α que hay entre POP'

- Verifica para otras posiciones del punto P y para distintos ángulos α ¿Mantienes tu respuesta anterior? Sí Anota tus observaciones:

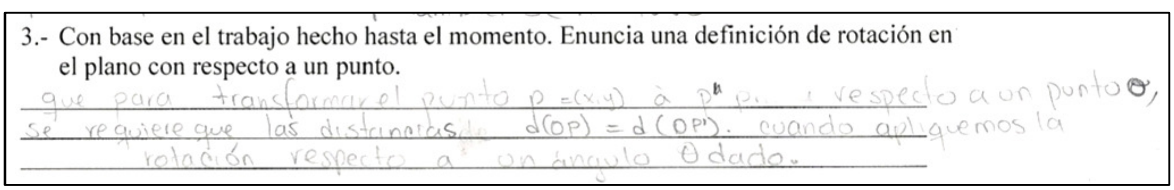
Incremento la sombra entre POP' cuando aumente α en la fig auxiliar (la circunferencia.) y ~~para~~ después de mover P también se mantuvo α.

Fig. ***N3.D.11***

Las observaciones de la hoja de trabajo 8 las podemos resumir a la relación de una circunferencia ***imaginaria*** con la transformación de rotación; lo cual aparece implícitamente en el segundo inciso de la pregunta 1, donde el estudiante elabora la siguiente conjetura:

> *"OP=OP'. Así que podríamos decir que O es el centro de una circunferencia de radio r=OP=OP' donde P y P' son puntos de la circunferencia"*

Reconsiderando lo solicitado en la pregunta 2, el estudiante explica la congruencia de los segmentos formados por OP y OP' mediante la construcción de la circunferencia, considerando a la rotación como un movimiento a través de circunferencias de distinto radio (una estrategia muy similar a la utilizada por el estudiante "C"). Aunque la conclusión es antecedida por mediciones concretas de segmentos, éstas parecieran solo ser utilizadas como recurso de exploración; ya que considerando la conclusión, las mediciones son explicadas como "*aparentes*" propiedades de la transformación, es por ello que la categoría de demostración asignada es deductiva de experimento mental.

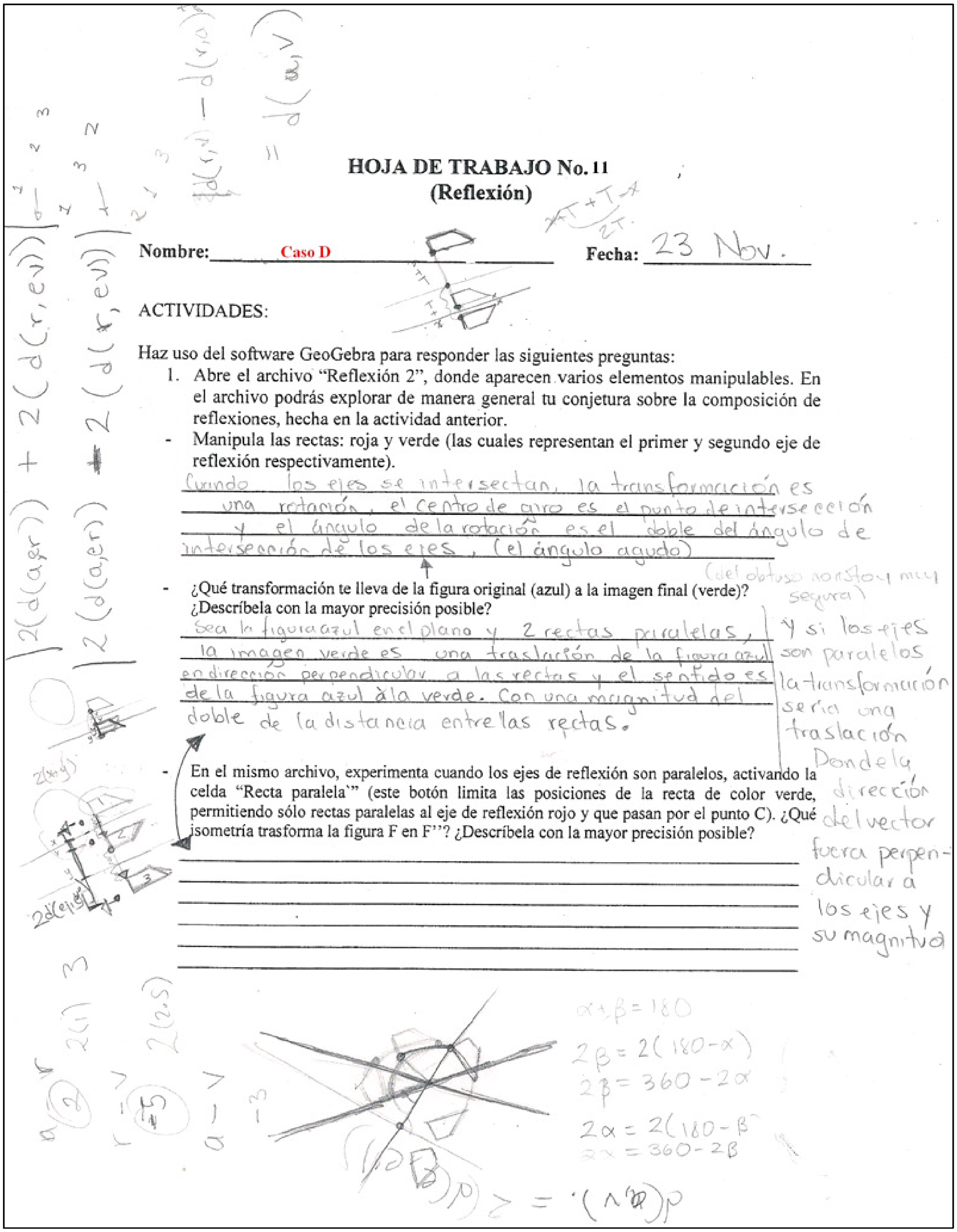

3.- Con base en el trabajo hecho hasta el momento. Enuncia una definición de rotación en el plano con respecto a un punto.

que para transformar el punto P =(x,y) a P' respecto a un punto O, se requiere que las distancias d(OP) = d(OP'). cuando apliquemos la rotación respecto a un ángulo θ dado.

Fig. ***N3.D.12***

La pregunta final solicita una definición de la transformación, donde el alumno menciona la condición de equidistancia de los puntos homólogos y el centro de giro, pero sin incluir información sobre el ángulo de rotación, ni su papel en la transformación. Las siguientes sesiones, donde se comparten y discuten las definiciones de rotación y reflexión no contaron con la participación del caso D (por inasistencia).

Como consideraciones del escenario para la resolución de la hoja de trabajo 11, el estudiante llegó tarde al inicio de la sesión y contó con poco tiempo para construir las conjeturas, al grado de no concretarlas; es por ello que las respuestas presentadas fueron elaboradas al final de la discusión grupal y no a la par de sus compañeros. En cuanto al papel del estudiante durante la fase 3, fue bastante activo y sus intervenciones se orientaron a aportar algunas propiedades que observaba durante la exploración grupal (particularmente en el caso de reflexiones con ejes paralelos) y precisar las respuestas de sus compañeros (considerando posibles contraejemplos de sus afirmaciones). La hoja de trabajo presentada fue la siguiente:



HOJA DE TRABAJO No. 11
(Reflexión)

Nombre: Caso D Fecha: 23 Nov.

ACTIVIDADES:

Haz uso del software GeoGebra para responder las siguientes preguntas:

1. Abre el archivo "Reflexión 2", donde aparecen varios elementos manipulables. En el archivo podrás explorar de manera general tu conjetura sobre la composición de reflexiones, hecha en la actividad anterior.

- Manipula las rectas: roja y verde (las cuales representan el primer y segundo eje de reflexión respectivamente).

Cuando los ejes se intersectan, la transformación es una rotación, el centro de giro es el punto de intersección y el ángulo de la rotación es el doble del ángulo de intersección de los ejes, (el ángulo agudo)

(del obtuso no estoy muy segura)

- ¿Qué transformación te lleva de la figura original (azul) a la imagen final (verde)? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

Sea la figura azul en el plano y 2 rectas paralelas, la imagen verde es una traslación de la figura azul en dirección perpendicular a las rectas y el sentido es de la figura azul a la verde. Con una magnitud del doble de la distancia entre las rectas.

Y si los ejes son paralelos la transformación sería una traslación Donde la dirección del vector fuera perpendicular a los ejes y su magnitud

- En el mismo archivo, experimenta cuando los ejes de reflexión son paralelos, activando la celda "Recta paralela`" (este botón limita las posiciones de la recta de color verde, permitiendo sólo rectas paralelas al eje de reflexión rojo y que pasan por el punto C). ¿Qué isometría trasforma la figura F en F''? ¿Descríbela con la mayor precisión posible?

$\alpha + \beta = 180$

$2\beta = 2(180 - \alpha)$

$2\beta = 360 - 2\alpha$

$2\alpha = 2(180 - \beta)$

$2\alpha = 360 - 2\beta$

Fig. ***N3.D.13***

Para analizar las actividades realizadas, el interés se concentra en el significado de los “garabatos” que aparecen alrededor de las respuestas planteadas (considerando a éstas últimas como el producto terminado de la exploración). Así que a continuación se reorganizan e interpretan elementos auxiliares utilizados por el estudiante.

Dado que las respuestas se redactaron durante la discusión grupal, la construcción de figuras y cálculos se convierten en un intento de validar las conjeturas elaboradas durante la sesión. Durante la fase 3, el estudiante declaró que cuando los ejes de reflexión son paralelos entonces la composición es “*una traslación*”; pero se mostró incrédulo ante su propia afirmación y cuestionándola, como estrategia de exploración optó por hacer un análisis por casos (usando como criterio la posición de la figura original y su imagen con respecto a los ejes de reflexión).

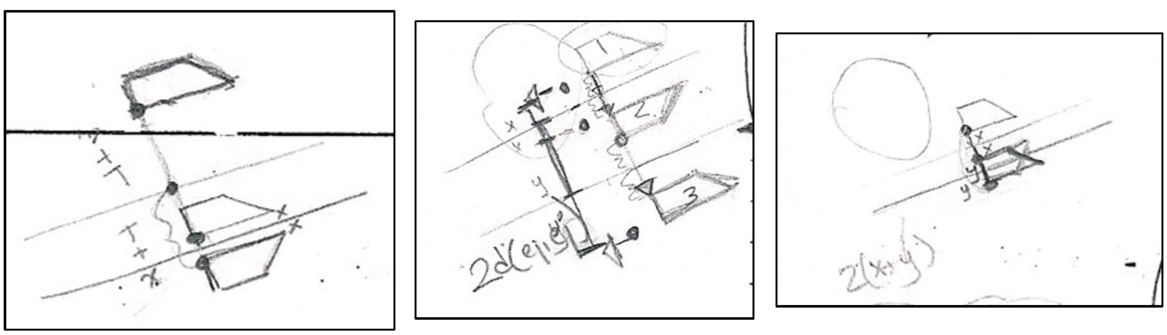


Fig. ***N3.D.14***

En las comprobaciones con herramientas del plano sintético, se relaciona los puntos homólogos de las reflexiones (mediante la equidistancia al eje de reflexión) y las diferencias entre las tres construcciones muestran una selección de casos; en el primer cuadro aparece la imagen inicial entre los ejes de reflexión, en un segundo intento se construye por encima de ambos ejes y en el cuadro final aparece un caso extremo al sobreponer la imagen con respecto al primer eje de reflexión. En los tres escenarios realiza las comparaciones de las medidas y, no conforme con la exploración, realiza intentos de justificación en el registro analítico.

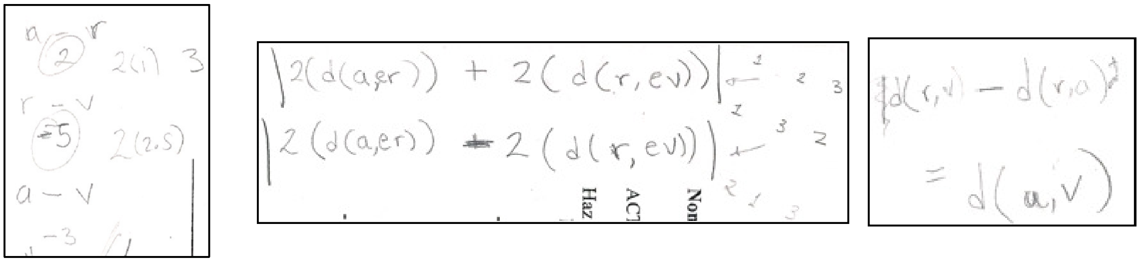


Fig. ***N3.D.15***

En los cuadros siguientes se realizan cálculos algebraicos para longitudes específicas (primer cuadro) y son utilizados para reorganizar los distintos acomodos de las transformaciones. En la imagen central aparecen tres triadas de números, los cuales representan el acomodo de las figuras, señalando el orden de las transformaciones. En el cuadro final aparece la conclusión de "*d(v,r)-d(v,a)=d(a,v)*" y es consecuencia de un error en el acomodo de la información. Al margen de los resultados, es notorio el cambio de rol en cuanto a la función de la demostración (al menos al utilizado por el estudiante en las actividades anteriores). Las características de las justificaciones no permiten asignar una categoría de demostración deductiva con experimento mental transformativa.

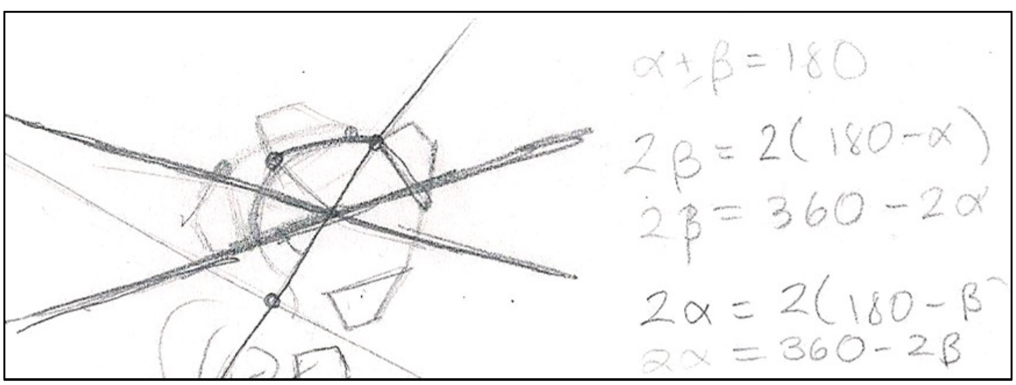


Fig. ***N3.D.16***

Para la composición de reflexiones con ejes no paralelos realiza una comprobación de experimento mental transformativa. Con el fin de facilitar la construcción marca la circunferencia auxiliar (mencionada en la hoja de trabajo 8), pero la relación de los ángulos que utiliza como punto de partida no le permite avanzar de manera significativa en la prueba.

Como resumen del desempeño del estudiante, se observan exploraciones y demostraciones inductivas con ejemplos genéricos, experimento mental transformativo (con mayor recurrencia) y deductivas formales transformativas. Aunque la construcción de definiciones no fue completada, el estudiante presenta construcciones puntuales como guía y enunciados económicos, además de la transformación de definiciones incorrectas en correctas. Las respuestas y las habilidades mostradas lo convierten en candidato para darle seguimiento al nivel 4 (con la hoja de trabajo 12).

OBSERVACIONES DEL NIVEL 3

Los criterios de evaluación marcan a los estudiantes C y D como candidatos para continuar con la secuencia de actividades, en cambio los estudiantes A y B no cumplen con los requisitos del tercer nivel; por lo tanto, se opta por omitirlos como elementos de estudio para la hoja de trabajo 12. Entre las carencias de los estudiantes A y B está la construcción de definiciones poco económicas e incompletas (influenciadas por elementos preceptivos y enfoques empíricos) además de respuestas influenciadas por niveles distintos. Esto último resultó definitorio para la asignación de los subniveles.

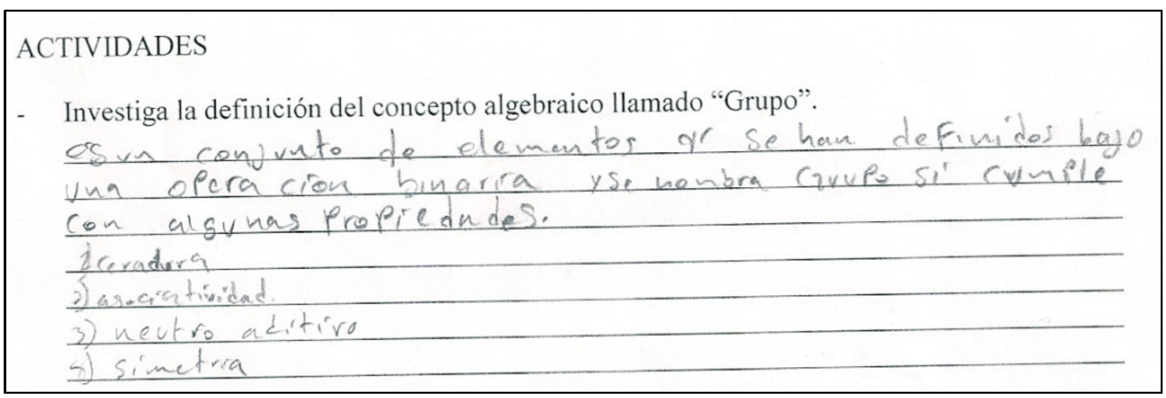
En cuanto a los estudiantes C y D, muestran un avance significativo en las técnicas de exploración y presentación de resultados, además de cumplir con los requerimientos matemáticos para la resolución de la hoja de trabajo siguiente. Una medida apropiada para la continuación de las actividades es la incorporación de herramientas analíticas para la resolución de las hojas de trabajo, razón por la cual se suspende la secuencia y durante las siguientes sesiones se abordan las transformaciones con métodos analíticos.

