

CAPÍTULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La intención del siguiente apartado se concentra en dos direcciones: La primera, es la descripción general de los elementos utilizados para evaluar el pensamiento geométrico de los estudiantes, asignado con ello un subnivel de Van Hiele. El segundo foco de interés, contempla los medios para realizar el análisis de la información, las estrategias para recolectarla y los fines perseguidos por cada instrumento.

ESTRATEGIAS PARA EL DESARROLLO DEL TRABAJO

El interés de la investigación es identificar las pruebas usadas para justificar afirmaciones en matemáticas, es por ello conveniente una metodología de investigación con un enfoque cualitativo de los resultados, apoyada en un estudio de casos. La dinámica planteada es la elaboración e implementación de diversas hojas de trabajo, con el fin de conseguir información sobre la noción de prueba utilizada por los estudiantes.

Considerando que la herramienta de recopilación no se puede limitar a un examen o prueba (ya que nuestro interés no son las soluciones de los problemas sino las estrategias de resolución y los intentos para validar afirmaciones), fue necesario el diseño de distintas hojas de trabajo, que promuevan la elaboración de conjeturas concretas y la oportunidad de validarlas. Con la finalidad de evitar la monotonía y facilitar exploraciones, en algunas actividades se utilizaron hojas de plástico transparente y archivos prediseñados en software de geometría dinámica (GeoGebra).

Hojas de trabajo

Para la temática de las hojas de trabajo se seleccionó el tópico de isometrías en el plano, por las familiaridades visuales que ofrece y el enfoque formal que permite abordar. Los problemas seleccionados se relacionan con la construcción del grupo de isometrías en el plano, mediante un acercamiento que permita al estudiante involucrarse en el proceso exploración-conjetura-demostración de distintas propiedades.

El diseño de las actividades imita el modelo de trabajo presentado por Chacara (2004), el cual esquematiza cuadros globales de cada nivel de razonamiento de Van Hiele (donde se detallan las fases de aprendizaje para temas concretos) y acordes a principios constructivistas (donde los estudiantes son activos en la realización de actividades y el uso de discusiones constantes para promover asimilaciones y reacomodos del conocimiento).

El tema que hemos seleccionado para trabajar es el grupo de isometrías en el plano, partiendo del concepto de traslación. Enseguida mostramos un par de tablas comparativas, donde la primera presenta el desarrollo del primer nivel para el tema de “Reflexión”, en los términos de Chacara; mientras que en la segunda, aparece el cuadro esquemático para el mismo primer nivel, pero sobre el tema de “traslación”, el cual es utilizado para definir nuestra propuesta.

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele y principios del constructivismo.

TEMA: "Reflexión" (Nivel 1)

NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 1	Fase 1	El estudiante se observa a través de un espejo. Sigue observándose en el espejo pero ahora haciendo algunos movimientos frente a él. Lo mismo hace utilizando otros objetos y figuras.
	Fase 2	El profesor pide a los alumnos otros ejemplos de objetos que parecieran reflejarse en un espejo (por ejemplo, el uso del papel carbón). Sin utilizar el espejo (sustituirlo por un marco con vidrio transparente) observarse entre parejas y hacer movimientos haciendo de cuenta que uno es la imagen del otro (frente al supuesto espejo).
	Fase 3	Los estudiantes discuten entre sí lo observado y cada uno escribe sus conclusiones.
	Fase 4	Se les da a los estudiantes una hoja con varias figuras. Los alumnos deben aparear las que pueden tomarse una como imagen reflejada de la otra, con respecto a un espejo imaginario. El alumno deberá justificar sus respuestas.
	Fase 5	El profesor induce que el estudiante resuma lo que se ha observado: - En qué forma están colocadas las figuras. - Qué características mensurables tienen los objetos y sus reflejos.

ISOMETRÍAS EN EL PLANO

Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele.

