# CAPÍTULO 2

# REFERENCIAS TEÓRICAS

En la primera parte del capítulo, se expone la visión en torno a lo que podemos entender por “Demostración Matemática”, esta referencia se considera necesaria no sólo para dar claridad a nuestra investigación, sino para apoyar los análisis, observaciones y recomendaciones. En una segunda parte y con la intención de exponer los antecedentes teóricos del trabajo, se presentan de forma sintética distintos trabajos que nos han permitido crear una concepción propia sobre las argumentaciones en matemáticas y el papel que desempeñan en el salón de clases.

Finalmente en un tercer apartado, se hace referencia a los elementos particulares que guían la investigación, enfatizando las aportaciones de Van Hiele (1957) y Rodríguez (2006), las cuales respaldan nuestra visión sobre la demostración matemática y lineamientos a seguir para su tratamiento en el aula. Como conclusión de este apartado, se incluye una interpretación sobre la incorporación conjunta de tales aportaciones y su uso en la investigación.

## LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

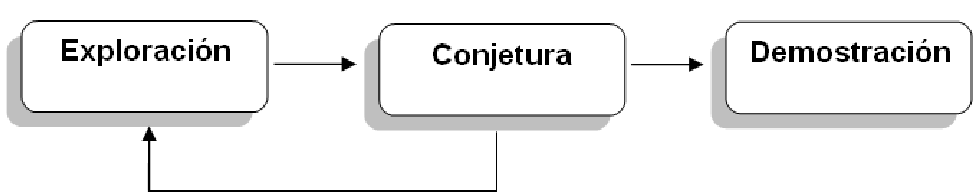
En cuanto al concepto de demostración, se asume la versión de N. Balacheff presentada por Acuña (2006, pp. 95) que dice: “*prueba es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. En la comunidad matemática sólo pueden ser aceptadas como pruebas las explicaciones que adoptan una forma peculiar, son una serie de enunciados organizados según reglas determinadas, un enunciado se conoce como verdadero o bien se deduce de los que lo preceden a través de una regla de deducción tomada de un grupo de reglas bien definidas, llamamos demostración a estas pruebas*”.

Pensando en los objetivos perseguidos por la investigación, es necesario tener claridad sobre dos conceptos que parecen entremezclase en el salón de clases: demostración y argumentación. La argumentación no es una demostración, su distinción se basa en el objetivo que persigue; mientras la argumentación pretende ser plausible y lograr convencer a los demás (presentándose por ello como una práctica discursiva espontánea, en la mayoría de los casos), una demostración tiene la intención de mostrar la veracidad de una proposición (de ahí proviene la necesidad de estar respaldado por pruebas con encadenamientos lógicos, por la validez implícita que conllevan).

La distinción de los términos, no sólo aportan precisión a la terminología; sino que además dan claridad en cuanto a los objetos de interés para el presente trabajo. Los argumentos se convierten en el antecedente relevante de las demostraciones matemáticas, siendo estas últimas el producto final esperado. En las siguientes secciones se presentan, de manera sintética, los antecedentes teóricos del trabajo; los cuales nos han permitido crear una concepción propia sobre las argumentaciones en matemáticas y el papel que desempeñan en el salón de clases.

***Proceso Exploración-Conjetura-Demostración***

Por la complejidad de las pruebas aceptadas en la comunidad Matemática, es conveniente asumir una postura sobre los elementos que entran en juego durante la construcción de las demostraciones. Trabajos de Acuña (1996) y Rodríguez (2006) consideran la no linealidad de la construcción de pruebas, identificando a la demostración como el producto final de un arduo proceso cognitivo. Una descripción común de los momentos que anteceden a la construcción de una demostración, es la presentada en el siguiente esquema:



El diagrama reconoce a las fases de Exploración y Conjetura como antecesoras de la construcción de demostraciones, además de considerar a la exploración como un apoyo recurrente que facilita el salto entre la elaboración de conjeturas y construcción de demostraciones.

Dependiendo de los objetivos perseguidos en clase o el nivel educativo, alguno de los momentos mencionados puede tomar un rol protagónico o, en su defecto, puede quedar excluido de las actividades promovidas; un ejemplo es la diferencia entre la educación media superior y las licenciaturas en ciencias exactas, considerando que en el nivel de preparatoria la matemática es una herramienta para resolver problemas, razón por la cual el interés está en las fases de exploración y conjetura de enunciados matemáticos, descartando la validez irrefutable de los mismos.