ANÁLISIS DEL CUARTO NIVEL DE VAN HIELE
(Hoja de trabajo No.12).

Contemplando la variedad de elementos necesarios para trabajar apropiadamente el cuarto nivel, el seguimiento de las hojas de trabajo perdió continuidad, con la intención de promover un recordatorio de elementos de álgebra lineal, álgebra moderna y geometría analítica necesarios para evaluar la estructura de grupo de las isometrías en el plano. Previo a la aplicación de la hoja de trabajo No. 12, los estudiantes trabajaron la versión analítica de las transformaciones, en el caso de la rotación se profundizó en el tema de la matriz de rotación, su construcción y las consideraciones a incluir si la rotación tiene como centro de giro a un punto distinto del origen. Otro elemento del contexto para la aplicación de la actividad es que solo fueron requeridos los estudiantes que superaron los primeros 3 niveles de Van Hiele, eso nos limita a estudiar las respuestas de 2 de los casos seleccionados (C y D).

A los estudiantes se les citó fuera del horario de clases, ambos tenían a la mano una computadora con GeoGebra instalado y acceso a internet, para realizar consultas en caso de que lo considerarán necesario.

Caso C:



ACTIVIDADES

- Investiga la definición del concepto algebraico llamado "Grupo".

es un conjunto de elementos qr se han definidos bajo una operacion binaria y se nombra Grupo si cumple con algunas propiedades.

1 cerradura
2) asociatividad
3) neutro aditivo
4) simetria

Fig. ***N4.C.1***

El estudiante confesó no recordar la definición de "Grupo", por lo cual se le permitió consultar fuentes de internet (convicción externa) y, previo a responder a la pregunta uno, revisó un par de páginas web, para después realizar su redacción.

Si consideramos a cada transformación de manera independiente (traslación, rotación y reflexión), ¿Cuáles constituyen un Grupo, con la operación composición?
Para cada transformación, justifique ampliamente su respuesta.

la traslación es un Grupo ya q' cumple con las propiedades.

rotación no ya q' no cumple la cerradura.

reflexión no ya q' no cumple con la cerradura.

Fig. ***N4.C.2***

Para cubrir lo referente a la estructura de Grupo, el estudiante se limitó a utilizar la cerradura como definitoria. Mientras que para el tipo de transformaciones que no satisfacen la cerradura bajo la composición (rotación y reflexión) manejó una estrategia de contraejemplos. El escenario contrastante, es cuando asegura que el conjunto de traslaciones forman un Grupo al evaluar solamente la propiedad de cerradura.

Para las transformaciones que no formen un grupo, define un subconjunto que si cumpla con las propiedades de grupo.

el conjunto de composición de (2n+1) reflexiones con n={0,1,2,...}.

Fig. ***N4.C.3***

El reconocimiento de estructura de grupo se evalúa en la pregunta siguiente, en la cual se solicita a los estudiantes la definición de un subconjunto de elementos, para cada transformación, donde se cumplan las condiciones de grupo. En el caso de las reflexiones, el estudiante define a:

“*Composición de (2n+1) reflexiones*”

Considerando los valores *n* como cualquier número Natural, al profundizar en la respuesta del estudiante, éste declara durante la fase 3: “*los elementos del conjunto son todas reflexiones impares de un (*con respecto a…*) eje de reflexión*” y construye su conjunto en el pizarrón; dibujando una figura inicial y la imagen de la misma después de 2 reflexiones sobre un eje particular (los objetos construidos son figuras superpuestas a la original). Las indicaciones señaladas para la construcción, muestran una confusión sobre la operación definida en el Grupo (la reflexión, en este caso) y un desconcierto en cuanto a los elementos de interés, siendo de mayor relevancia las figuras transformadas que los elementos que definen a la transformación.

Para la construcción del subconjunto de Rotaciones, el estudiante explora con ayuda de un archivo de GeoGebra, pero durante la sesión se limita a especular sobre la composición (evaluando la propiedad de cerradura) y omite una respuesta al respecto.

- Bajo la operación composición, el conjunto formado por las transformaciones isométricas (rotación, reflexión y traslación) es llamado "Grupo de isometrías". Verifica que efectivamente es un Grupo, justificando ampliamente tu respuesta.

Si ya q' la refleccion se puede ver como una traslación o una rotacion en diferentes caso. y la rotación como una doble reflexion o traslacion, y la traslación por si sola es "Grupo de isometria"

Fig. ***N4.C.4***

Para la pregunta final se solicita una justificación para el término "Grupo de Isometrías", al responderla el estudiante requiere replantear la respuesta anterior (relacionada con la composición de rotaciones) y no logra construir una respuesta aceptable. Al hablar de la composición de rotaciones menciona "*la traslación*" y "*la doble reflexión*", esta última representa una transformación no permitida en el grupo (o al menos no permite asegurar la cerradura del grupo bajo la operación composición).

Las categorías de demostración usadas para responder a las distintas actividades del nivel se pueden separar en dos conjuntos: primeramente, las inductivas de ejemplo genérico con inferencia (asumidas como fruto de las exploraciones de las hojas de trabajo anteriores) y las perceptivas, éstas últimas usadas al interpretar a las transformaciones como movimientos aparentes de figuras geométricas.

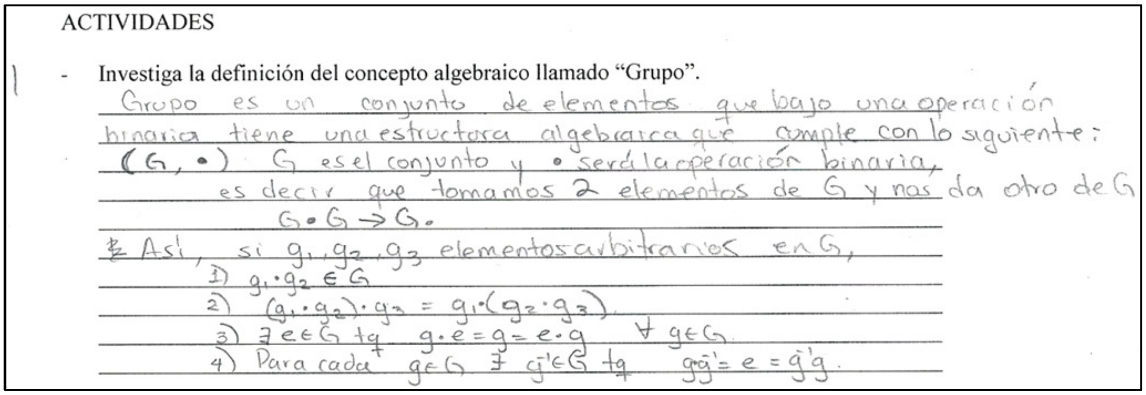
Las distintas respuestas no muestran una visión estructural de las transformaciones; el estudiante se limita a explorarlas con el apoyo de figuras concretas, no permitiendo concebirlas como objetos independientes con respecto a los elementos que transforman. Durante la fase 3 el estudiante mostró confusiones relacionadas con ésa visión estructural, particularmente en el inciso 3; donde se solicita la construcción independiente de subgrupos para cada transformación. Cabe señalar, que en más de una ocasión fue necesario replantear las actividades en términos del efecto en las figuras. Un ejemplo relacionado con sus desconciertos se da durante la construcción del subgrupo de reflexión, donde preguntó cómo podría asegurar la existencia de un elemento neutro, dando lugar a la intervención del caso D diciéndole: *"tienes que encontrar una* ***reflexión*** *que deje inmóvil a cualquier figura en el plano"*, esta respuesta fue interpretada erróneamente y el estudiante confundió la existencia del elemento neutro con la existencia de inversos bajo la composición[9].

Las fases consecuentes fueron afectadas por las distintas confusiones acarreadas y el desempeño durante la hoja de trabajo 12 fue significativamente inferior al mostrado en los niveles antecesores, sus resultados muestran una mezcla de respuestas correctas e incorrectas; además de razonamientos y resultados escasos. Las actividades requerían la comprensión de la estructura axiomática de las transformaciones y ser capaz de realizar comprobaciones formales; sin embargo, no apareció evidencia suficiente del dominio del estudiante en tales aspectos. Por lo tanto, el desenvolvimiento del caso C indica un dominio parcial del cuarto nivel de razonamiento y, siendo congruentes con lo percibido en las respuestas, se le asigna una adquisición baja-intermedia del nivel.

Caso D:

El estudiante recurrió al uso de la máquina sólo para explorar sobre la composición de rotaciones.

[9] La conversación de los estudiantes fue indispensable para interpretar la respuesta del tercer inciso de la hoja de trabajo 12; considerando que la redacción resultó insuficiente y poco ilustrativa.



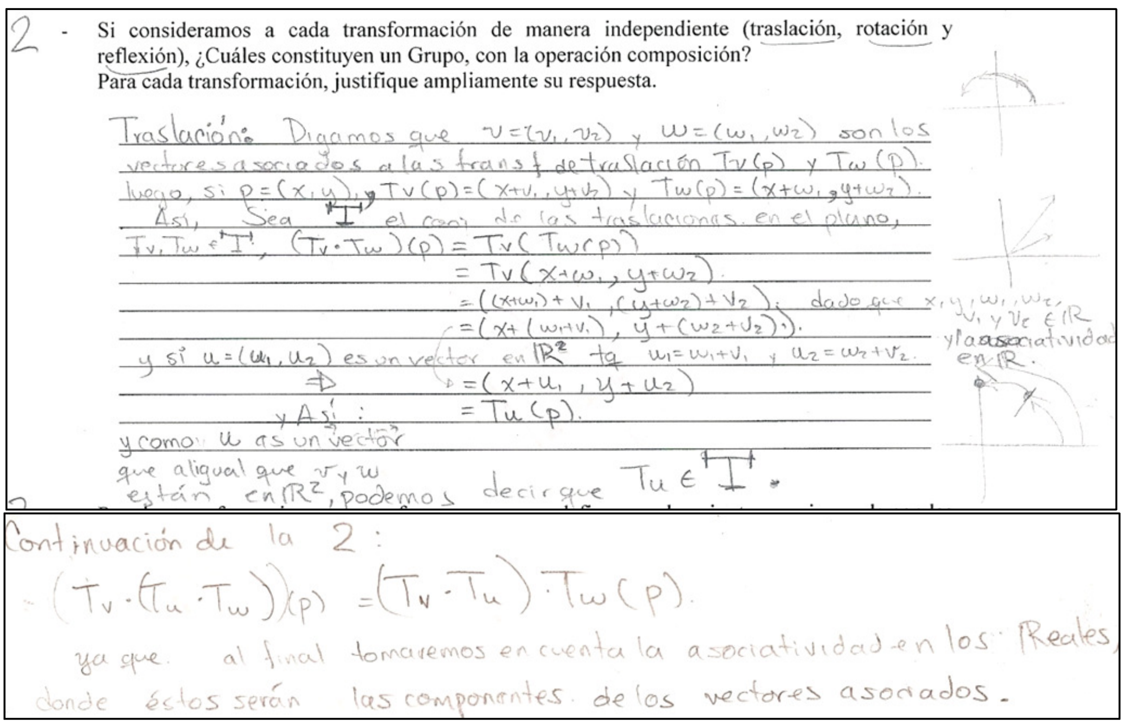
ACTIVIDADES

1 - Investiga la definición del concepto algebraico llamado "Grupo".

Grupo es un conjunto de elementos que bajo una operación binaria tiene una estructura algebraica que cumple con lo siguiente:
$(G, \cdot)$ G es el conjunto y $\cdot$ será la operación binaria, es decir que tomamos 2 elementos de G y nos da otro de G
$G \cdot G \to G$.
Así, si g_1, g_2, g_3 elementos arbitrarios en G,
1) $g_1 \cdot g_2 \in G$
2) $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.
3) $\exists\, e \in G$ tq $g \cdot e = g = e \cdot g$ $\forall\, g \in G$.
4) Para cada $g \in G$ $\exists\, g' \in G$ tq $gg' = e = g'g$.

Fig. ***N4.D.1***

Cuando el caso C recurrió a la investigación en páginas de internet para responder a la pregunta, el estudiante D comentó estar inscrito en la materia de Algebra Moderna (elemento a considerar al evaluar la variedad de herramientas matemáticas y la maestría en el uso de algunas de ellas).



2 - Si consideramos a cada transformación de manera independiente (traslación, rotación y reflexión), ¿Cuáles constituyen un Grupo, con la operación composición?
Para cada transformación, justifique ampliamente su respuesta.

Traslación: Digamos que $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ son los vectores asociados a las transf de traslación $T_v(p)$ y $T_w(p)$.
luego, si $p = (x, y)$, $T_v(p) = (x+v_1, y+v_2)$ y $T_w(p) = (x+w_1, y+w_2)$.
Así, Sea "I" el conj de las traslaciones en el plano,
$T_v, T_w \in I$, $(T_v \cdot T_w)(p) = T_v(T_w(p))$
$= T_v(x+w_1, y+w_2)$
$= ((x+w_1)+v_1, (y+w_2)+v_2)$; dado que x, y, w_1, w_2, v_1 y $v_2 \in \mathbb{R}$ y la asociatividad en $\mathbb{R}$.
$= (x+(w_1+v_1), y+(w_2+v_2))$.
y si $u = (u_1, u_2)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$ tq $u_1 = w_1+v_1$ y $u_2 = w_2+v_2$.
$\Rightarrow = (x+u_1, y+u_2)$
y Así: $= T_u(p)$.
y como u es un vector que al igual que v y w están en $\mathbb{R}^2$, podemos decir que $T_u \in I$.

Continuación de la 2:
$(T_v \cdot (T_u \cdot T_w))(p) = (T_v \cdot T_u) \cdot T_w(p)$.
ya que al final tomaremos en cuenta la asociatividad en los Reales, donde éstos serán las componentes de los vectores asociados.

Fig. ***N4.D.2***

La definición de traslación en términos de vectores fue capitalizado en la organización de su respuesta para el inciso 2, para verificar la cerradura elabora un trabajo considerando los vectores como pieza y hereda a la transformación la propiedad de asociatividad, a partir de los números reales.

Sea $e=(0,0)$ el vector neutro,

Así $(T_v \cdot T_e)(p) = T_v(p) = (T_e \cdot T_v)(p)$.

ya que
$$\begin{aligned}(T_v \cdot T_e)(p) &= T_v(T_e(p)) \\ &= T_v(x+0, y+0) \\ &= T_v(x, y) \\ &= T(x+v_1, y+v_2) \\ &= ((x+v_1)+0, (y+v_2)+0) \\ &= T_e(x+v_1, y+v_2)) \\ &= (T_e \cdot T_v)(p)\end{aligned}$$

Sea $\vec{v}^{-1}=(-v_1,-v_2)$, tendremos si definimos $T_{\vec{v}}^{-1} = T_v^{-1}$

Tendremos que
$$\begin{aligned}(T_{\vec{v}}^{-1} \cdot T_v)(p) = (T_{\vec{v}}^{-1} \cdot T_v)(p) &= T_{\vec{v}^{-1}}(x+v_1, y+v_2) \\ &= (x+v_1-v_1, y+v_2-v_2) \\ &= (x+0, y+0) \\ &= T_e(p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_v \cdot T_v^{-1})(p) &= T_v(T_{\vec{v}}^{-1}(p)) \\ &= T_v(x-v_1, y-v_2) \\ &= (x-v_1+v_1, y-v_2+v_2) \\ &= (x+0, y+0) \\ &= T_e(p)\end{aligned}$$

Fig. ***N4.D.3***

Considerando la afirmación sobre los axiomas de los números reales y su conocimiento al respecto, resulta confuso el por qué el estudiante no recurre a ellos para evidenciar las propiedades siguientes (tal y como lo hizo para la asociatividad). En ésta ocasión, construye y organiza deductivamente la existencia del elemento neutro y los inversos para cada traslación del conjunto, presentando la información en un lenguaje analítico (siendo este ambiente, donde el estudiante muestra mayor comodidad) y con demostraciones formales transformativas (no se asigna el grado de axiomática por recurrir a postulados de los números reales de manera explícita, tal consideración limita el alcance en geometrías alternativas).

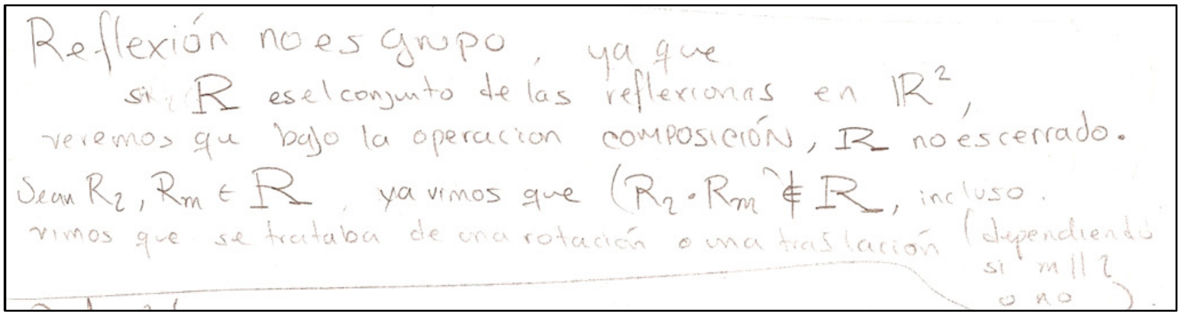

Reflexión no es grupo, ya que
si $\mathcal{R}$ es el conjunto de las reflexiones en $\mathbb{R}^2$,
veremos que bajo la operacion COMPOSICIÓN, $\mathcal{R}$ no es cerrado.
Sean $R_\ell, R_m \in \mathcal{R}$ ya vimos que $(R_\ell \circ R_m) \notin \mathcal{R}$, incluso
vimos que se trataba de una rotación o una traslación (dependiendo si $m \parallel \ell$ o no).