TEMA: “Traslación” (Nivel 1)

NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
<i>Nivel 1</i>	Fase 1	El estudiante manipula imágenes hechas sobre hojas de plástico transparente (y hojas blancas, en algunos casos), deslizando y reflexionando sobre las direcciones del desplazamiento.
	Fase 2	El profesor pide a los alumnos que manipulen las hojas de plástico, deslizándolas en distintas direcciones para identificar patrones de traslación, además de cuestionar sus observaciones.
	Fase 3	Los estudiantes discuten sobre estrategias para discriminar entre figuras trasladadas y no trasladadas, con la finalidad de identificar propiedades de manera visual.
	Fase 4	Mediante el uso de hojas de papel y figuras que teselan, se le pide a los estudiantes que completen el cuadro deslizando las hojas en distintas direcciones.
	Fase 5	El profesor induce al estudiante a resumir lo observado, enfatizando: <ul style="list-style-type: none"> - El uso de traslaciones para la construcción de figuras. - La conservación del tamaño y la forma de las figuras. - La capacidad de realizar traslaciones de manera directa, mediante el deslizamiento de acetatos y hojas. - Identificación y realización de traslaciones en distintas direcciones. - La utilización de la terminología básica: traslación, vector, recta, etc. - La diferenciación entre figuras trasladadas y no trasladadas (mediante justificaciones visuales).

El resto de cuadros esquemáticos fueron remitidos al anexo 1, las tablas son las correspondientes a los niveles 2, 3 y 4.

La evaluación del nivel de Van Hiele fue considerada en el diseño de las distintas actividades, con la clara finalidad de interpretar apropiadamente el modelo y generar un instrumento testigo de la actividad mental realizada por el estudiante. En la tabla que relaciona las corrientes teóricas centrales, es notorio encontrar varios vacíos que pueden ser interpretados como la inexistente correspondencia entre subniveles de Van Hiele y las categorías de demostración de Rodríguez; por ello aclaramos que los huecos serán llenados mediante los distintos matices observables en cada categoría de demostración.

El trabajo de Gutiérrez (1991) es usado como guía para la asignación de los subniveles de Van Hiele, la estrategia consiste en plantear actividades y catalogar las respuestas de los estudiantes con base en lo percibido en las mismas. Las distintas opciones esperadas son:

0. No se responde la pregunta o la respuesta no puede ser codificada (no se entiende).
1. La respuesta indica que el estudiante es principiante en la problemática y no da información de un nivel superior.
2. Trabajo insuficiente o erróneo para responder a la pregunta, en sus respuestas se perciben razonamientos y resultados reducidos o incorrectos.
3. Las respuestas son correctas pero el trabajo para resolverlas fue escaso, deja ver un nivel de razonamiento inferior al nivel esperado. Las explicaciones, procesos de razonamiento y resultados son insuficientes (incompletos).
4. Mezcla de respuestas correctas e incorrectas, que reflejan características de dos niveles de Van Hiele consecutivos (con procesos claros de razonamiento y justificaciones aceptables).
5. Sus respuestas son incorrectas, manteniéndose solamente en un nivel de razonamiento, las respuestas que presenta son razonamientos completos pero incorrectos o correctos que no llegan a la solución del problema indicado.
6. Las respuestas son correctas dentro de un nivel de razonamiento, pero con justificaciones escasas.
7. Las respuestas son correctas, completas y suficientemente justificadas, reflejando la apropiación de un nivel de razonamiento.

Es notorio que las respuestas han sido enumeradas según el grado de satisfacción identificado, las cuales se relacionan con la adquisición de los niveles de Van Hiele de la siguiente manera: Tipo 0 y 1 para adquisición nula, 2 y 3 para la adquisición baja, el tipo 4 para representar la fase intermedia, 5 y 6 para la adquisición alta y el tipo 7 para la adquisición completa del nivel.

Software de Geometría Dinámica

Pensando en generar un ambiente apropiado para la elaboración de conjeturas, se optó por el uso de GeoGebra, con la intención de facilitar una exploración de numerosos ejemplos que permitan a los estudiantes desarrollar sus habilidades de visualización. Otra de las ventajas del uso del software consiste en la rapidez, comparada con escenarios de “lápiz y papel”, para realizar las manipulaciones.