***El papel y las funciones de la demostración***

De Villiers (1993) considera distintas funciones de la demostración en el salón de clases, al no limitarla a procesos de *verificación*, asignada dentro de la disciplina matemática por sus lineamientos lógicos, o como metodología de *explicación* de resultados matemáticos, atribuida por los profesores durante su práctica laboral; además, considera la importancia de las demostraciones en el *descubrimiento* de nuevos resultados matemáticos (construidos por el estudiante), la *comunicación* de éstos entre los involucrados en la actividad escolar (maestro-alumno o, de mayor relevancia para nuestro estudio, alumno-alumno y alumno-maestro) y la *organización sistemática* de los resultados (propios de la influencia de Euclides).

Para realizar un trabajo que involucra demostraciones, es necesario rescatar los papeles relacionados al descubrimiento y comunicación de resultados matemáticos, intentando además identificar la organización sistemática utilizada por los estudiantes (explícita o implícitamente), permitiéndonos ver su concepción del conocimiento matemático (mediante el reconocimiento de los axiomas y lemas usados en la resolución de problemas). Aclarando la reflexión anterior, el manejo sugerido para el tratamiento de la demostración en el salón de clases, no debe omitir los papeles de verificación y explicación, usualmente trabajados, tan sólo no demeritar el resto de funciones de la *demostración matemática* en la formación escolar.

***Estadios de la Demostración Matemática***

Vargas (1998), plantea en su trabajo una visión retrospectiva del tipo de pruebas usadas en geometría, marcando tres grandes etapas de las demostraciones utilizadas por la comunidad matemática y claramente influenciadas por los objetivos perseguidos en cada momento histórico, las cuales son: Etapa intuitiva o ingenua (Siglo XXX al III A.C.), axiomática material (Siglo III A.C. al XIX D.C.) y axiomática formal (Siglo XIXC D.C. hasta hoy). Posteriormente, presenta argumentos convincentes para generalizar las etapas a distintas ramas de la Matemática, ejemplificando con el álgebra y la evolución de sus pruebas.

El criterio para la asignación de las fechas de corte entre las etapas, consiste en identificar los momentos claves de la disciplina que desembocaron en un cambio en los paradigmas de prueba aceptados. En un primer momento se hablan de pruebas empíricas, posteriormente aparece Euclides y la estructura deductiva influenciada por la intuición y el empirismo, y las últimas estrategias de prueba, mantenidas en la actualidad, son las utilizadas por la escuela Bourbaki, las cuales plantean una estrategia axiomática (leyes de inferencia a expresiones formales abstractas y sin contenido).

La forma de interpretar la evolución del concepto “demostración” se toma como influencia central de la presente investigación y las etapas como las fases prototipo para organizar un desarrollo plausible del tipo de demostraciones utilizadas por los estudiantes.

## ELEMENTOS TEÓRICOS CONCRETOS

Las corrientes teóricas que podemos destacar son: La teoría de Van Hiele (1957) y las aportaciones de los tipos de demostración de Rodríguez (2006). Van Hiele presenta en su trabajo (traducido e interpretado por Ángel Gutiérrez) una descripción sobre distintos niveles de comprensión en geometría, a partir de habilidades medibles de los estudiantes. En la actualidad, la teoría de Van Hiele ha sido generalizada a otras ramas de la Matemática y enriquecida con diversos principios cognitivos de corrientes educativas modernas, particularmente nos interesa resaltar la versión de Chacara (2004), quien ha trabajado con los niveles de razonamiento con principios constructivistas y a partir de los cuales fundamentamos el esquema del trabajo, tanto para explicar los resultados de las actividades como para organizar una manera adecuada de presentarlas.

Rodríguez presenta, por su parte, tipos de demostración para diferenciar los argumentos de los estudiantes en escenarios de lápiz y papel y software de geometría dinámica, los cuales representan, implícitamente, un avance gradual y de gran utilidad como clasificación de pruebas matemáticas.

### Teoría de Van Hiele (Van Hiele, 1957)

En el año de 1957 surge la teoría de Van Hiele, a partir de los trabajos de los esposos holandeses Pierre y Dina Van Hiele, en la cual aportan reflexiones sobre el por qué los alumnos tienen problemas para la comprensión de la geometría, sugerencias sobre el orden del contenido geométrico y las características de las actividades de aprendizaje de los alumnos. Las aportaciones más significativas de la teoría son: La distinción de cinco niveles de razonamiento por los que transita un estudiante durante el desarrollo de la comprensión geométrica y las fases de aprendizaje que permiten una apropiación de cada nivel.