Fig. ***N4.D.4***

Para refutar la estructura de grupo para la reflexión, el estudiante evoca los resultados de la hoja de trabajo anterior.

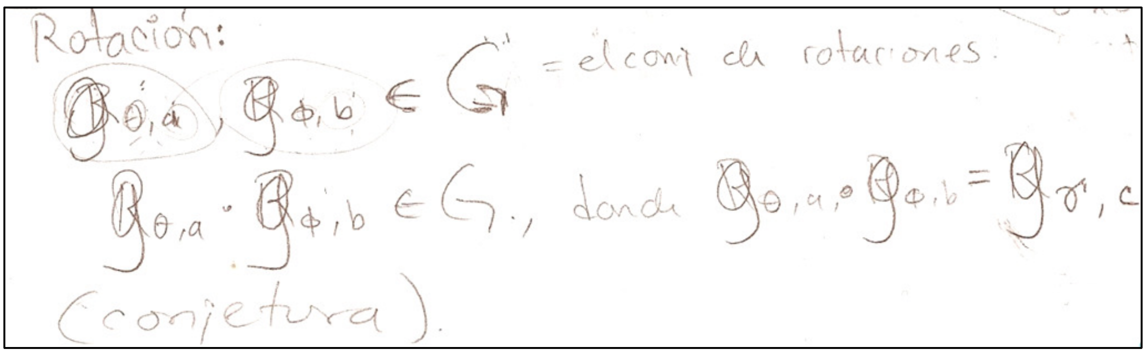
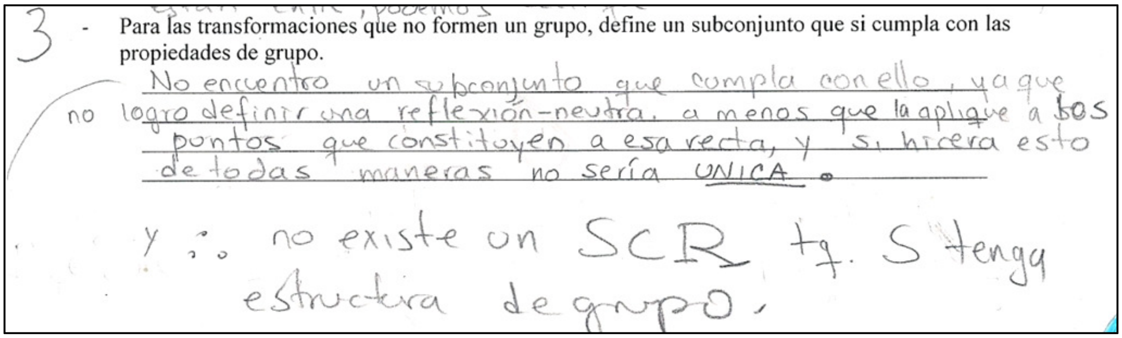

Rotación:
$\mathcal{R}_{\theta,a}, \mathcal{R}_{\phi,b} \in G$ = el conj de rotaciones.
$\mathcal{R}_{\theta,a} \circ \mathcal{R}_{\phi,b} \in G$, donde $\mathcal{R}_{\theta,a} \circ \mathcal{R}_{\phi,b} = \mathcal{R}_{\gamma,c}$
(conjetura).

Fig. ***N4.D.5***

La poca exploración dedicada a la composición de rotaciones es evidente en las respuestas de los estudiantes C y D, la única diferencia radica en el poco riesgo que asume el caso D al responder entre paréntesis la palabra "*conjetura*" (en la parte baja de la hoja de trabajo mostrada anteriormente), haciendo alusión a lo superficial de su exploración y el poco peso que asigna a su propia afirmación. Las justificaciones elaboradas resultan insuficientes, incluso para el alumno. Una posible conclusión al respecto, es la forma en que el estudiante demerita su resultado al no lograr estructurar una respuesta con los lineamientos usados para la evaluación de traslación.



3 - Para las transformaciones que no formen un grupo, define un subconjunto que si cumpla con las propiedades de grupo.

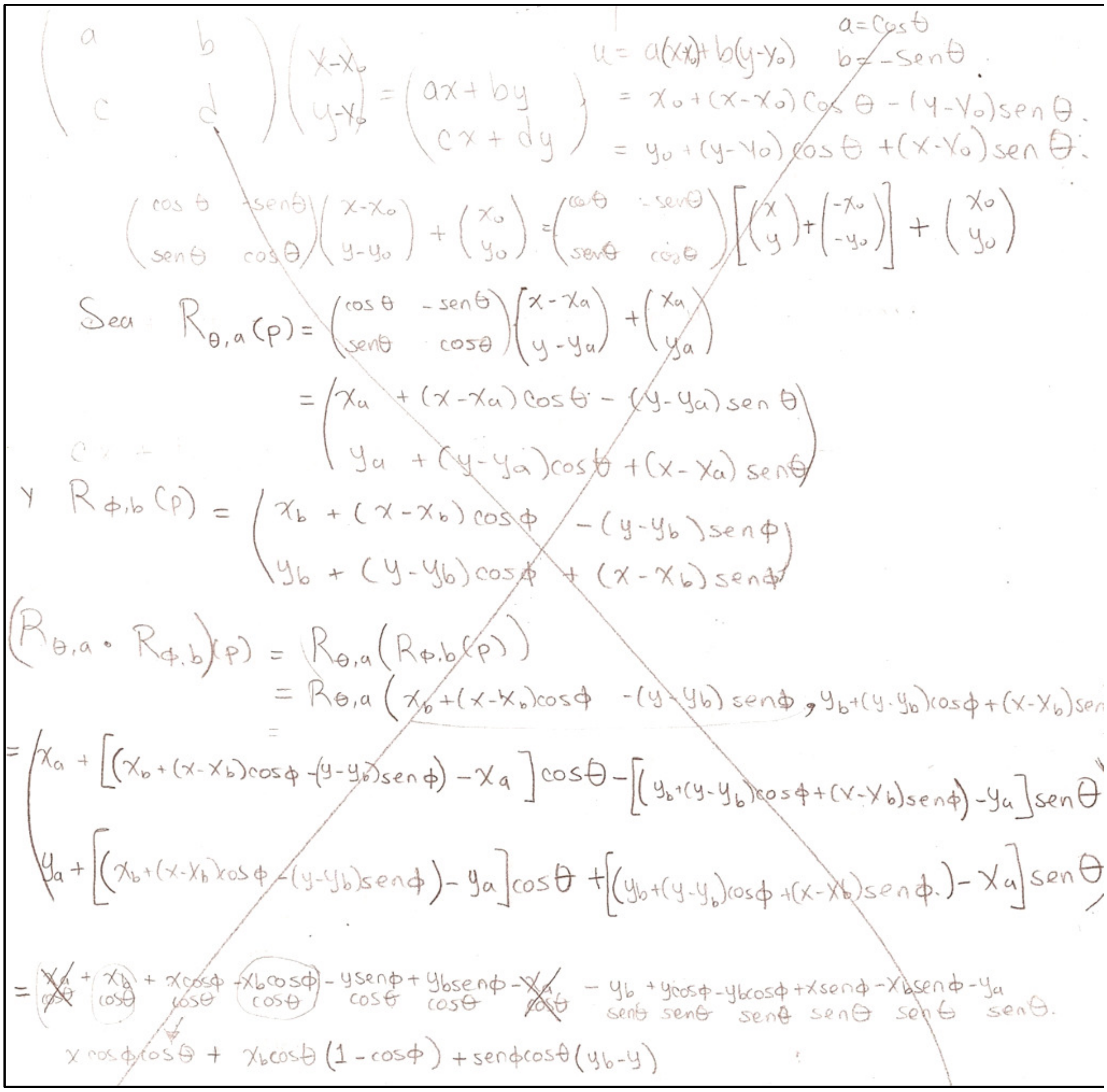
No encuentro un subconjunto que cumpla con ello, ya que no logro definir una reflexión-neutra, a menos que la aplique a los puntos que constituyen a esa recta, y si hiciera esto de todas maneras no sería <u>ÚNICA</u>.

y $\therefore$ no existe un $S \subset R$ tq. S tenga estructura de grupo.

Fig. ***N4.D.6***

El comentario hecho por el estudiante para disipar la confusión del caso C, muestra su antecedente en la respuesta del tercer inciso; donde el alumno afirma la no existencia de un subconjunto de reflexiones que formen un grupo. El fundamento parte de la inexistencia de un elemento neutro, lo cual implica la evaluación de las trasformaciones de manera independiente a las figuras o imágenes que transforman (en contraste a la versión del caso C, para la misma pregunta).

La exploración sobre rotaciones no es incluida en la respuesta, posiblemente por el desconocimiento del resultado de la composición de rotaciones y las pocas herramientas para abordarlo. En el anverso de la hoja siguiente aparece un intento de expresar el resultado de la composición de rotaciones mediante el uso de matrices, pero fue *tachado* por el estudiante por lo poco ilustrativo de la respuesta obtenida.



$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$u = a(x-x_0) + b(y-y_0)$ $\quad a = \cos\theta$ $\quad b = -\operatorname{sen}\theta$

$= x_0 + (x-x_0)\cos\theta - (y-y_0)\operatorname{sen}\theta$

$= y_0 + (y-y_0)\cos\theta + (x-x_0)\operatorname{sen}\theta$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Sea $R_{\theta,a}(p) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_a \\ y-y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x_a + (x-x_a)\cos\theta - (y-y_a)\operatorname{sen}\theta \\ y_a + (y-y_a)\cos\theta + (x-x_a)\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

y $R_{\phi,b}(p) = \begin{pmatrix} x_b + (x-x_b)\cos\phi - (y-y_b)\operatorname{sen}\phi \\ y_b + (y-y_b)\cos\phi + (x-x_b)\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}$

$(R_{\theta,a} \circ R_{\phi,b})(p) = R_{\theta,a}(R_{\phi,b}(p))$

$= R_{\theta,a}\left(x_b + (x-x_b)\cos\phi - (y-y_b)\operatorname{sen}\phi,\ y_b + (y-y_b)\cos\phi + (x-x_b)\operatorname{sen}\phi\right)$

$$= \begin{pmatrix} x_a + [(x_b + (x-x_b)\cos\phi - (y-y_b)\operatorname{sen}\phi) - x_a]\cos\theta - [(y_b + (y-y_b)\cos\phi + (x-x_b)\operatorname{sen}\phi) - y_a]\operatorname{sen}\theta \\ y_a + [(x_b + (x-x_b)\cos\phi - (y-y_b)\operatorname{sen}\phi) - y_a]\cos\theta + [(y_b + (y-y_b)\cos\phi + (x-x_b)\operatorname{sen}\phi) - x_a]\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$= \frac{\cancel{x_a}}{\cancel{\cos\theta}} + \frac{x_b}{\cos\theta} + \frac{x\cos\phi}{\cos\theta} - \frac{x_b\cos\phi}{\cos\theta} - \frac{y\operatorname{sen}\phi}{\cos\theta} + \frac{y_b\operatorname{sen}\phi}{\cos\theta} - \frac{\cancel{x_a}}{\cancel{\cos\theta}} - \frac{y_b}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{y\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{y_b\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{x\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{x_b\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{y_a}{\operatorname{sen}\theta}$

$x\cos\phi\cos\theta + x_b\cos\theta(1-\cos\phi) + \operatorname{sen}\phi\cos\theta(y_b - y)$

Fig. ***N4.D.7***

Al final de la sesión, el estudiante preguntó sobre identidades trigonométricas que pudieran ser de utilidad para abordar la pregunta, evidenciando lo poco claro de la respuesta obtenida e intentando recuperar el trabajo avanzado en el ambiente analítico.

4 -	Bajo la operación composición, el conjunto formado por las transformaciones isométricas (rotación, reflexión y traslación) es llamado "Grupo de isometrías". Verifica que efectivamente es un Grupo, justificando ampliamente tu respuesta.

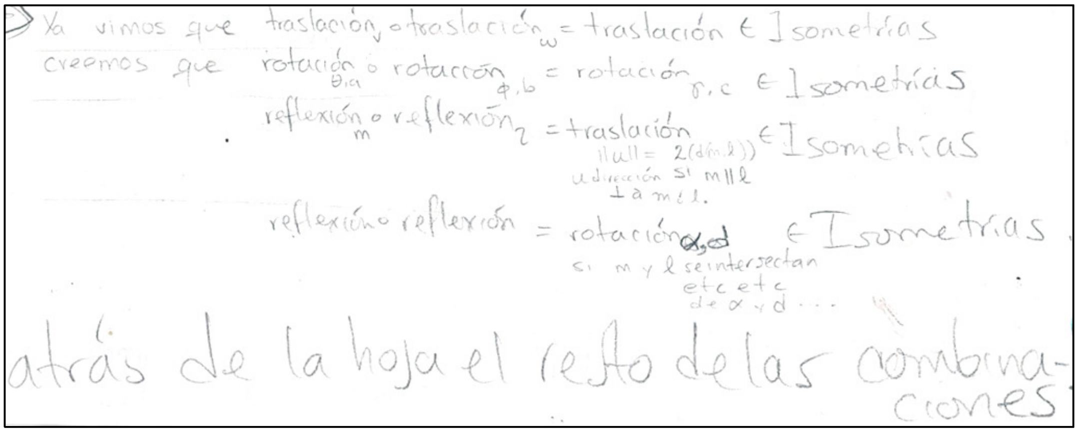


Fig. ***N4.D.8***

La pregunta final de la hoja de trabajo, solicita al estudiante justificaciones del término “Grupo de Isometrías”, para responder a la actividad, el caso D afirma realizar comprobaciones independientes para cada propiedad de Grupo. La primera en verificarse es la **cerradura**; para la cual separa las composiciones vistas anteriormente de las no exploradas (al menos durante la clase).

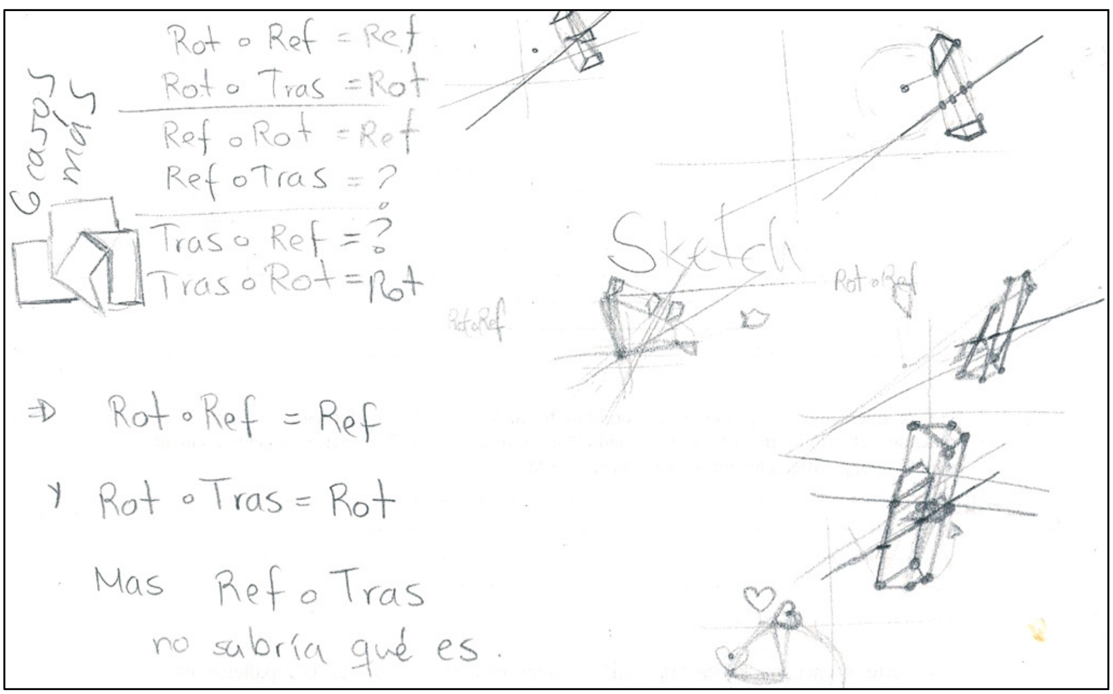


Fig. ***N4.D.9***

Las categorías de demostración usadas para afirmar la cerradura son de tipo perceptivo, al ser producto de exploraciones en GeoGebra (e incluso las redactadas en la imagen anterior, donde inicia el párrafo diciendo "*ya vimos que…*", son sólo conjeturas de la actividad No. 11 y producto de las exploraciones en los archivos correspondientes).

Las distintas composiciones son apoyadas con trazos y construcciones en "SketchPad"[10], evidenciando el tratamiento empírico de las afirmaciones; al grado de resultar insuficiente para describir la composición de reflexión y traslación.