Dentro de las desventajas para la investigación, Romero (2010, pp. 21-22) menciona lo siguiente:

*“Otro efecto secundario del uso de representaciones dinámicas es que al proveer a los estudiantes de evidencias muy directas de los hechos analizados, se inhibe la necesidad de demostraciones y argumentaciones. Es frecuente que los estudiantes, principiantes o avanzados, perciban muchas situaciones como evidentes por sí mismas y afirmen que éstas no necesitan demostración alguna ya que la proposición que se les pide demostrar **se ve en pantalla que es cierta...** []... Los estudiantes suelen tomar como suficiente una exploración, muchas veces no sistemática, para decidir si una proposición es verdadera o no”.*

Tomando en cuenta la afirmación de Romero, se optó por incluir como herramienta metodológica el uso de GeoGebra, con el propósito de facilitar las fases de exploración y conjetura, pensando en promover la búsqueda de los elementos necesarios para elaborar demostraciones.

UBICACIÓN DE LAS HOJAS DE TRABAJO POR NIVELES Y FASES

Nivel 1

Las hojas de trabajo 1 y 2 son actividades que se encuentran ubicadas en el primer nivel de razonamiento, representan a una primera etapa de exploración, en donde se promueve un acercamiento a las traslaciones mediante experiencias físicas (traduciendo la noción de traslación a deslizamientos en el plano). Durante la **Hoja de trabajo 2** se cuestiona al estudiante sobre características visuales (desde una perspectiva global), en un intento de describir las traslaciones y diferenciarlas de “otras” transformaciones (o combinaciones de ellas). Las hojas de trabajo 1 y 2 tienen como objetivo que el alumno pueda observar:

- ❖ A los segmentos de recta como una forma manual de trasladar figuras, identificando a los segmentos como rieles que guían el deslizamiento.
- ❖ Las características mensurables entre los objetos y su traslación (enfaticando en el mantenimiento de la inclinación de las figuras y el orden de los elementos que las conforman).
- ❖ A las traslaciones como isometrías (mediante la conservación del tamaño y forma).

En cuanto a las fases del modelo de Van Hiele, podemos describirlas mediante el uso de la siguiente tabla. En la primera columna se menciona la hoja de trabajo a la que nos referimos y en la segunda hacemos una breve descripción de las fases trabajadas en cada hoja, así como los objetivos perseguidos (a partir de ahora utilizaremos una tabla para describir cada nivel).

HOJA DE TRABAJO	DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES Y FASES DE APRENDIZAJE
1	La hoja de trabajo 1 no habla de traslaciones, sin embargo presenta problemas sobre deslizamientos y cuestiona a los estudiantes sobre movimientos que permiten generarlos (haciendo alusión a traslaciones de manera implícita).

	<p>Para esta sección las fases abordadas son las etiquetadas como 1, 2 y 3 (Aclarando que la fase de <i>explicitación</i> no se concluye, sino hasta el final de la Hoja de trabajo 2).</p> <p>En las últimas preguntas se espera que abonen en la <i>integración</i> (fase 5), registrando las bases por escrito de observaciones importantes.</p>
2	<p>Una vez concretadas las estrategias para identificar deslizamientos simples que generen traslaciones específicas, se ponen a prueba los métodos creados por los estudiantes e inician con el uso de notación y reflexión sobre características que permiten identificar las traslaciones visualmente.</p> <p>La hoja se corresponde con las fases 3, 4 y 5, dando seguimiento a las reflexiones de la Hoja de trabajo 1 (en cuanto a las fases 3 y 5). Para la <i>orientación libre</i> (fase 4), se plantea el problema inverso a la primer hoja de trabajo, el cual consiste en diseñar un método de trasladar figuras a través de un vector dado (todo el trabajo está planteado para resolverse solamente con el uso de geometría sintética).</p>