A partir de las publicaciones originales, se presentaron varios trabajos donde se modificaba la versión tradicional del modelo, con la intención de hacer práctica su aplicación (Jaime, 1993; Gutiérrez et al, 1991), enriquecerlo con paradigmas propios de la época (Chacara, 2004) o generalizar su alcance a tópicos ajenos de la geometría (Navarro, 2002). Dado que consideramos que se rescatan los elementos fundamentales de la Teoría de Van Hiele, hemos decidido presentar la interpretación hecha por Chacara (2004), particularmente por la influencia del constructivismo que declara. Las características generales de cada nivel, son las siguientes:

*Nivel 1 (Reconocimiento)*

Los alumnos reconocen figuras visualmente por su apariencia global y se caracterizan por:

- Percibir los objetos en su totalidad y como unidades.
- Describir los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica con base a semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos.
- No reconocer explícitamente las componentes o propiedades de los objetos.
- A menudo usar propiedades visuales irrelevantes para identificar, comparar, clasificar o describir objetos.
- Una incapacidad para pensar en una variación infinita de un tipo particular de objetos (incapaces de generalizar resultados)
- Clasificar inconscientemente los objetos: por ejemplo, usando propiedades no comunes o irrelevantes para clasificarlos.
- Describir de manera incompleta a los objetos (en un intento de definir), como consecuencia de tomar condiciones necesarias (generalmente visuales) como condiciones suficientes.

*Nivel 2 (Análisis)*

Los alumnos comienzan a analizar las propiedades de los objetos y aprenden la terminología técnica apropiada para describirlos, pero no relacionan los objetos o las propiedades de éstos. Dentro de las características relevantes, los alumnos:

- Perciben los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no identifican las relaciones entre ellas.

- ❖ Pueden describir los objetos de manera informal mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.
- ❖ Deducen nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.
- ❖ Comparan explícitamente a los objetos en términos de sus propiedades.
- ❖ Evitan las inclusiones entre diferentes clases de objetos, con base en propiedades visuales.
- ❖ Clasificación de objetos únicamente en términos de una propiedad, por ejemplo, propiedades de los lados, ignorando otras propiedades como simetrías, ángulos y diagonales.
- ❖ Exhibición de un uso no económico de las propiedades de los objetos para describirlos (definirlos), en lugar de usar las propiedades suficientes.
- ❖ Un rechazo explícito de definiciones dadas por otros, por ejemplo el profesor o el libro de texto, en favor de sus propias definiciones.
- ❖ Un enfoque empírico para establecer la veracidad de una proposición, como el uso de la observación y la medición de diferentes dibujos.

*Nivel 3 (Clasificación)*

Los alumnos ordenan de manera lógica las propiedades de los objetos, utilizando cadenas cortas de deducción y comprenden las relaciones entre las figuras. El alumno de este nivel:

- ❖ Por medio del razonamiento informal, realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas.
- ❖ Describe las figuras de manera formal, es decir que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta (incluso es capaz de transformar definiciones incompletas en definiciones completas o formular definiciones económicas y correctas para un objeto).
- ❖ Hace uso explícito de la forma lógica "*Si...entonces"* en la formulación y tratamiento de conjeturas, así como el uso implícito de reglas lógicas como el *modus ponendo ponens (*Comprende los pasos individuales de un

razonamiento lógico de forma aislada, pero sin comprender el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración).

- No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por tal motivo, tampoco puede comprender la estructura axiomática de las matemáticas.
- Acepta y usa de manera espontánea conceptos nuevos.

Nivel 4 (Deducción)

Los alumnos comienzan a desarrollar secuencias largas de proposiciones y comienzan a comprender el significado de la deducción, el rol de los axiomas, los teoremas y las demostraciones. El alumno de este nivel se caracterizan por:

- Ser capaz de realizar razonamientos lógicos formales.
- Comprender la estructura axiomática de las matemáticas.
- Aceptar la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc.)
- Producir conjeturas de manera espontánea y esfuerzos autónomos por verificarlas deductivamente.