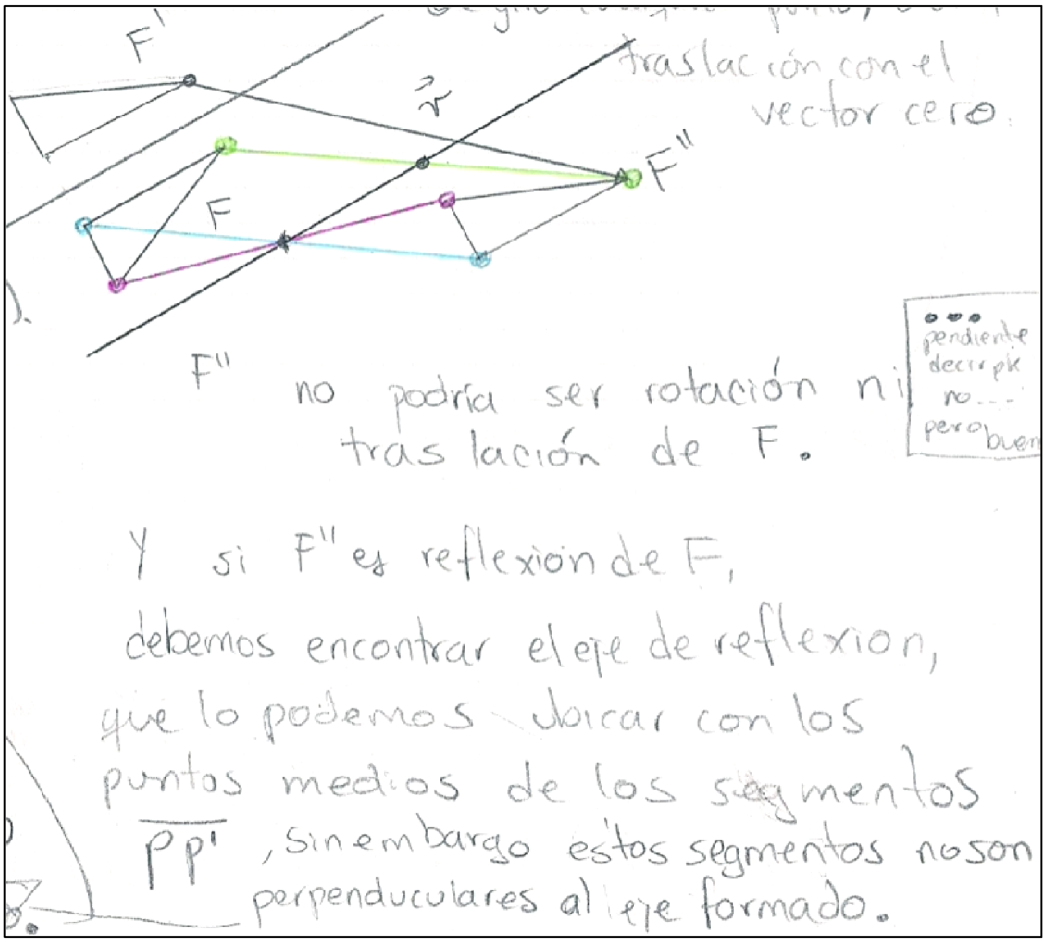


Fig. ***N4.D.10***

Dentro de la valoración de cerradura, el estudiante profundiza en la composición de reflexión y traslación, al usar un ejemplo genérico e involucrar las propiedades

[10] El software de Geometría dinámica estaba instalado en la maquinas del centro de cómputo y la preferencia del estudiante está influenciada por la maestría en su manejo, el profesor titular de la clase utilizó la paquetería de manera recurrentemente en sesiones anteriores al pilotaje.

de la trasformaciones (demostración inductiva de ejemplo genérico con inferencia), llegando a la conclusión de que “No es un Grupo” y evita entrar en especulación al respecto. Las construcciones del estudiante no fueron compartidas durante la fase 3 y las exteriorizó fuera del horario de clases, por una aparente curiosidad.

Antes de continuar con las generalidades en las que se vio involucrado el caso D, es conveniente recordar una de sus respuestas de la hoja de trabajo 7.

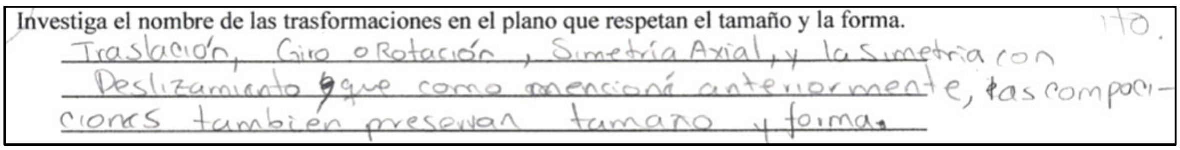

Investiga el nombre de las trasformaciones en el plano que respetan el tamaño y la forma. 110.
Traslación, Giro o Rotación, Simetría Axial, y la Simetría con Deslizamiento que como mencioné anteriormente, las composiciones también preservan tamaño y forma.

Fig. ***N4.D.11***

Ésta respuesta diferencia al estudiante del resto de sus compañeros, al ser el único en incluir 4 transformaciones distintas (en contraste con el resto de los alumnos, quienes se limitan a mencionar rotación, reflexión y traslación), la transformación adicional fue la reflexión con deslizamiento, misma que no fue usada como una explicación de la “no cerradura” del conjunto de transformaciones.

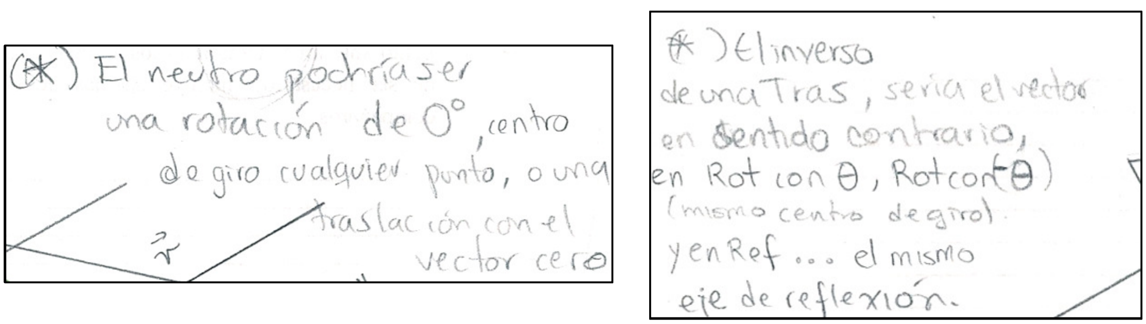


Fig. ***N4.D.12***

Para asegurar la propiedad de existencia del elemento neutro, el estudiante se apoya en la rotación y traslación y, a diferencia del caso C, describe los elementos inversos para cada transformación de manera global y sin requerir del uso de figuras concretas para relacionar las transformaciones.

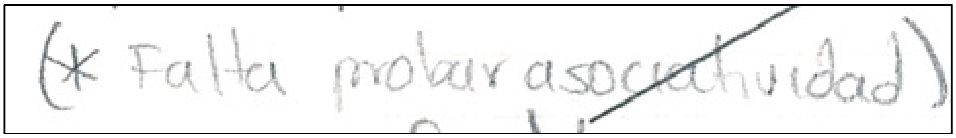


Fig. ***N4.D.13***

El estudiante se mostraba consciente de la ausencia de información relevante, manifestando que no estaba en condiciones de continuar con sus afirmaciones hasta asegurar la cerradura.

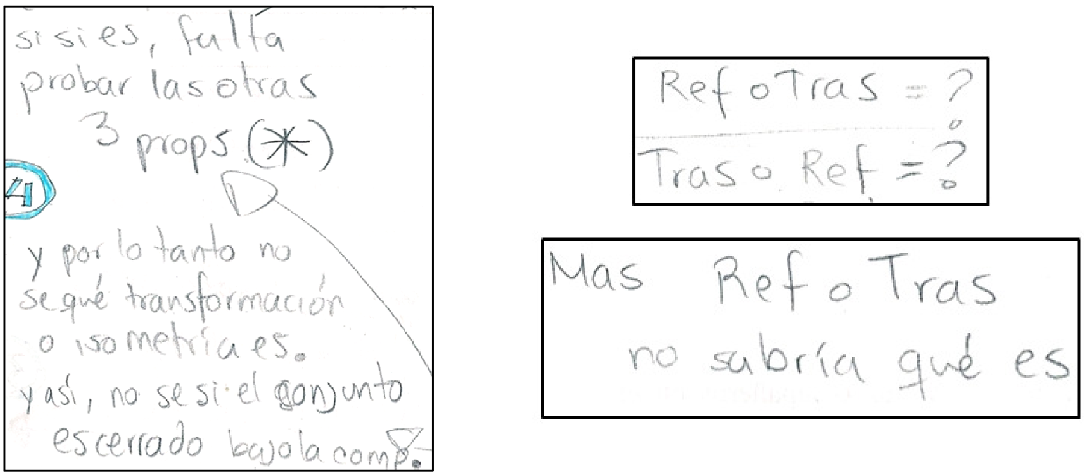


Fig. ***N4.D.14***

El avance es parcial y la confusión del caso D, se puede atribuir a la redacción de la pregunta misma, la cual dice:

> *Bajo la operación composición, el conjunto formado por las transformaciones isométricas (rotación, reflexión y traslación) es llamado "Grupo de isometrías". **Verifica que efectivamente es un Grupo**, justificando ampliamente tu respuesta.*

En la parte final de la pregunta se afirma la estructura de Grupo para el conjunto de transformaciones, lo cual puede inhibir las respuestas originales del estudiante (al influir en la redacción por presentarse una respuesta de manera autoritaria en la pregunta). Al margen de la respuesta, el estudiante no indaga al respecto y no utiliza la transformación adicional que declara en la hoja de trabajo 7 (reflexión con deslizamiento).

Evaluando las prácticas hechas por el caso analizado, el estudiante utiliza de manera sistemática categorías de demostración deductivas y las afirmaciones con antecedentes empíricos no las considera válidas. En varias hojas de trabajo, cuestionó las conjeturas de sus compañeros, mediante el uso de contraejemplos (casos extremos generalmente), ó intentó validarlas con encadenamientos deductivos.

Aunque aparecen algunas confusiones relacionadas al término “Grupo de isometrías” (comentadas anteriormente), el estudiante muestra un dominio de las propiedades de Grupo y su tratamiento. Las dudas planteadas por el estudiante fueron exteriorizadas después de culminadas las actividades; como una aparente curiosidad matemática, afectando el alcance de las fases 4 y 5 (al no tener un objetivo concreto a cual dirigirse). La integración fue la más disminuida en cuanto a potencial, ya que el tipo de demostraciones tomó un giro considerable, con respecto al tipo de trabajo presentado con anterioridad.

Las respuestas de las hojas de trabajo son correctas, pero no llegan a la solución del problema indicado o cuenta con justificaciones escasas. Considerando el nivel de razonamiento y las facultades mostradas, se asigna un nivel 4 con adquisición alta (sin llegar a ser completo).

OBSERVACIONES DEL NIVEL 4

En las hojas de trabajo anteriores al nivel 4, los estudiantes C y D mostraron un desempeño por encima del rendimiento de sus compañeros; asumiendo un rol protagónico y guía para el resto del salón (ya sea por la iniciativa durante las exploraciones sugeridas o por la precisión en las afirmaciones, mostrados por los casos C y D respectivamente). En cuanto a lo percibido en la hoja de trabajo 12, el caso C muestra carencias, que pueden estar relacionadas con las pocas exploraciones promovidas o complicaciones relacionadas con la concreción de las exploraciones previas, en un ambiente de mayor generalidad. Por otro lado, el caso D se ve menos afectado por el tipo de actividades, aprovechando su aparente dominio de tópicos de Álgebra Moderna para el estudio de la estructura de Grupo, las complicaciones a las que se enfrenta son promovidas por la redacción de la Hoja de trabajo 12 y confusiones encadenadas a las preguntas iniciales.

Considerando las categorías de demostración, los estudiantes utilizan métodos similares de exploración, pero sin asignar un peso similar a las conclusiones obtenidas; el caso C por ejemplo, usa exploraciones inductivas para responder a las distintas actividades y el caso D las restringe como comprobaciones, utilizándolas solamente para organizar el material en una demostración deductiva (al menos en los casos que cuenta con la exploración suficiente).

En un afán de contrastar las categorías de demostración utilizadas durante la resolución de las distintas hojas de trabajo, la actividad siguiente consistió en la aplicación de un examen final, donde se solicitan (explícitamente) demostraciones de las conjeturas elaboradas durante las distintas actividades.

ANÁLISIS DE EXAMEN
(Hoja final)

Durante la realización de las primeras hojas de trabajo fue notoria la irrelevancia que los estudiantes asignaron a la justificación de sus afirmaciones, en una primera instancia no fue un problema para la investigación (considerando la variedad de respuestas de las primeras actividades y la libertad proporcionada para las exploraciones). La medida tomada, con un exceso de optimismo, consistió en dar el beneficio de la duda y esperar que las justificaciones de los estudiantes asumieran un rol protagónico en las afirmaciones de mayor complejidad. Al ver que las hojas no lograban capturar los argumentos utilizados, se optó por incorporar, como actividad final, la resolución de un examen, donde se solicitan de manera explícita las afirmaciones hechas por los estudiantes durante la resolución de las distintas hojas de trabajo.

La aplicación del examen contrasta con el mecanismo usado de las hojas de trabajo, éstas últimas tienen un seguimiento natural y están influenciadas por un trabajo de grupo o atendidas por el profesor. El examen en cambio, fue una especie de concreción de los resultados trabajados y fue aplicado de manera individual (los estudiantes B y C lo resolvieron de manera conjunta por iniciativa propia), pero el poco tiempo restante obligó a permitir su entrega en los siguientes días.

En un afán de presentar un análisis minucioso sobre los métodos de argumentación, para cada caso de estudio se presenta una interpretación de las categorías de demostración usadas en cada pregunta. La hoja final, entregada a los estudiantes, fue la siguiente:

Examen

Nombre: ____________________________________ **Fecha:** __________________

1.- Fruto de tu exploración, descubriste distintas propiedades de las traslaciones en el plano. Demuestra las siguientes conjeturas, utilizando la definición de traslación elaborada en clase (entiéndase T_v como la traslación a través del vector v):

- Si l es una recta (o segmento de recta) en el plano, entonces $T_v(l) \parallel l$
- Demuestra que el conjunto de Traslaciones en el plano es cerrado bajo la composición.

2.- Una transformación φ es una isometría (en el plano) si:

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \forall\, p, q \in \mathbb{R}^2 : d(p,q) = d(\varphi(p), \varphi(q))$$

Siendo $d(p,q)$ la distancia euclidiana. Demuestra que cada una de las transformaciones vistas en clase (traslación, rotación y reflexión) son isometrías, utilizando las definiciones elaboradas.

3.- Enuncia una conjetura (completa) sobre la composición de reflexiones con respecto a ejes no paralelos y las rotaciones en el plano. Demuéstrala.

4.- Enuncia una conjetura (completa) sobre la composición de reflexiones con respecto a ejes paralelos y las traslaciones en el plano. Demuéstrala.

Caso A:

El caso A no entrego la hoja correspondiente al examen final.

Caso B:

La revisión de los exámenes muestra una similitud en las respuestas de los estudiantes B y C, así que el análisis se hará bajo el supuesto de que la elaboración del examen fue de manera conjunta. La medida tomada consistió en la evaluación de los resultados de manera independiente y en enfatizar las diferencias en la redacción (las cuales muestran elementos personales que cada estudiante considera necesario incluir en una demostración).

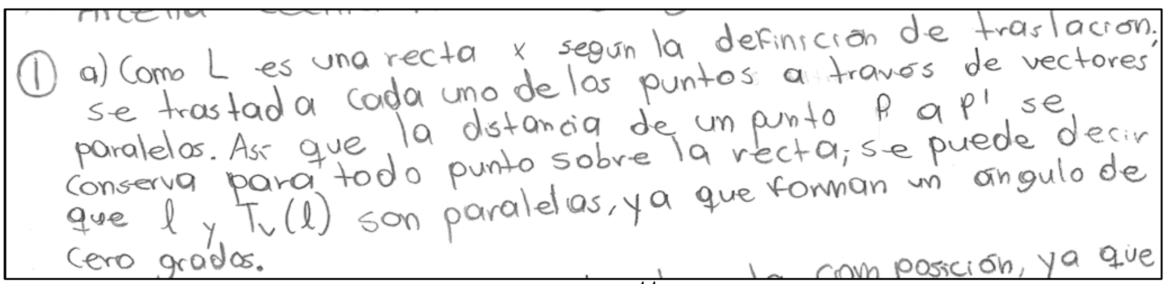

① a) Como L es una recta y según la definición de traslación;
se traslada cada uno de los puntos a través de vectores
paralelos. Así que la distancia de un punto P a P' se
conserva para todo punto sobre la recta; se puede decir
que l y $T_v(l)$ son paralelas, ya que forman un ángulo de
Cero grados.
composición, ya que

Fig. ***E.B.1***[11]

Las afirmaciones relacionadas con la traslación se presentaron en 2 incisos, en la primer sección se hace alusión al paralelismo de vectores y en un segundo momento se pide la comprobación de cerradura de la transformación de traslación. Para responder al primer apartado, el estudiante recurre al enunciado "*la distancia de un punto P a P' se conserva para todo punto sobre la recta"*, deducido a partir de declarar la existencia de vectores paralelos (aunque solamente hace uso del concepto de magnitud, asociado con los vectores). El cierre de la demostración habla de paralelismo de l y $T_v(l)$, partiendo de la premisa de que P y P' se encuentran a la misma distancia, por lo tanto, la definición de paralelismo utilizada se podría redactar como:

[11] En este momento, el análisis ya no esta ordenado por Niveles de razonamiento, es por ello que el nuevo formato para enumerar las figuras es: **Examen. Caso de Estudio. Número de Imagen**

Las rectas l_1 y l_2 son paralelas si:

$$\forall\ P\ y\ Q\ tal\ que\ P \in l_1\ y\ Q \in l_2 \implies d(P, l_2)=d(Q, l_1)$$

Las justificaciones presentadas en el primer inciso resultan incompletas y, por las inferencias presentadas sin un encadenamiento deductivo explícito, asumimos que el argumento está influenciado por la exploración promovida en la hoja de trabajo 3, razón por la cual se asigna una demostración inductiva de ejemplo genérico con inferencia (esto último al considerar las distintas propiedades declaradas, relacionadas de manera implícita).