Nivel 2

Las hojas de trabajo 3, 4 y 5 (además de la actividad 5b, incorporada para verificar las conclusiones de las hojas anteriores) son actividades que se encuentran ubicadas en el segundo nivel de razonamiento y pretenden enfatizar las propiedades concretas de las traslaciones (las cuales fueron utilizadas implícitamente en las actividades anteriores), también se utiliza el GeoGebra con la intención de permitir al estudiante la elaboración de conjeturas sobre el papel del vector de traslación (a través de la manipulación libre en archivos diseñados y no limitando la exploración a trabajo de lápiz y papel) y cerrando con la introducción y desarrollo de notación matemática con mayor potencial para el

desarrollo matemático de los estudiantes. Las hojas de trabajo 3, 4 y 5 tienen como objetivo que el alumno descubra la importancia del vector de traslación, y con ello:

- ❖ Descubra el paralelismo entre segmentos formados por cada punto P y su homólogo P' (de la figura trasladada) y la congruencia entre los segmentos y el vector de traslación.
- ❖ Confirme que la inclinación de las figuras no cambia, mediante un estudio del paralelismo de segmentos homólogos de un objeto y su traslación.
- ❖ Realice traslaciones mediante las coordenadas de un vector, además de composiciones de traslaciones. Identificando la conmutatividad de la composición.

HOJA DE TRABAJO	DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES Y FASES DE APRENDIZAJE
3	<p>En la actividad, el estudiante confirma características básicas de las traslaciones como: La inclinación de las figuras es respetada por la transformación (ya que se solicita la atención del alumno al paralelismo de segmentos homólogos) y la autonomía del vector de traslación (omitiendo el trabajo práctico elaborado por el estudiante en el nivel anterior).</p> <p>Corresponde a las fases 1, 2, 3 y 4 del nivel 2 (con la aclaración de que las fases de <i>explicitación</i> y <i>orientación libre</i> se inician en el plano sintético y se concluyen en el plano cartesiano, para la finalidad de explorar y responder las interrogantes planteadas mediante el uso de una notación más apropiada).</p>
4	<p>En la mayor parte de la actividad se trabaja con geometría dinámica. El archivo de GeoGebra asociado, permite verificar las observaciones hechas en el plano sintético y redefinirlas mediante el uso de los valores numéricos del vector de</p>

	<p>traslación.</p> <p>Se trabaja la fase 4 del nivel con mayor profundidad, orientando las observaciones a características que puedan verificarse con el uso de la geometría analítica. Además, aporta reflexiones de la fase 3 y 5.</p>
5	<p>Se pone a prueba la identificación de traslaciones mediante el uso de las características solicitadas previamente, además de iniciarse en el análisis de la propiedad de cerradura para la composición de traslaciones.</p> <p>Se concluyen con las fases 3 y 4, además de orientar la etapa de <i>integración</i> (fase 5) en términos de geometría analítica.</p>
5b	<p>Por medio de la manipulación del archivo de GeoGebra, se concreta la fase 5 en dos direcciones: La primera es el uso de coordenadas para los vectores y la elaboración de conjeturas sobre la composición de traslaciones es una traslación.</p>

Nivel 3

Para el nivel 3, se diseñaron 6 hojas de trabajo (de la número 6 a la 11) que comparten algunos elementos, tales como: la elaboración de conjeturas autónomas (fruto de exploraciones dirigidas), el poco trabajo en escenarios concretos, cuestionamientos de tipo teórico planteados a partir de ejemplos generales y el uso sistemático de software de geometría dinámica (GeoGebra) para la exploración de nuevos escenarios y verificación de conjeturas hechas previamente. Las hojas de trabajo tienen como objetivo que el alumno conozca las distintas transformaciones en el plano y descubra lo que permite caracterizar a cada una, con la intención de profundizar en:

- ❖ La capacidad de identificar vectores de traslación, ejes de reflexión o centros de giro (según sea el caso), además del efecto de alteraciones de dichos elementos en las transformaciones en el plano.
- ❖ La cerradura como propiedad del conjunto de traslaciones en el plano y la exploración de dicha propiedad en el resto de las transformaciones, con la finalidad de promover la construcción de condiciones necesarias para que una transformación sea cerrada bajo la composición, o bien, la construcción de contraejemplos que no lo sean.
- ❖ El uso de justificaciones más elaboradas en sus observaciones (con respecto a las hechas previamente), además de expresarlas de una manera más formal. (Considerando los recursos del nivel).