En la descripción hecha por Van Hiele, se plantea la existencia de un quinto nivel, cuya principal característica es la capacidad para manejar, analizar y comparar distintos sistemas axiomáticos. La consideración del nivel 5 de Van Hiele fue descuidada por distintas investigaciones ya que sólo era del alcance de profesionales en matemáticas y algunos estudiantes adelantados, lo restrictivo del público hizo poco práctica su incorporación en algunos trabajos.

***Características de los niveles de razonamiento de Van Hiele***

Dentro de las consideraciones que deben tomarse en cuenta al utilizar la Teoría de Van Hiele como modelo metodológico, es necesario mencionar las siguientes:

- El orden de avance de los alumnos es fijo; es decir, no se puede alcanzar un determinado nivel sin antes haber pasado por el anterior.
- Para situarse en un determinado nivel de pensamiento, es necesario exteriorizar los elementos que se manejaban como internos en el nivel

anterior. En otras palabras, lo que era intrínseco en el nivel precedente se vuelve extrínseco en el nivel actual.

- Cada nivel tiene su propio lenguaje, tanto en símbolos lingüísticos como en el tipo de relaciones que conectan esos símbolos, esto complica el entendimiento entre dos personas que se encuentran en niveles diferentes.
- Aunque la intención de los niveles es clasificar, los 5 niveles son características generales de las capacidades de los estudiantes, lo cual no quiere decir que si dos alumnos se sitúan en un mismo nivel tengan el mismo conocimiento, sino que son capaces de entenderse por la similar forma de razonar.

***Fases de Aprendizaje***

Como recomendación prescriptiva para los profesores, en cada nivel de Van Hiele se presentan 5 fases de aprendizaje que apoyan la concreción del nivel, además de promover un avance gradual al interior de cada uno de ellos. Las fases representan un esquema para organizar la enseñanza, con la intención de facilitar el alcance de un nivel de razonamiento de Van Hiele superior. Las fases a las que nos referimos son:

- *Información:* En esta instancia el estudiante es informado sobre el panorama general de las actividades a realizar, es decir, se plantean los objetivos buscados en el tema, el campo de investigación y el tipo de problemas a resolver (en términos que el alumno comprenda). En cuanto al profesor, esta fase es útil para averiguar los conocimientos previos con los que cuentan los alumnos (o su nivel de razonamiento), para reconocer su capacidad de desenvolvimiento ante determinadas tareas.
- *Orientación dirigida:* Por medio de material suministrado por el profesor y una serie de instrucciones definidas, se promueven diversas actividades para que el estudiante explore y descubra ciertos conceptos y propiedades fundamentales del área de estudio.
- *Explicitación:* Uno de los problemas de una exploración como la que se recomienda, es la variedad de símbolos y técnicas utilizadas, en esta instancia

es necesario acordar la simbología permitida y fomentar la expresión precisa de los alumnos. La fase 3 corresponde a la discusión grupal sobre la validez del trabajo hecho, es importante que la evaluación sea por parte de los alumnos con la menor interacción del profesor, ya que les permite reflexionar con mayor intensidad sobre la problemática en cuestión.

- *Orientación Libre:* Para afianzar y completar las reflexiones hechas, es necesaria la elaboración de tareas que pongan en juego los conocimientos adquiridos, este tipo de problemas son más libres que los planteados en la fase de *orientación dirigida*, con la finalidad de que los estudiantes apliquen sus nuevos conocimientos, además de aprender propiedades (más complejas) y que logren relacionarlas con otras.
- *Integración:* Con la finalidad de obtener una perspectiva global y uniforme en el salón de clases, el profesor debe solicitar un resumen de lo explorado (ya sea con discusiones, actividades o discursos propios) con la firme intención de lograr una integración completa de lo aprendido. Como su nombre lo indica, en esta fase se espera que el estudiante logre integrar los conocimientos adquiridos, marginando las propiedades que representen una novedad para los estudiantes; la pretensión de la fase es la acumulación global de lo trabajado.

Aunque las fases tienen un carácter cíclico; en otras palabras, son las mismas y siguen el mismo orden para cada uno de los niveles; existe una diferencia sustancial entre los contenidos, el lenguaje, los argumentos y los procedimientos de cada nivel (sugiriendo una metodología de trabajo, pero modificando el contenido involucrado en cada nivel).

Una vez descrita la teoría de Van Hiele, debemos recordar que la primera motivación del trabajo consistió en la identificación de tipos de argumentación (junto con una evolución implícita de los mismos), razón por la cual es necesario incorporar una corriente teórica auxiliar que no se oponga a las ideas de Van Hiele y, además, aporte reflexiones previas a la investigación y una amplia tipología de argumentos esperados por parte de los estudiantes.