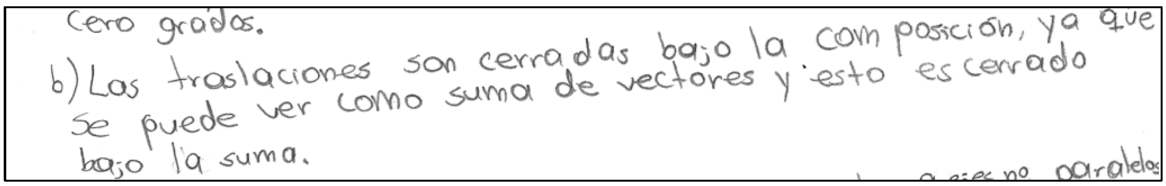
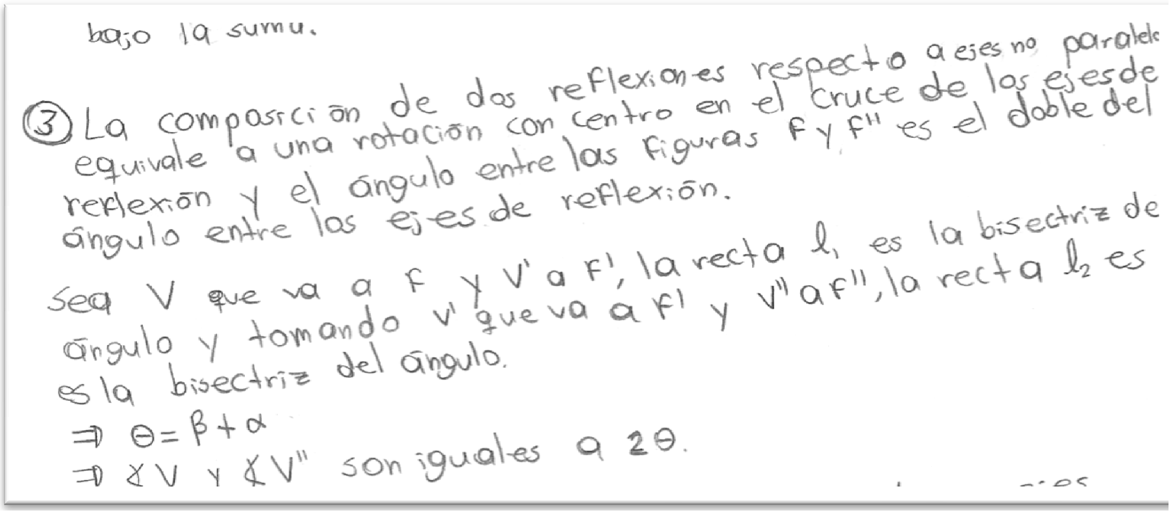

Cero grados.
b) Las traslaciones son cerradas bajo la composición, ya que se puede ver como suma de vectores y esto es cerrado bajo la suma.

Fig. ***E.B.2***

Para el inciso b), el estudiante se apoya en una afirmación de álgebra lineal, al parecer le resulta natural el manejo de la composición de traslaciones como la suma de los vectores que las definen. Ante el uso del teorema auxiliar para validar la conjetura sería inapropiado asignar una categoría de demostración con estas condiciones (aunque se desconozcan las razones para incorporar elementos de naturaleza distinta).

La pregunta 2 exige al estudiante un tratamiento de las transformaciones como isometrías y la hoja entregada por el caso B no muestra intento alguno para resolverlo.



bajo la suma.

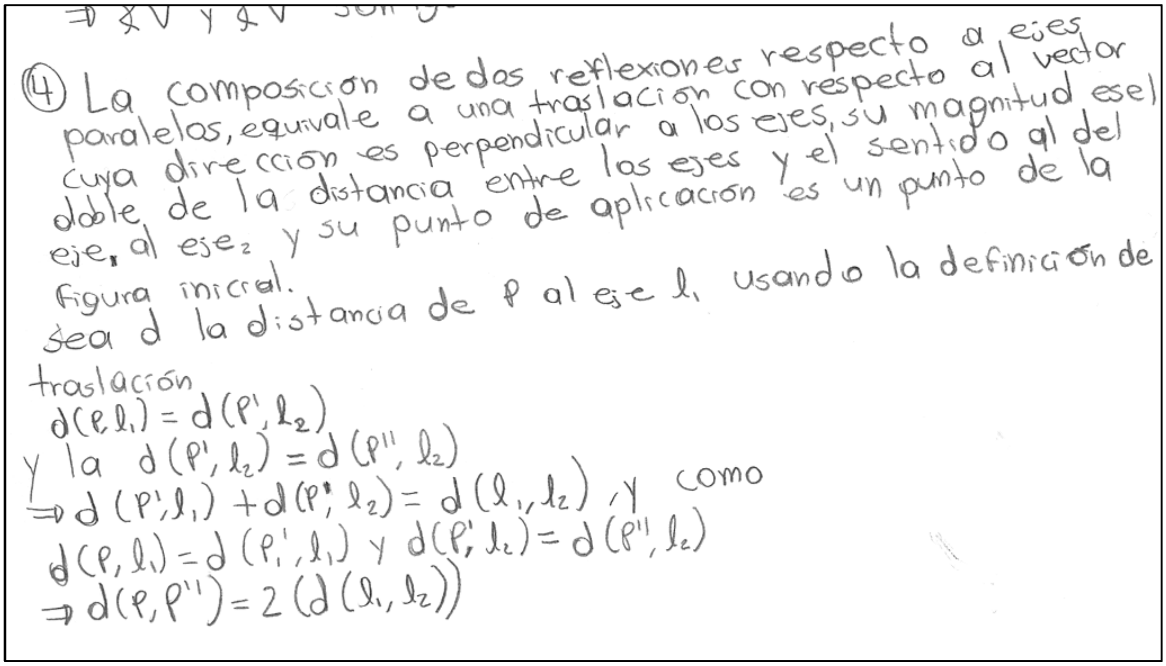
③ La composición de dos reflexiones respecto a ejes no paralel
equivale a una rotación con centro en el cruce de los ejes de
reflexión y el ángulo entre las figuras F y F'' es el doble del
ángulo entre los ejes de reflexión.

Sea V que va a F y V' a F', la recta l_1 es la bisectriz de
ángulo y tomando V' que va a F' y V'' a F'', la recta l_2 es
es la bisectriz del ángulo.
$\Rightarrow \Theta = \beta + \alpha$
$\Rightarrow \measuredangle V$ y $\measuredangle V''$ son iguales a 2Θ.

Fig. ***E.B.3***

Las conjeturas de cierre de la hoja de trabajo 11 se replantean en el examen, con la intención de evaluar el tipo de justificaciones que aparecen en un escenario de mayor exigencia (comparado con una sesión de clases convencional). Para responder a la relación de la composición de reflexiones (ejes no paralelos) y las rotaciones en el plano, el estudiante evoca características perceptivas, pero sin un interés en validarlas apropiadamente (a partir de las definiciones hechas o propiedades verificadas); por ejemplo, parte del supuesto de que los ejes de reflexión son las bisectrices de los ángulos POP' (donde P y P' son los puntos correspondientes bajo la transformación y O el punto donde se intersectan los ejes). Al margen de lo fuerte de la afirmación y lo improvisado de su inclusión en la demostración, el estudiante no cuenta con una exploración que lo sustente, por lo cual se basa en elementos visuales (perceptivos).

Evaluando la organización de la respuesta en el examen, el caso B presenta un intento de demostración de experimento mental transformativa; por lo tanto, se asigna la categoría de experimento mental, debido a la omisión de información de los elementos que utiliza como premisas (V, F, V', F', l_1, l_2, las transformaciones que los relacionan, etc.) para lo cual parte de una imagen mental del objeto en un ambiente geométrico. Otra carencia del trabajo, es que no relaciona su conclusión con los elementos definitorios de la rotación en el plano; atendiendo parcialmente el ángulo de rotación y excluyendo la equidistancia de puntos homólogos con el centro de giro.



④ La composición de dos reflexiones respecto a ejes paralelos, equivale a una traslación con respecto al vector cuya dirección es perpendicular a los ejes, su magnitud es el doble de la distancia entre los ejes y el sentido al del eje_1 al eje_2 y su punto de aplicación es un punto de la figura inicial.

Sea d la distancia de P al eje l_1 usando la definición de traslación

$d(P, l_1) = d(P', l_2)$

y la $d(P', l_2) = d(P'', l_2)$

$\Rightarrow d(P', l_1) + d(P', l_2) = d(l_1, l_2)$, y como

$d(P, l_1) = d(P_1', l_1)$ y $d(P', l_2) = d(P'', l_2)$

$\Rightarrow d(P, P'') = 2(d(l_1, l_2))$

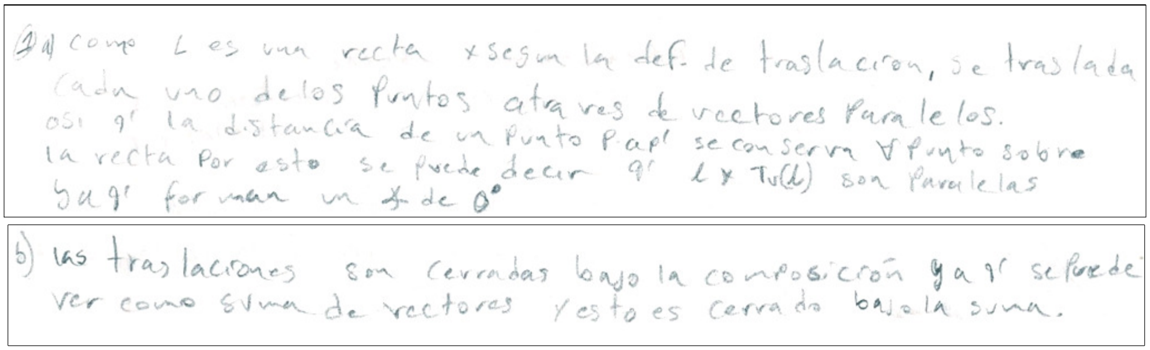
Fig. ***E.B.4***

La pregunta final del examen solicita una justificación para la conjetura sobre composición de reflexiones con ejes paralelos. De manera similar a la pregunta 3, el estudiante realiza una comprobación parcial, partiendo de la propiedad de equidistancia de puntos homólogos con respecto al eje de reflexión y, en esta ocasión, sin recurrir a teoremas auxiliares (como la bisección de ángulos).

La presentación de su respuesta, se identifica como un intento de demostración de experimento mental transformativa (por razones similares a la respuesta de la pregunta 3) y la consideramos inconclusa por la información nula sobre el vector de traslación asociado a la composición de reflexiones.

Considerando lo incompleto de las respuestas presentadas, el estudiante sigue influenciado por las exploraciones promovidas en las hojas de trabajo; utilizando de manera recurrente elementos visuales (no demostrados, ni mencionados durante las sesiones).

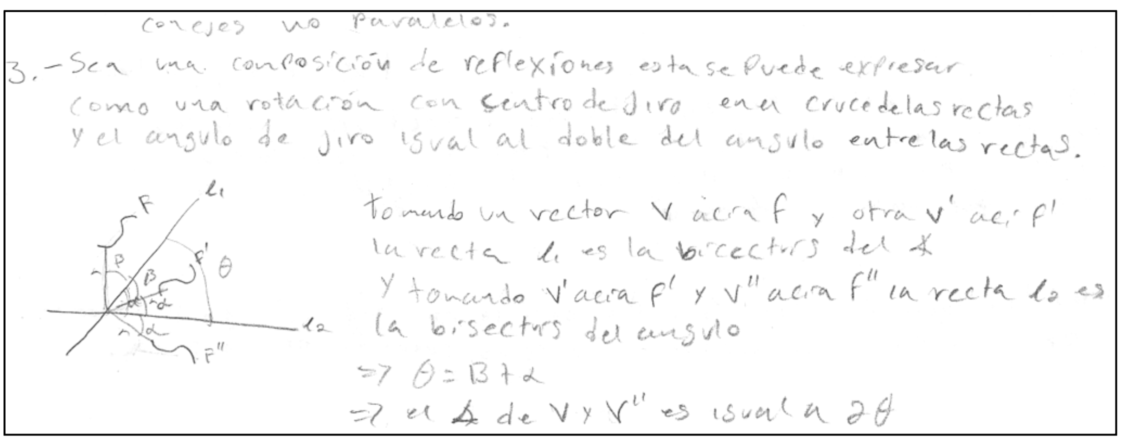
Caso C:


a) como L es una recta y según la def. de traslación, se traslada cada uno de los puntos a través de vectores paralelos. así q' la distancia de un punto P a p' se conserva ∀ punto sobre la recta por esto se puede decir q' l y $T_u(l)$ son paralelas ya q' forman un ∡ de 0°

b) las traslaciones son cerradas bajo la composición ya q' se puede ver como suma de vectores y esto es cerrado bajo la suma.

Fig. ***E.C.1***

Las respuestas a los primeros dos incisos del examen son idénticos al caso B, incluso en los elementos mencionados para la redacción. Las categorías de demostración asignadas para el caso C fueron perceptivos de ejemplo genérico con inferencia, pero disfrazados con un intento de experimento mental transformativo (no concluido apropiadamente). La pregunta 2 del examen, donde se abordan las transformaciones mediante su relación con el concepto de isometría tampoco es respondida.


con ejes no paralelos.

3.- Sea una composición de reflexiones esta se puede expresar como una rotación con sentro de jiro en el cruce de las rectas y el angulo de jiro isual al doble del ansulo entre las rectas.

tomando un vector V acia F y otro V' aci F' la recta l_1 es la bicectriz del ∡
y tomando V' acia F' y V'' acia F'' la recta l_2 es la bisectriz del angulo
⇒ θ = β + α
⇒ el ∡ de V y V'' es igual a 2θ

Fig. ***E.C.2***

La primer diferencia entre los casos B y C se da en la respuesta de la pregunta 3, donde el caso C incluye un dibujo que ilustra el significado de los elementos utilizados (el caso B se limitó a mencionarlo en la redacción sin un antecedente claro de su significado). Aunque incluye componentes adicionales en su respuesta, los trazos auxiliares no representan un antecedente claro de la afirmación de la bisectriz (para la composición de ejes de reflexión no paralelos, los ejes de reflexión son la bisectriz del ángulo POP’, donde P y P’ son puntos homólogos bajo la transformación y O es el punto de cruce de los ejes). La categoría de demostración establecida es perceptiva de ejemplo genérico con inferencia; por utilizar la propiedad de los ángulos como apoyo (aunque sin elementos para afirmarla) y por no realizar mediciones concretas, limitándose a la aparente igualdad de los ángulos involucrados.

4. sea una composicion de reflexiones con ejes paralelos esta se puede expresar como una traslacion con el vector en sentido de el primer eje acia el segundo eje y de magnitud igual al doble de la distancia entre los ejes y de dirección perpendicular a los ejes.

sea d= ala distancia de P a el eje l_1 usando la definicion de traslacio

$d(P, l_1) = d(P', l_1)$

y la $d(P', l_2) = d(P'', l_2)$

$\Rightarrow d(P', l_1) + d(P', l_2) = d(l_1, l_2)$

y como $d(P, l_1) = d(P', l_1)$ y $d(P', l_2) = d(P'', l_2)$

$\Rightarrow d(P, P'') = 2(d(l_1, l_2)$

Fig. ***E.C.3***

La respuesta final representa un experimento mental transformativo, por modificarse la pregunta original a un problema de álgebra (sin desprenderse del ambiente gráfico, al mencionar la relación del sentido de los ejes con el orden de la operación). La respuesta no recurre a propiedades definitorias de reflexión, ni concluye su respuesta con los detalles del vector de traslación; es por ello que aparece una demostración perceptiva de ejemplo genérico con inferencia (al incluir la propiedad distancia de la reflexión), pero con una apariencia de experimento mental transformativo (el cual es incompleto).

Caso D:

P.D

1 ❖ Si ℓ es una recta en el plano $\Rightarrow$ $T_v(\ell) \parallel \ell$.

Tenemos que cada punto $p=(x,y)$ que se encuentra en la recta cumple con la siguiente ecuación.

$Ax+By+C=0$ que es la ec. de la recta ℓ.

Luego si $v=(v_1,v_2) \Rightarrow p'=(x+v_1, y+v_2)$, y $T_v(\ell)$ son todos los puntos en ℓ transformados bajo T_v, i.e. $T_v(p)=p'$

Luego la ec. de la recta también se puede expresar como

$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, donde $-\frac{A}{B}$ es la pendiente de la recta.