HOJA DE TRABAJO	DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES Y FASES DE APRENDIZAJE
6	Se solicita una reflexión profunda sobre la cerradura de la composición de traslaciones, sin el uso de ejemplos. La presente hoja de trabajo es considerada como fase 1 del nivel por la pretensión de plasmar por escrito los antecedentes del estudiante, concluidos a partir de las hojas de trabajo anteriores. De manera similar a las hojas anteriores, aporta reflexiones que serán reutilizadas para fundamentar y enriquecer las fases 3 y 5.
7	Se presenta otro tipo de transformaciones, con la finalidad de hacer una depuración de aquellas que conservan tamaño y forma (isometrías). Las fases trabajadas son la 1 y 5.
8	Trabaja la transformación de rotación, enfatizando los elementos que la definen. Las fases contempladas para esta hoja de trabajo parten de la exploración de ciertos elementos (fase 2), culminando en la elaboración de una definición para la transformación, refinada de

	<p>manera individual (fase 4) y grupal (fase 3).</p> <p>La hoja de trabajo culmina con la definición final que se asume para resolver el examen final (fase 5).</p>
9	<p>Trabaja la transformación de reflexión y el rol que juegan los elementos que la definen.</p> <p>Las fases contempladas para esta hoja de trabajo van desde aportar información que pueda ser utilizada como: Antecedente (fase 1), resumen para definir la transformación de reflexión (fase 5) y una exploración guiada (fase 2).</p>
10	<p>Representa la fase 4 por las intenciones de generar incertidumbre en los estudiantes a través del estudio de la composición de reflexiones en escenarios desconocidos para ellos.</p>
11	<p>Se generalizan las observaciones hechas sobre la composición de reflexiones en distintos escenarios y se espera que el estudiante sea capaz de resumir sus hallazgos con un lenguaje apropiado, la fase 5 es abordada por la hoja de trabajo 11; ya que pretende ser el punto de partida para el siguiente nivel.</p>

Nivel 4

Por las características de este nivel, es necesario evaluar comprensiones generales de las transformaciones en el plano, razón por la cual se utiliza solamente una actividad para evaluar el nivel (hoja de trabajo 12). Dicha hoja de trabajo utiliza el concepto de grupo como unidad integradora de las transformaciones en el plano, las cuales habían sido trabajadas de manera aislada hasta el momento. Las preguntas hechas durante la actividad concentran su atención en la verificación de las propiedades que definen el concepto algebraico de Grupo, el cual es solicitado a los estudiantes como punto de partida para ser

utilizado como guía de un análisis estructural. La hoja de trabajo 12 tiene como objetivo que el alumno profundice en el estudio de transformaciones en el plano, propiciado con ello:

- ❖ La vinculación de las isometrías en el plano mediante el concepto de Grupo, bajo la operación composición.
- ❖ La capacidad para definir las condiciones de cada transformación, las cuales permiten construir subgrupos del Grupo de Isometrías en el Plano.

HOJA DE TRABAJO	DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES Y FASES DE APRENDIZAJE
12	Las fases de aprendizaje trabajadas durante la resolución de la hoja de trabajo llevan un orden secuencial congruente con las preguntas planteadas a través de la misma. La primer pregunta tiene la intención de verificar el dominio requerido para resolver la hoja de trabajo (fase 1), las fases 2 y 4 se trabajan en las siguientes preguntas (por las instrucciones concretas dadas, en una primera instancia y la reflexión solicitada para la construcción de subgrupos), la fase 5 es contemplada en la pregunta sobre la verificación de las propiedades de Grupo en el conjunto de isometrías en el plano y la fase 3 se trabaja al enriquecer las conclusiones con la pregunta final de la actividad.