***Categorías de demostración (Rodríguez, 2006)***

Pensando en promover un escenario que contemple el avance gradual de las formas de argumentar, hemos tomado como referencia las 3 grandes etapas históricas de argumentación en matemática: Empírica, Axiomática material y Axiomática formal (Vargas, 1998).

Un trabajo auxiliar para la investigación, es el presentado por Rodríguez (2006), donde define distintas categorías de demostración, las cuales han sido seleccionadas por dos razones: La primera es la congruencia entre las etapas históricas mencionadas y las categorías primarias de los tipos de demostración (empírica y deductiva, esta última a su vez, permite una distinción entre la axiomática material y formal). La segunda aportación es la diversidad de matices que se le asignan a los criterios de prueba en matemáticas, lo fino de estas clasificaciones nos permitirán precisar los argumentos usados por los estudiantes, bajo la premisa del salto intuitivo–racional que representa el nivel preparatorio (lo que implica esperar de ellos respuestas de este estilo). A modo de síntesis, se comentan las categorías de demostración mencionadas.

En una primera instancia se diferencian las demostraciones influenciadas por agentes externos a la propia persona y aquellos que son gestados en el interior del sujeto, en convicción externa y convicción propia respectivamente. La categoría de convicción externa podemos clasificarla a su vez, dependiendo del origen de la influencia, en:

| | |
|---|---|
| *Rituales* | Cuando la fuente de convicción se basa en una cierta apariencia de los argumentos (plausibles). |
| *Simbólicas* | Cuando la convicción es fruto de manipulación simbólica de diversas expresiones. |
| *Autoritarias* | Cuando la creencia se basa en la autoridad asignada a otra persona, un libro de texto o cualquier otro elemento que represente un conocimiento superior. |

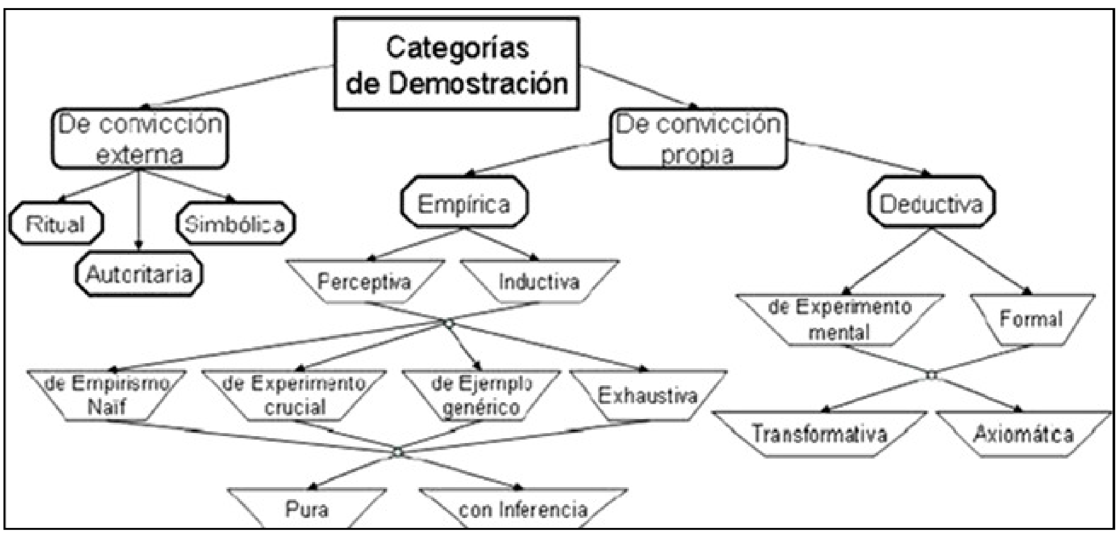
Los argumentos de convicción propia, a su vez, se clasifican en *empíricos* o *deductivos*. A los de tipo empírico podemos diferenciarlos dependiendo de la fuente de convicción entre los que provienen de ejemplos (*inductiva*), experiencias (*perceptiva*) o generalizaciones inductivas. Otros criterios para clasificarlas son según la forma de escoger los ejemplos representativos (*Empirismo naif, Experimento crucial, Ejemplo genérico* y *Exhaustivo.* La terminología es la utilizada en el trabajo original y será aclarada durante el avance del apartado) y el grado de abstracción involucrado (*Pura* o *Con inferencia*). A grosso modo ilustramos en la siguiente tabla, una explicación sobre las clasificaciones planteadas, con base en las características generales.