Entonces, los puntos como p' que constituyen $T_v(\ell)$ esta recta tiene por ecuación: $A(x+v_1)+B(y+v_2)+C=0$

luego $Ax+Av_1+By+Bv_2+C=0$

los valores A, B, C, v_1 y v_2 están fijos, $\therefore$ Av_1, Bv_2 y C son constantes

$\Rightarrow Ax+By+(Av_1+Bv_2+C)=0$

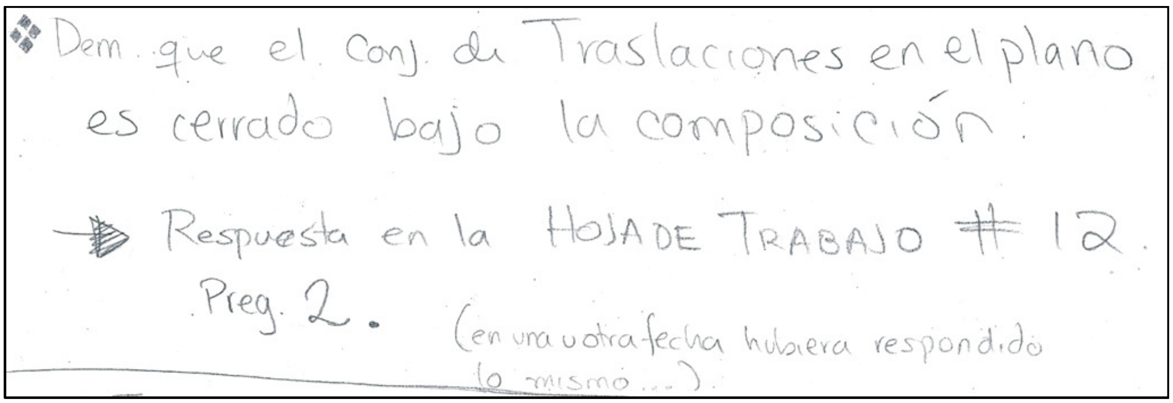
y $\Rightarrow y=-\frac{A}{B}x-\frac{(Av_1+Bv_2+C)}{B}$

Así, podemos ver que la recta tiene la misma pendiente $-\frac{A}{B}$, pero la ordenada al origen es $-\frac{(Av_1+Bv_2+C)}{B}$ en vez de $-\frac{C}{B}$.

$\therefore T_v(\ell) \parallel \ell$.

Fig. ***E.D.1***

El paralelismo de segmentos homólogos bajo la traslación se demuestra mediante el uso de herramientas de geometría analítica mediante el uso de la definición de la transformación en términos de vectores, respondiendo al problema al comparar las pendientes de los segmentos, antes y después de ser trasladados. Dado que no utiliza una imagen gráfica del problema para organizar su argumento, se considera una demostración formal transformativa; considerando que no recurre al apoyo de imágenes o modelos geométricos de la traslación y el tratamiento no es puramente axiomático (al utilizar la referencia visual del plano y las pendientes de la recta).

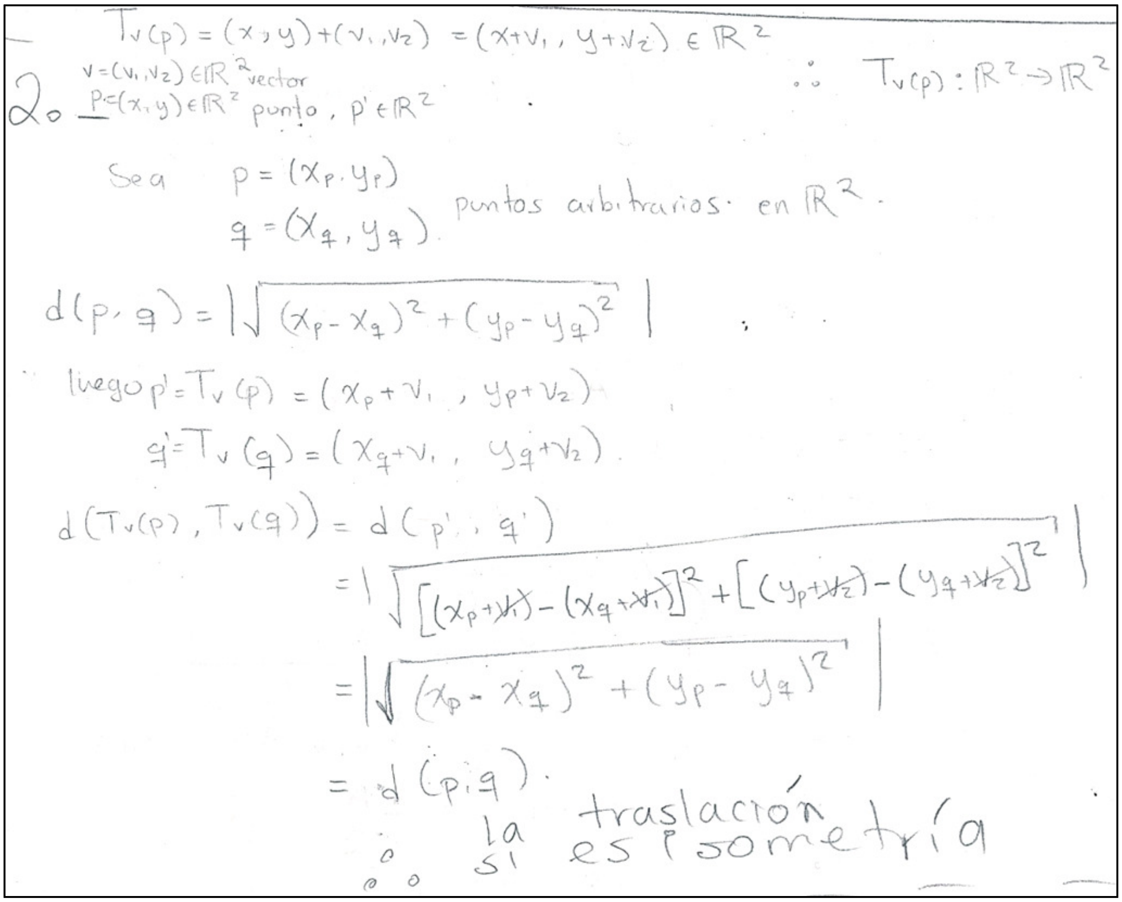


Dem. que el Conj. de Traslaciones en el plano es cerrado bajo la composición.

Respuesta en la HOJA DE TRABAJO # 12. Preg. 2. (en una u otra fecha hubiera respondido lo mismo...).

Fig. ***E.D.2***

La comprobación de que la traslación es cerrada bajo la composición solicita la revisión de la hoja de trabajo 12, la cual fue asignada como una demostración formal transformativa.



2.

$T_v(p) = (x, y) + (v_1, v_2) = (x+v_1, y+v_2) \in \mathbb{R}^2$

$v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ vector

$P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ punto, $p' \in \mathbb{R}^2$

$\therefore T_v(p): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Sea $p = (x_p, y_p)$, $q = (x_q, y_q)$ puntos arbitrarios en $\mathbb{R}^2$.

$$d(p, q) = \left|\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}\right|$$

luego $p' = T_v(p) = (x_p + v_1, y_p + v_2)$

$q' = T_v(q) = (x_q + v_1, y_q + v_2)$.

$$d(T_v(p), T_v(q)) = d(p', q')$$

$$= \left|\sqrt{[(x_p + \cancel{v_1}) - (x_q + \cancel{v_1})]^2 + [(y_p + \cancel{v_2}) - (y_q + \cancel{v_2})]^2}\right|$$

$$= \left|\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}\right|$$

$$= d(p, q).$$

$\therefore$ sí la traslación es isometría

Fig. ***E.D.3***

De los 8 estudiantes a los que se les entregó el examen, fue el único en abordar la pregunta 2; utilizando las versiones analíticas de las transformaciones. La sugerencia del uso de la distancia euclidiana fue utilizada por el estudiante.

Para la traslación, se confirma que cumple con la definición de isometría calculando la distancia para un par de puntos arbitrarios en el plano; las etiquetas utilizadas son P=(x_p, y_p), Q=(x_q, y_q) y sus correspondientes puntos homólogos T_V(P) y T_V(Q). La resolución del problema se concluye al asegurar la igualdad de las distancias mediante manipulaciones algebraicas, haciendo uso de una demostración formal transformativa.

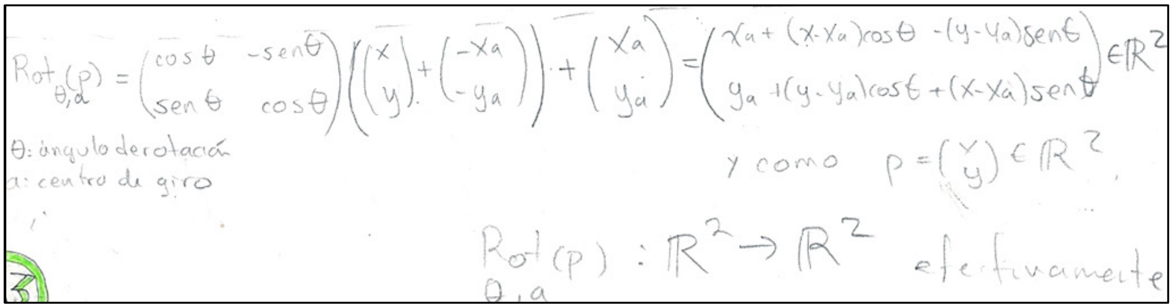

$Rot_{\theta,a}(p) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_a \\ -y_a \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + (x-x_a)\cos\theta - (y-y_a)sen\theta \\ y_a + (y-y_a)\cos\theta + (x-x_a)sen\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
θ: ángulo de rotación
a: centro de giro
y como $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,
$Rot_{\theta,a}(p) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ efectivamente

Fig. ***E.D.4***

Sean $p=(x_p, y_p)$ y $q=(x_q, y_q)$ puntos arbitrarios en $\mathbb{R}^2$

$$d(p,q)=\sqrt{(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2}$$

$$Rot(p)=\left(x_a+(x_p-x_a)\cos\theta-(y_p-y_a)\operatorname{sen}\theta,\; y_a+(y_p-y_a)\cos\theta+(x_p-x_a)\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$Rot(q)=\left(x_a+(x_q-x_a)\cos\theta-(y_q-y_a)\operatorname{sen}\theta,\; y_a+(y_q-y_a)\cos\theta+(x_q-x_a)\operatorname{sen}\theta\right).$$

$$d(Rot(p),Rot(q))=\sqrt{\begin{aligned}&(\cancel{x_a}+x_p\cos\theta-\cancel{x_a\cos\theta}-y_p\operatorname{sen}\theta+\cancel{y_a\operatorname{sen}\theta}-\cancel{x_a}-x_q\cos\theta+\cancel{x_a\cos\theta}\\&+y_q\operatorname{sen}\theta-\cancel{y_a\operatorname{sen}\theta})^2\\&+(\cancel{y_a}+y_p\cos\theta-\cancel{y_a\cos\theta}+x_p\operatorname{sen}\theta-\cancel{x_a\operatorname{sen}\theta}-\cancel{y_a}-y_q\cos\theta+\cancel{y_a\cos\theta}\\&-x_q\operatorname{sen}\theta+\cancel{x_a\operatorname{sen}\theta})^2\end{aligned}}$$

$$=\sqrt{(x_p\cos\theta-y_p\operatorname{sen}\theta-x_q\cos\theta+y_q\operatorname{sen}\theta)^2+(y_p\cos\theta+x_p\operatorname{sen}\theta-y_q\cos\theta-x_q\operatorname{sen}\theta)^2}$$

$$=\sqrt{\begin{aligned}&(x_p\cos\theta)^2-x_p\cos\theta\, y_p\operatorname{sen}\theta-x_p\cos^2\theta\, x_q+x_p\cos\theta\, y_q\operatorname{sen}\theta\\&-y_p\operatorname{sen}\theta\, x_p\cos\theta+(y_p\operatorname{sen}\theta)^2+y_p\operatorname{sen}\theta\, x_q\cos\theta-y_p\operatorname{sen}^2\theta\, y_q\\&-x_q\cos^2\theta\, x_p+x_q\cos\theta\, y_p\operatorname{sen}\theta+(x_q\cos\theta)^2-x_q\cos\theta\, y_q\operatorname{sen}\theta\\&+y_q\operatorname{sen}\theta\, x_p\cos\theta-y_q\operatorname{sen}^2\theta\, y_p-y_q\operatorname{sen}\theta\, x_q\cos\theta+(y_q\operatorname{sen}\theta)^2\\&+(y_p\cos\theta)^2+y_p\cos\theta\, x_p\operatorname{sen}\theta-y_p\cos\theta\, y_q\cos\theta-y_p\cos\theta\, x_q\operatorname{sen}\theta+x_p\operatorname{sen}\theta\, y_p\cos\theta+(x_p\operatorname{sen}\theta)^2\\&-x_p\operatorname{sen}\theta\, y_q\cos\theta-x_p\operatorname{sen}\theta\, x_q\operatorname{sen}\theta-y_q\cos\theta\, y_p\cos\theta-y_q\cos\theta\, x_p\operatorname{sen}\theta+(y_q\cos\theta)^2\\&+y_q\cos\theta\, x_q\operatorname{sen}\theta-x_q\operatorname{sen}\theta\, y_p\cos\theta-x_q\operatorname{sen}\theta\, x_p\operatorname{sen}\theta+x_q\operatorname{sen}\theta\, y_q\cos\theta+(x_q\operatorname{sen}\theta)^2\end{aligned}}$$

$$=\sqrt{\begin{aligned}&(x_p\cos\theta)^2-2\cos^2\theta(x_px_q)-2\operatorname{sen}^2\theta(y_py_q)+(y_p\operatorname{sen}\theta)^2+(x_q\cos\theta)^2+(y_q\operatorname{sen}\theta)^2\\&+(y_p\cos\theta)^2+(x_p\operatorname{sen}\theta)^2+(y_q\cos\theta)^2+(x_q\operatorname{sen}\theta)^2-2\operatorname{sen}^2\theta(x_px_q)-2\cos^2\theta(y_py_q)\end{aligned}}$$

$$=\sqrt{\begin{aligned}&x_p^2\cos^2\theta-2x_px_q\cos^2\theta-2y_py_q\operatorname{sen}^2\theta+y_p^2\operatorname{sen}^2\theta+x_q^2\cos^2\theta+y_q^2\operatorname{sen}^2\theta+y_p^2\cos^2\theta+x_p^2\operatorname{sen}^2\theta+y_q^2\cos^2\theta\\&+x_q^2\operatorname{sen}^2\theta-2x_px_q\operatorname{sen}^2\theta-2y_py_q\cos^2\theta\end{aligned}}$$

$$=\sqrt{\begin{aligned}&-2x_px_q(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)-2y_py_q(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)+x_p^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)+y_p^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)+x_q^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)\\&+y_q^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)\end{aligned}}$$

$$=\sqrt{-2x_px_q-2y_py_q+x_p^2+y_p^2+x_q^2+y_q^2}=\sqrt{(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2}=d(p,q)$$

$\therefore$ La rotación es isometría

Fig. ***E.D.5***

La definición de las transformaciones como función es información que aparece de manera recurrente para la pregunta 2, inclusive mencionando la regla de correspondencia (con el aparente fin de justificar el método para obtener la imagen de los puntos arbitrarios). El tratamiento para comprobar la isometría de la rotación es similar al utilizado para la comprobación en la traslación, la diferencia sustancial es lo arduo de la manipulación algebraica utilizada para este caso. El primer paso es la construcción de la matriz de rotación para casos generales; replanteando el problema geométrico como un problema algebraico, posteriormente se verifica la igualdad de las distancias mediante las comparaciones con puntos arbitrarios y sus respectivas imágenes bajo la transformación (similar a la traslación). La conclusión requirió el uso de identidades trigonométricas (simples, pero no utilizadas hasta el momento), y se percibe una demostración formal transformativa.

Reflexión: ~~ecuación~~ recta ℓ : $Ax + By + C = 0$; $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

$p = (x_p, y_p)$, $q = (x_q, y_q)$.

$\cancel{Ref_\ell(p)}$

$y = mx + b$

donde $m = -\frac{A}{B}$

y $b = -\frac{C}{B}$.

$$Ref_\ell(p) = \left(\frac{(1-m^2)x_p + 2m(y_p - b)}{m^2+1}, \frac{(m^2-1)y_p + 2(mx_p + b)}{m^2+1}\right) \in \mathbb{R}^2$$

$$\forall p \in \mathbb{R}, \Rightarrow Ref_\ell(p) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 .$$

Luego: $d(p,q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$

$$d\left(Ref_\ell(p), Ref_\ell(q)\right) = \sqrt{\frac{\left((1-m^2)x_p + 2m(y_p - b) - (1-m^2)x_q - 2m(y_q - b)\right)^2 + \left((m^2-1)y_p + 2(mx_p + b) - (m^2-1)y_q - 2(mx_q + b)\right)^2}{m^4 + 2m^2 + 1}}$$

Fig. ***E.D.6***

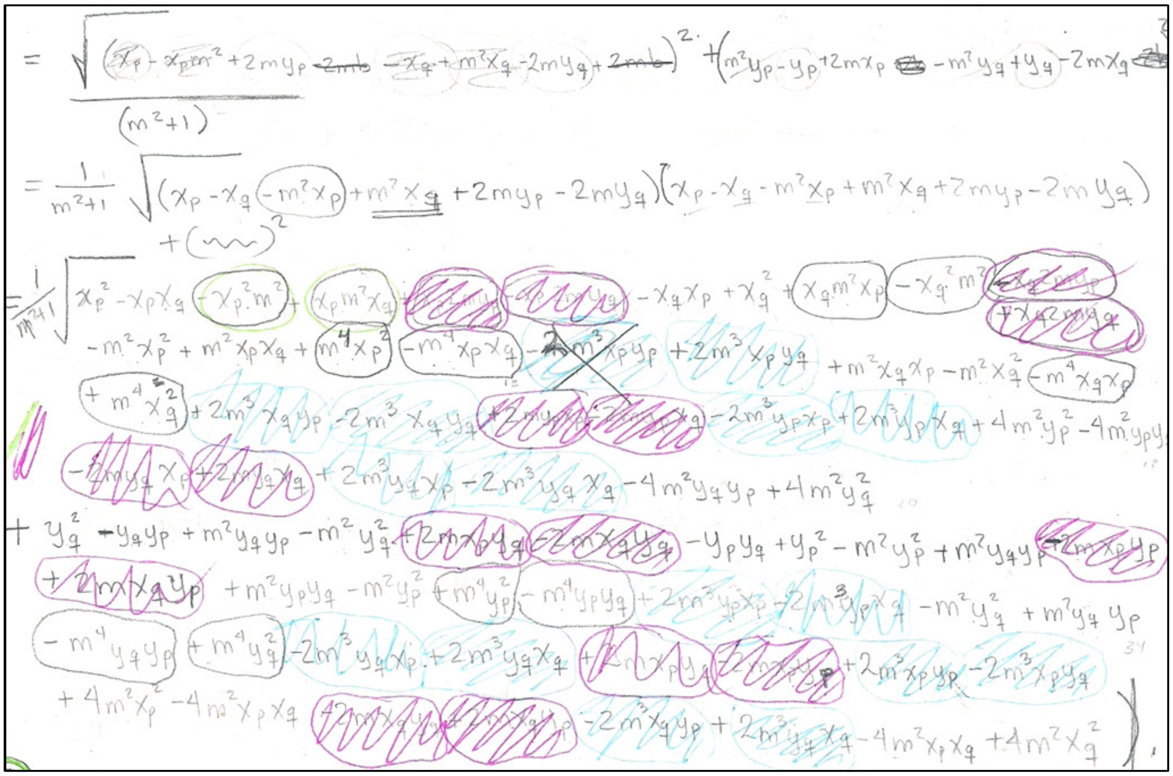


Fig. ***E.D.7***

La respuesta para la reflexión es similar a sus antecesores, las complicaciones adicionales son la manipulación de un mayor número de términos en la matriz de reflexión. Los cálculos se llevan de manera adecuada en la primera hoja de respuestas, pero el estudiante no realiza las cancelaciones apropiadas.