HERRAMIENTAS PARA LA RECOPIACIÓN DE INFORMACIÓN

Otras herramientas metodológicas, para recolectar y analizar la información (producto de la implementación del problemario), son las siguientes instrumentos:

- **Observación Directa:** El salón de clases es el medio ideal para observar y reflexionar sobre las acciones de los estudiantes con respecto al objeto de estudio. Como parte de la investigación se decidió hacer uso de la observación

en un ambiente real y para verificar el punto de partida contemplado y desempeños no considerados en los objetivos del trabajo.

Sobre las características de la observación, se considera participativa, por diversas intervenciones para orientar las discusiones y cuestionamientos a estudiantes en específico (para obtener mayor claridad sobre sus respuestas), y estructurada, por enfatizar la observación en las distintas afirmaciones y comentarios al respecto.

- **Videograbaciones:** Con el fin de evaluar y revalorar el desempeño de los estudiantes durante la aplicación de las distintas hojas de trabajo se recurrió a videograbaciones. Su inclusión en el proyecto radica en la captura de acciones y actitudes no expresables en las hojas entregadas. Además resulta de gran utilidad para contrastar las respuestas por escrito con la fase 3 (explicitación), complementándolas y facilitando un análisis objetivo.

Una vez hecha la selección de la muestra, la aplicación de las distintas actividades y simultáneamente la recopilación de información, el análisis deberá considerar la interpretación y contrastación conjunta de la información ofrecida por todos los instrumentos.

Como parte importante de las acciones metodológicas y previas a las de observación, se incorporaron en el capítulo anterior (capítulo 3), referencias documentales en dos sentidos: El primero, de corte histórico, con la finalidad de identificar las características de los distintos tipos de argumentación empleados a través del tiempo (dentro de la disciplina matemática), con la intención de relacionar los estadios con los niveles académicos transitados por el estudiante. Posteriormente, la revisión se concentró en las distintas concepciones de investigadores y profesores, en torno a la demostración y su papel en el salón de clases, con el objetivo de estar en condiciones de plantear una postura propia.

CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN Y CRITERIO DE SELECCIÓN DE CASOS

El estudio se realizó con los 8 alumnos de la clase de Geometría Moderna de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sonora (ciclo escolar 2010-2).

Con la finalidad de presentar un análisis representativo de la variedad de escenarios, se optó por un enfoque cualitativo de los resultados, apoyado en un estudio de casos. Para definir los casos concretos, con la aclaración que no se excluyeron al resto de los alumnos de las dinámicas planteadas en el grupo, se recurrió a los resultados de las hojas de trabajo (mediante la evaluación declarada en la metodología, utilizando los criterios señalados para asignar los subniveles de Van Hiele). La asignación de un subnivel específico a cada estudiante nos permitió generar estratos de acuerdo a su desempeño, eligiéndose 4 casos para la realización de un análisis detallado. Los criterios utilizados fueron los siguientes:

- a) **Nivel de desempeño de los estudiantes para los dos primeros niveles del modelo de Van Hiele.** El escenario para la exploración nos podría predisponer al supuesto de que estudiantes de la licenciatura en matemáticas de 4to a 6to semestre se mueven con relativa facilidad entre los niveles 3 y 4 de Van Hiele, pero por los intereses de la investigación no era apropiado suponer tal afirmación, es por ello que se consideró necesario partir de una etapa propedéutica que valide el nivel de Van Hiele en el que se encuentra, al menos para los primeros dos niveles. Para consideramos dos opciones: La primera es que los estudiantes hayan realizado las hojas de trabajo asignadas a dichos niveles (abarcando desde la hoja de trabajo 1 hasta la hoja 5b) o en su defecto, que las hojas completadas muestren una adquisición completa de los niveles 1 y 2 (lo cual será interpretado como un dominio de los mismos y facilidad para abordar el nivel 3).

- b) **Estratos basados en el desempeño.** Para que el panorama contemple las características de los distintos estudiantes que componen un grupo, se seleccionó un miembro de cada estrato (uno de bajo desempeño, uno de desempeño medio-bajo, uno de medio-alto y un último de alto desempeño), esperando facilitar la realización de análisis individuales y comparativos.

Decidimos omitir sus nombres, etiquetándolos con las letras A, B, C y D progresivamente.