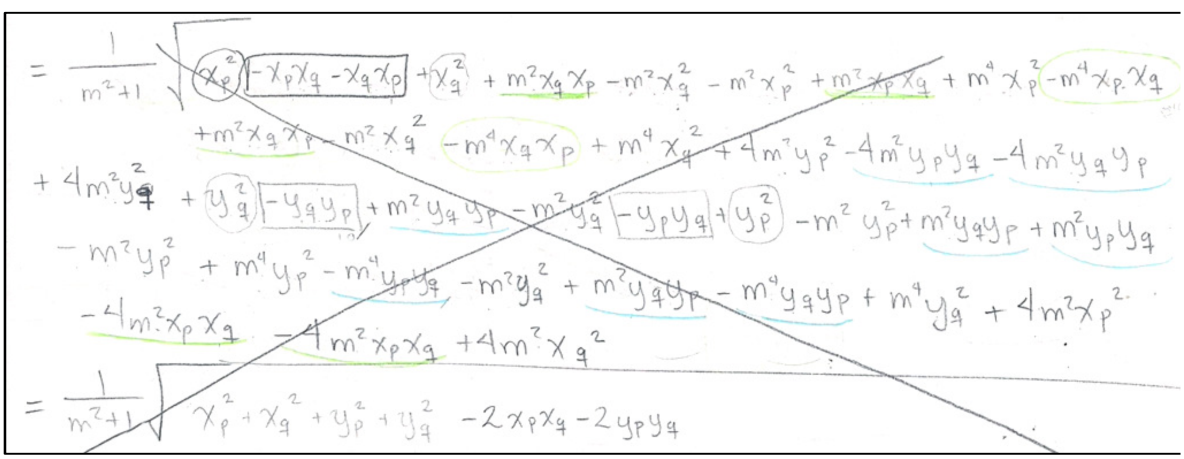


Fig. ***E.D.8***

Lo poco claro de su resultado lo obliga a replantear la estrategia y en la parte final de la hoja redacta lo siguiente:

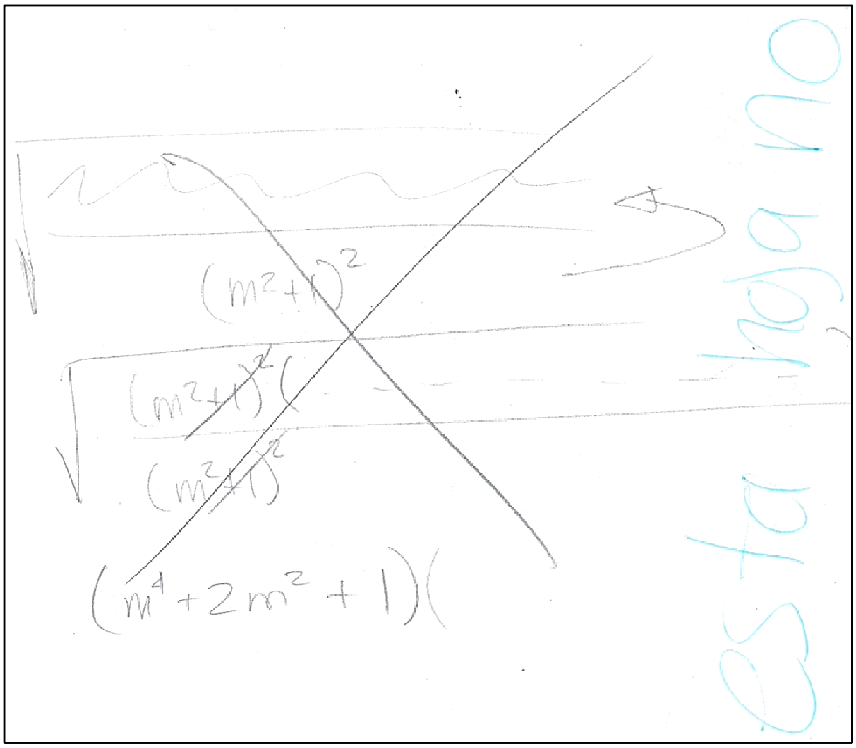


Fig. ***E.D.9***

El estudiante replantea el problema y en esta ocasión identifica los coeficientes que tentativamente debe obtener para la cancelación correcta, esta nueva estrategia es puesta en práctica en la hoja siguiente y obtiene una respuesta que le resulta satisfactoria.

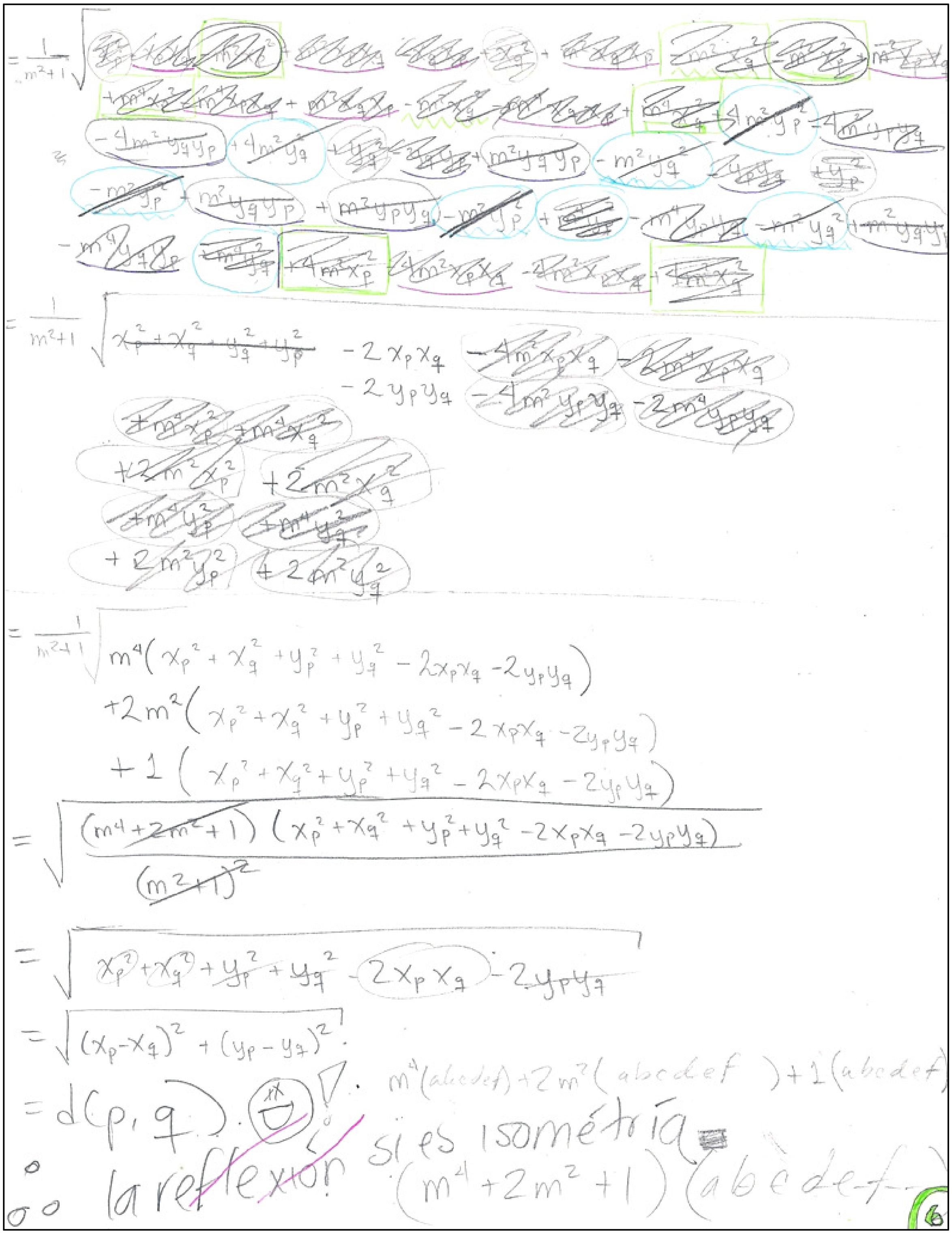
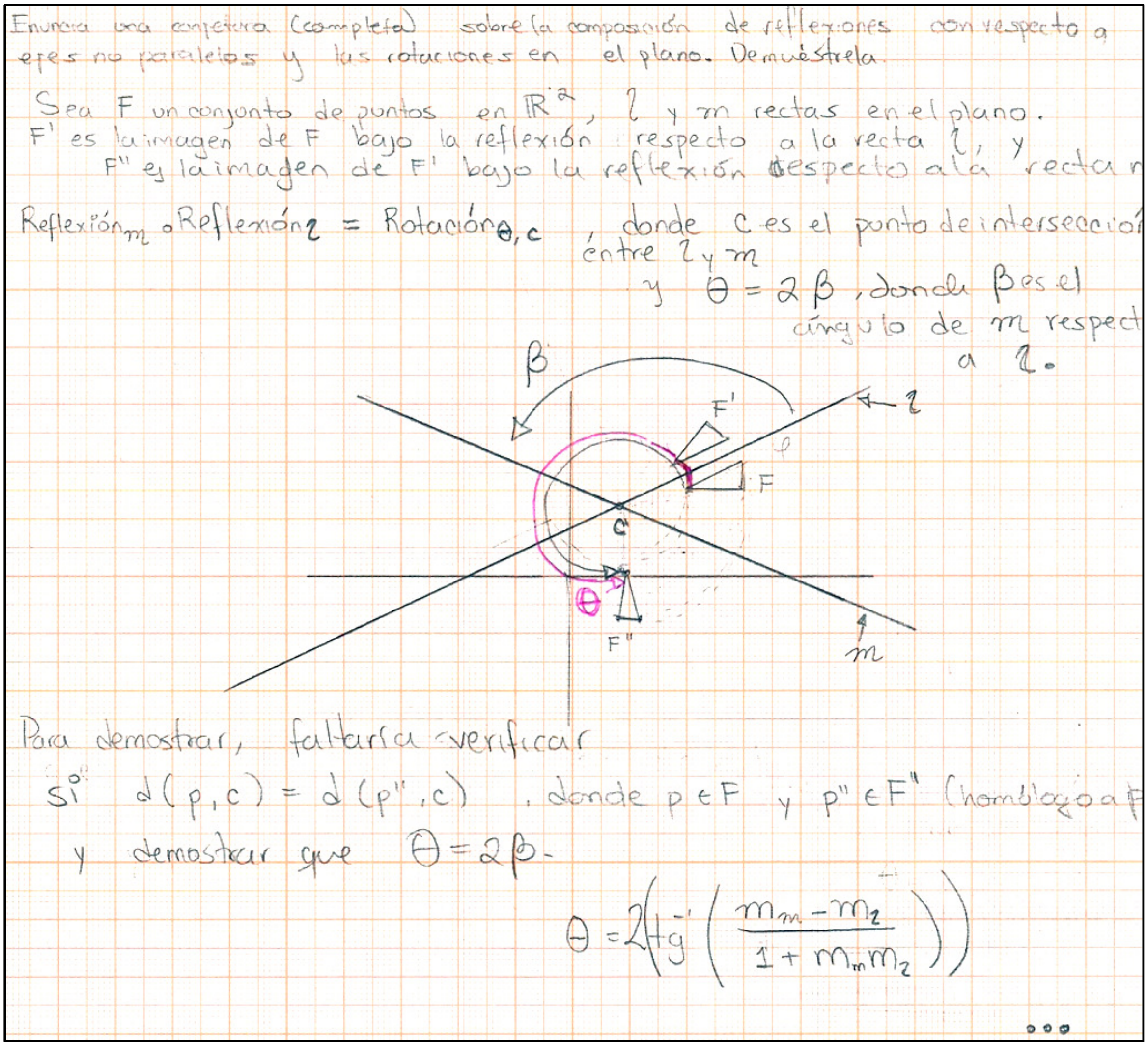


Fig. ***E.D.10***

Observando las respuestas a la pregunta 2, el método de resolución es constante; podemos describirlo como una manipulación simbólica de las versiones analíticas de las transformaciones (el registro utilizado aparenta ser el de mayor comodidad para el estudiante, al menos para organizar sus afirmaciones) y se etiqueta como una demostración formal transformativa.



Enuncia una conjetura (completa) sobre la composición de reflexiones con respecto a ejes no paralelos y las rotaciones en el plano. Demuéstrela.

Sea F un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$, l y m rectas en el plano.
F' es la imagen de F bajo la reflexión respecto a la recta l, y
F'' es la imagen de F' bajo la reflexión respecto a la recta m

$\text{Reflexión}_m \circ \text{Reflexión}_l = \text{Rotación}_{\theta, c}$, donde c es el punto de intersección entre l y m
y $\theta = 2\beta$, donde β es el ángulo de m respecto a l.

Para demostrar, faltaría verificar
si $d(p, c) = d(p'', c)$, donde $p \in F$ y $p'' \in F''$ (homólogo a p)
y demostrar que $\theta = 2\beta$.

$$\theta = 2\left(tg^{-1}\left(\frac{m_m - m_l}{1 + m_m m_l}\right)\right)$$

...

Fig. ***E.D.11***

Las preguntas 3 y 4 del examen, solicitan una justificación sobre la composición de reflexiones. Para el caso de ejes no paralelos, nuevamente recurre al plano analítico, donde elabora un escenario genérico y de donde surgen los elementos en los que basa su justificación. Comparando la estrategia con las utilizadas anteriormente, aquí se observa una intento de demostración de experimento mental transformativa (sin concretarse) y con respecto a sus compañeros, el estudiante parece tener claridad sobre los elementos faltantes (declarado en el enunciado “*faltaría verificar*[…]”) y desconocemos el por qué de su omisión.

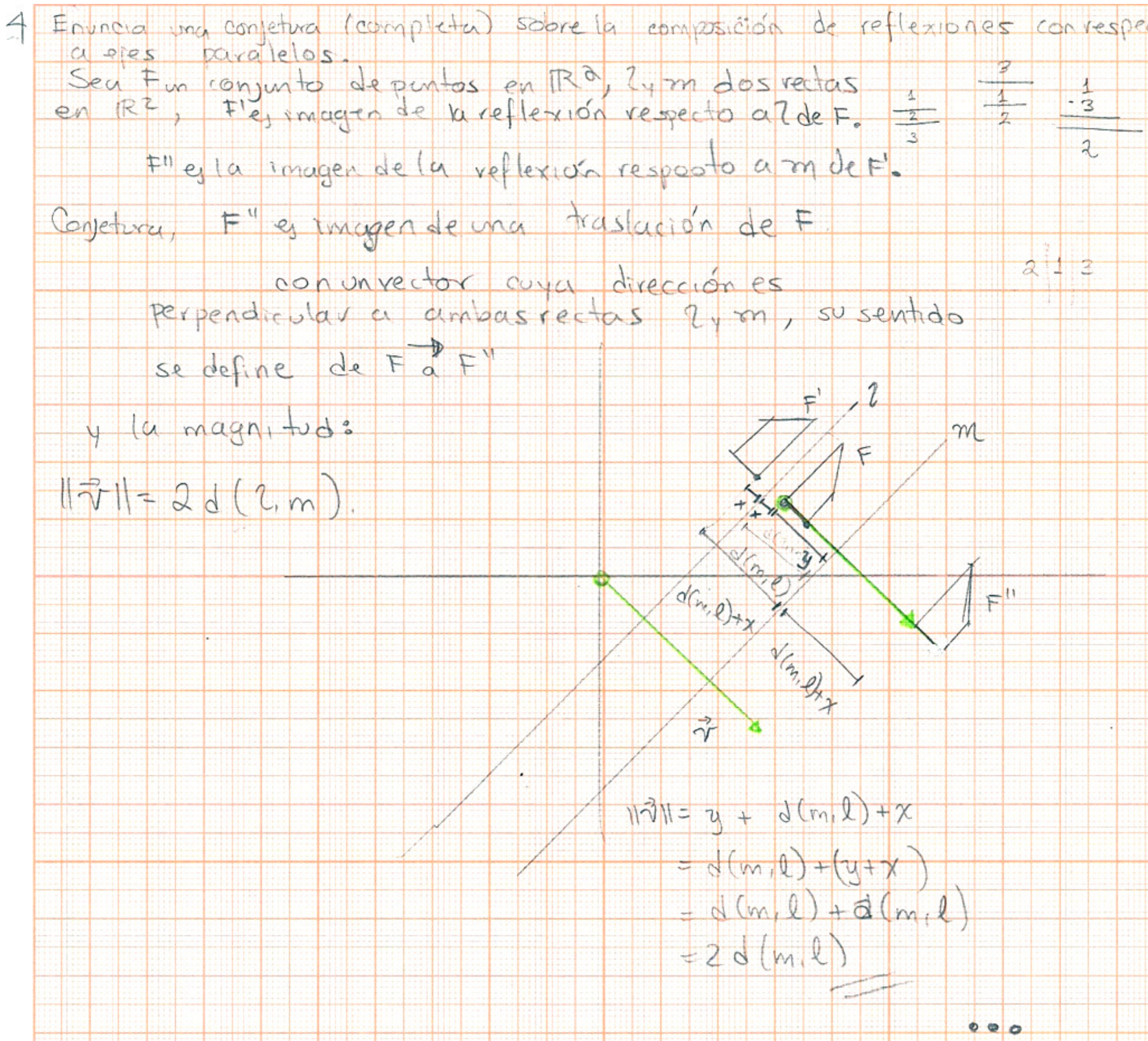


Fig. ***E.D.12***

En cuanto a la composición de reflexiones con ejes paralelos, el estudiante plantea una demostración que no parte de la definición de reflexión y sólo se limita a utilizar la propiedad de equidistancia de puntos homólogos al eje de reflexión. La justificación es incompleta al no incluir información sobre la dirección y sentido del vector de traslación (al menos no explícitamente), de manera similar a los casos B y C, se asigna una categoría de perceptiva de ejemplo genérico con inferencia, pero con una presentación de experimento mental transformativa.

El rendimiento del estudiante se clasifica en dos etapas, la primera es la evaluación de las preguntas 1 y 2 del examen; donde muestra interés en la precisión y generalidad de sus resultados. La segunda etapa se da en las preguntas 3 y 4, donde realiza una comprobación parcial (mencionando los elementos faltantes y sin un interés en culminar el trabajo). Al margen del contraste de los momentos, el estudiante respondió todo el examen con herramientas analíticas; convirtiéndose el registro donde muestra mayor comodidad.

OBSERVACIONES DEL EXAMEN

Las categorías de demostración usadas por los tres alumnos (B, C y D) son cualitativamente superiores a las usadas en las hojas de trabajo; los casos B y C específicamente, organizan sus afirmaciones con categorías deductivas (contrastando con las influencias empíricas utilizadas durante la resolución de las hojas de trabajo), las cuales aparecen de manera parcial e incompleta en la mayoría de los casos. Para el caso D, la presentación de las respuestas es la misma que la usada en las hojas de trabajo, con categorías deductivas en la mayoría de las preguntas.

La presentación deductiva de las demostraciones elaboradas, es un comportamiento explicado por Rodríguez (2006) mediante los esquemas de demostración; los cuales muestran una diferencia marcada entre los esquemas adheridos (influenciados en gran parte por la formación académica) y utilizados.

ESTRATEGIAS DE ARGUMENTACIÓN

Los análisis de las hojas de trabajo representan una descripción del contexto en el cual fueron respondidas las actividades. En el siguiente apartado nos limitamos al uso de las categorías de demostración y la incorporación con los niveles de Van

Hiele.

Los criterios para la relación de las demostraciones de Rodríguez con los niveles de Van Hiele, consisten en una comparación entre las categorías utilizadas por los estudiantes (ya mencionadas en el apartado anterior) y las categorías esperadas, estas últimas por la influencia del tipo de exploraciones propuestas y la redacción de las preguntas en las hojas de trabajo. En el siguiente cuadro, aparecen las categorías de demostración promovidas en el diseño de cada hoja de trabajo. Para facilitar la lectura de la tabla, se incluye en las primeras columnas el Nivel de Van Hiele y la hoja de trabajo correspondiente.

Nivel de Van Hiele	Hoja de trabajo	Categorías de demostración esperadas
1	1	Perceptivo empirismo Naif puro
	2	Perceptivo de experimento crucial puro
2	3	Inductivo de experimento crucial puro Inductivo de ejemplo genérico puro Inductivo de ejemplo genérico con inferencia
	4	Perceptivo de ejemplo genérico con inferencia Inductivo de ejemplo genérico con inferencia
	5 5b	Inductiva de ejemplo genérico con inferencia
3	6	Experimento mental transformativa
	7	Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa
	8	Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa
	9	Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa
	10	Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa
	11	Inductiva de empirismo Naif con inferencia* Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa Formal transformativa
4	12	Formal transformativa Formal axiomática
1-2-3	Examen	LIBRE

(*) Categorías de demostración de apoyo (utilizadas para exploraciones)

Para usar la tabla como herramienta de análisis, es conveniente diferenciar entre las categorías de demostración y las técnicas de exploración en preguntas concretas, con la expectativa de generar incertidumbre en las conclusiones de los estudiantes y la construcción de una categoría de demostración apropiada para el nivel.

Considerando la organización de las demostraciones, los estudiantes tienen un desempeño distinto para cada Nivel. Siendo consistentes con los análisis de las hojas de trabajo, a continuación se presentan los resúmenes de las categorías de demostración usadas por los estudiantes y comparadas con las categorías pre-establecidas; además se incluye información sobre los perfiles de los alumnos y comportamientos sistemáticos, con la intención de ampliar la panorámica del trabajo y presentar una investigación de mayor utilidad para el lector.

Caso A

El estudiante fue asignado con adquisición baja del nivel 3, las categorías de demostración utilizadas fueron de tipo empírico, salvo una plasmada en el nivel anteriormente mencionado (Experimento mental transformativo). Una actitud sistemática del estudiante durante la fase tres de cada nivel, fue lo poco participativo y las modificaciones constantes de las técnicas de exploración. Relacionado con éste comportamiento, el estudiante imitaba de manera recurrente las estrategias de exploración utilizadas por sus compañeros, sin una claridad en cuanto a la pertinencia de su uso ni las limitantes que implicaban. Las categorías de demostración usadas en cada nivel, las podemos organizar de la siguiente manera:

<table>
<tr><td rowspan="3">CASO
A</td><td>**Nivel 1**</td><td>Perceptivo de ejemplo genérico puro*</td></tr>
<tr><td>**Nivel 2**</td><td>Perceptivo de ejemplo genérico puro*
Inductivo de ejemplo genérico puro</td></tr>
<tr><td>**Nivel 3**</td><td>Perceptivo de ejemplo genérico puro*
Experimento mental transformativa
Inductiva de ejemplo genérico puro*
Inductiva de ejemplo genérico con inferencia</td></tr>
</table>

	Nivel 4	**EXCLUIDO DE LA EXPLORACIÓN**
	Examen	**NO ENTREGÓ**

(*) Categorías de demostración no promovidas en el Nivel
(**) Categorías utilizadas parcialmente, iniciadas y no concretadas

Las categorías muestran la inclinación hacia el trabajo de tipo empírico y la no entrega del examen nos impide contrastar su trabajo en un escenario de mayor exigencia.

Caso B

El estudiante fue el más afectado por la grabación de las sesiones, ya que en la mayoría de las ocasiones prefería esconderse tras sus compañeros o utilizando objetos (hojas de papel, mochilas, etc.), su inhibición es una posible justificación del bajo rendimiento en la fase 3. Las discusiones grupales contaron con poca participación del estudiante (sobre todo en las sesiones destinadas a la construcción de definiciones). Por lo tanto, para evaluar el comportamiento del alumno, sería conveniente observarlo en una sesión ordinaria.

El caso B fue asignado con adquisición baja del nivel 3, sus demostraciones son de tipo empírico durante la resolución de las hojas de trabajo. El desempeño del estudiante se vio modificado al responder el examen final, ya que el tipo de pruebas muestra intentos superiores a los usados en las hojas de trabajo, pero sin dejar de ser influenciado por sus respuestas originales. El tipo de pruebas para cada nivel (y el examen), fueron las siguientes:

CASO **B**	**Nivel 1**	Perceptivo de ejemplo genérico puro
	Nivel 2	Perceptivo de ejemplo genérico puro* Inductivo de ejemplo genérico puro
	Nivel 3	Perceptivo de ejemplo genérico puro* Inductiva de ejemplo genérico puro* Inductiva de ejemplo genérico con inferencia
	Nivel 4	**EXCLUIDO DE LA EXPLORACIÓN**
	Examen	Perceptivo de ejemplo genérico con inferencia Experimento mental transformativo**

(*) Categorías de demostración no promovidas en el Nivel
(**) Categorías utilizadas parcialmente, iniciadas y no concretadas

Durante el examen, evidencia la diferencia entre los esquemas adheridos y usados, reservando la organización deductiva y la declaración de implicaciones como necesarias en una "*Demostración*". Éste papel posiblemente se debe a la influencia de sus cursos avanzados de licenciatura (durante la exploración era estudiante activo de " Análisis Matemático 1").

Caso C

El estudiante se mostró interesado en las actividades, constantemente participativo y con la mejor disposición para completar las hojas de trabajo. En la mayoría de las discusiones grupales asumía el rol de líder, involucrándose tanto para compartir sus respuestas como para comprender las usadas por sus compañeros.

Las pruebas usadas en la resolución de las hojas de trabajo y el examen fueron las siguientes:

CASO **C**	**Nivel 1**	Perceptivo de ejemplo genérico puro
	Nivel 2	Perceptivo de ejemplo genérico puro* Inductivo con ejemplo genérico puro
	Nivel 3	Perceptivo de ejemplo genérico con inferencia* Experimento mental transformativa Inductiva de ejemplo genérico puro* Inductiva de ejemplo genérico con inferencia Formal transformativa**
	Nivel 4	Autoritarias-Rituales (internet)* Perceptivo de ejemplo genérico puro* Inductivas de ejemplo genérico con inferencia*
	Examen	Perceptivo de ejemplo genérico con inferencia Experimento mental transformativo**

(*) Categorías de demostración no promovidas en el Nivel
(**) Categorías utilizadas parcialmente, iniciadas y no concretadas

Su característica en el desarrollo de las hojas de trabajo es lo sistemático de sus exploraciones y la iniciativa ante los desafíos; incluso asumía las preguntas hechas al grupo como propias. La constante exploración y los resultados satisfactorios obtenidos, influyó en las categorías de demostración presentadas en las hojas de trabajo y, de manera similar al caso B, en su examen organiza sus pruebas de manera contrastante e inconclusa por las influencias de las exploraciones, o la no interiorización de éstas.

Aunque alcanzó una adquisición baja-media del nivel 4, las exploraciones (empíricas en su mayoría) eran la base de sus afirmaciones, pero con una variedad de estrategias considerable.

Caso D

La variedad de herramientas matemáticas y el compromiso constante de precisión fueron sus características centrales en las distintas sesiones, el estudiante no se limitaba al tipo de herramientas requeridas en las hojas de trabajo e incorporaba herramientas de mayor alcance o de niveles de razonamiento superior. Las discusiones grupales no contaron con mucha participación, pero cuando fue requerida lo hacía de manera aceptable y muy atinada, dándole claridad al resto de sus compañeros.

El alcance de su trabajo fue etiquetado como adquisición alta de nivel 4 y su desempeño fue bastante prometedor desde la aplicación del examen de diagnóstico. Las exploraciones eran planteadas en un ambiente gráfico (con trazos de apoyo o dibujos ilustrativos), pero el estudiante plasmaba sus resultados en demostraciones deductivas, en su mayoría. Las categorías utilizadas fueron las siguientes:

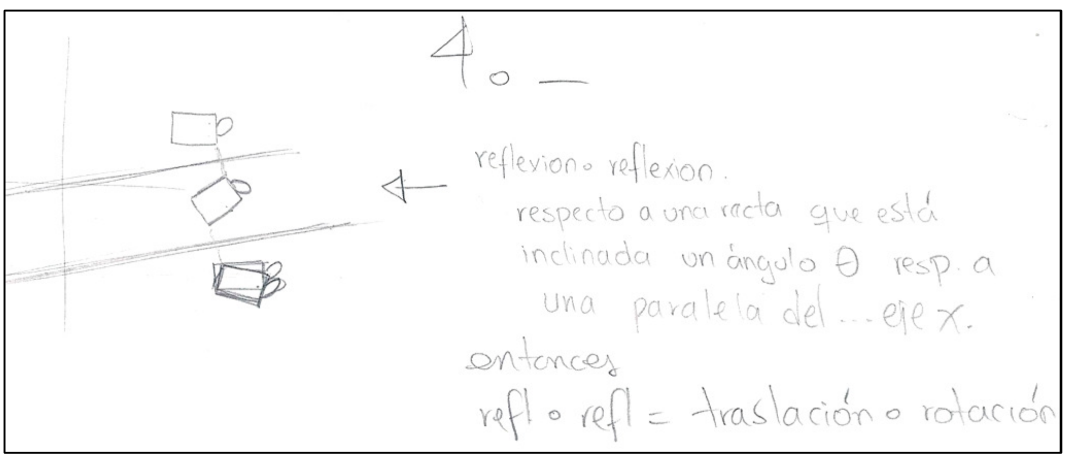
CASO **D**	**Nivel 1**	Perceptivo con ejemplo genérico puro Inductiva de ejemplo genérico con inferencia*[12]
	Nivel 2	Inductivo con ejemplo genérico con inferencia

[12] La categoría de demostración es superior a la requerida para responder a la hoja de trabajo

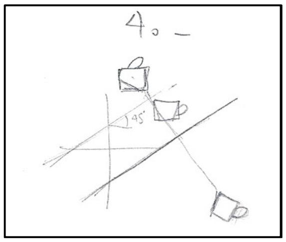
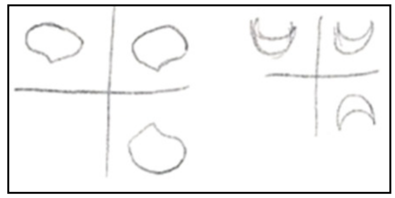
	Nivel 3	Perceptivo con ejemplo genérico puro* Experimento mental transformativa Inductiva de ejemplo genérico con inferencia** Formal transformativa
	Nivel 4	Perceptivo de ejemplo genérico puro* Inductiva de ejemplo genérico con inferencia* Formal transformativa
	Examen	Perceptiva de ejemplo genérico con inferencia Formal transformativa Experimento mental transformativa**

(*) Categorías de demostración no promovidas en el Nivel
(**) Categorías utilizadas parcialmente, iniciadas y no concretadas

El estudiante fue el único en utilizar demostraciones formales transformativas y muy cerca de manejar axiomáticas (categoría de mayor complejidad, entre las opciones). El rendimiento del caso D fue superior a sus compañeros en la mayoría de las sesiones, inclusive durante el diagnóstico aplicado. Su aprovechamiento en el examen y las aportaciones en las primeras discusiones grupales fueron determinantes para incluirlo como objeto de estudio (considerando los criterios de selección de casos). A continuación se incluyen algunas conjeturas redactadas en el examen diagnóstico.



La composición de reflexiones se trabaja de manera visual y relacionada con el eje de abscisas. El caso D fue el único estudiante en identificar dicha composición (e inclusive utilizarla en la hoja de trabajo 7), con apoyo de distintas construcciones.

Los trazos se mantienen durante la aplicación de la secuencia, pero sólo en el examen de diagnóstico el estudiante usa argumentos de naturaleza perceptiva como suficientes.

EVALUACIÓN FINAL SOBRE LAS DEMOSTRACIONES SOLICITADAS

Las categorías de demostración utilizadas en los primeros Niveles de razonamiento, fueron consistentes con las esperadas, previo a la aplicación de la secuencia. El cambio surgió a partir del Nivel 3, donde los estudiantes mostraban mayor comodidad con las pruebas empíricas, sin importar la modificación de la redacción de las hojas de trabajo. El caso D fue el único en superar las expectativas sobre las categorías de demostración, con incorporaciones constantes de propiedades de las transformaciones y herramientas matemáticas ajenas al trabajo propuesto. El resto del salón limitaba sus justificaciones a las exploraciones sugeridas.

A partir del tercer Nivel de razonamiento, se observa una diversificación entre las categorías de demostración, relacionadas con el manejo de las herramientas matemáticas y la discriminación de su uso. Aunque las exploraciones parten de categorías de demostración similares, solamente el caso D recurrió a argumentos deductivos para concretar sus respuestas (el estudiante estaba en mejores condiciones por la variedad de objetos matemáticos con los que dispone y mostraba preferencia hacia los métodos analíticos). Por otra parte, el desempeño de los casos A, B y C, se vio afectado por las pocas herramientas matemáticas y la poca claridad de las que dispone.

Particularmente, la hoja de examen mostró variedades de lenguaje, ya que durante la resolución del examen combinaron encadenamientos puramente deductivos (axiomática material y formal, en ocasiónes indistintamente con experiencias de la exploración (equivalente a argumentos plausibles, muy similares a los usados durante las discusiones grupales o para compartir sus exploraciones). Ante la variedad de la naturaleza de los argumentos, resulta complejo diferenciar las demostraciones de las exploraciones (para el estudiante) .

En la terminología de Rodríguez (2006) el problema se describe como una diferencia entre los esquemas de demostración, particularmente el esquema adherido y el utilizado. El estudiante con mejor desempeño (caso D), es el único en mostrar una similitud entre dichos esquemas; mientras que los casos B y C utilizaron categorías deductivas solamente en las actividades del examen, recurriendo a estrategias empíricas para responder en las hojas de trabajo. El cambio de rol del tipo de estrategias y organización está relacionado con el peso que los estudiantes le asignaron a la palabra "*demostración*", lo cual influye directamente en el tipo de tarea que realizan y el cómo es validada (un explicación plausible es la formación escolar de la Licenciatura en Matemáticas y el tipo de pruebas que han asumido como válidas en sus distintos cursos).