| **Según la forma de escoger los ejemplos** | |
|---|---|
| Empirismo naif | Cuando la conjetura se verifica en algunos ejemplos seleccionados al azar y sin un criterio específico. |
| Experimento crucial | Si se verifica en un ejemplo escogido de manera que sea “lo menos particular posible”. |
| Ejemplo genérico | Si se verifica en un ejemplo al que se le da el carácter de representante de su clase (genérico). |
| Exhaustivo | Si la conjetura hecha se verifica en todos los casos posibles (aplicable únicamente en conjuntos finitos). |
| **Según el grado de abstracción** | |
| Pura | Si la justificación consiste en realizar comprobaciones empíricas de que la propiedad se cumple. |
| Con inferencia | Cuando a pesar de seguir basándose en ejemplos, se realizan razonamientos más allá de las comprobaciones empíricas, como el uso de propiedades aceptadas o relaciones entre elementos matemáticos del ejemplo. |

Las argumentaciones deductivas son fruto de una argumentación lógico-deductiva y, de modo similar, se puede realizar con base en dos aspectos: El uso o no de ejemplos (*Experimento mental* o *Formal*) y el tipo de razonamiento utilizado (*Transformativa* o *Axiomática*). Ilustrado en la siguiente tabla:

| | |
|---|---|
| **Según el uso o no de ejemplos** | |
| Experimento mental | Si aún siendo deductiva y abstracta, está organizada con la ayuda de ejemplos. |
| Formal | Si la demostración está basada sin la ayuda de ejemplos. |
| **Según el tipo de razonamiento involucrado** | |
| Transformativa | Si está basada en operaciones mentales que producen una transformación del problema en otro equivalente. |
| Axiomática | Si para demostrar la tesis, se parte de los datos del problema, términos definidos y axiomas que se organizan en una cadena deductiva. |

Como apoyo al lector y para ilustrar las relaciones entre las categorías, se presenta el esquema que aparece en Rodríguez (2006, pp.26).




Dado que la naturaleza de las clasificaciones se basa en aspectos independientes, podemos catalogar una demostración empírica en *inductiva de experimento crucial con inferencia* o una demostración deductiva en *experimento mental transformativa*.

Una reflexión importante de Rodríguez, relacionada con la tipología presentada, es que los alumnos no poseen una determinada categoría, sino que razonan influenciados por varias de ellas y utilizan una u otra en función de lo solicitado al elaborar una demostración o, simplemente, entender una que se les propone. Basados en la variedad de categorías a considerar, es conveniente definir modalidades de los esquemas de demostración según el papel que desempeñan, proponiéndose los siguientes:

- Esquema utilizado: Es el utilizado por el estudiante para resolver un problema.
- Esquema aceptado: Si un razonamiento presentado es aceptado como demostración.
- Esquema adherido: Si el estudiante, además de aceptar la demostración presentada, rechaza explícitamente las anteriores.
- Esquema declarado: Cuando un estudiante expone su interpretación de lo que significa demostrar.

Como última herramienta teórica, pensando en el proceso de exploración-conjetura-demostración, es conveniente aclarar los lineamientos para analizar los distintos momentos por los que transita un estudiante durante la resolución de problemas, considerando la observación de Marrades y Gutiérrez (2000), citada en Rodríguez (2006, p.27-28):

> *"Las diferentes clasificaciones de demostraciones descritas…asumen que los estudiantes trabajan de una forma lineal y coherente desde el principio hasta el final de la solución del problema. Sin embargo, la realidad es, en muchos casos, diferente. Normalmente, muchos estudiantes comienzan realizando comprobaciones empíricas y, cuando han entendido el problema y la manera de demostrar la conjetura, continúan escribiendo una justificación deductiva. También es habitual realizar varios saltos entre métodos empíricos y deductivos durante la resolución de un problema."*

Considerando la cita de Gutiérrez, se declaran dos posibles saltos en el proceso exploración-conjetura-demostración como herramientas de análisis del estadio en la resolución del problema, dependiendo del interés que persiguen, y son:

- Fase ascendente: Actividad que ayuda a entender el problema, generar conjeturas y verificarlas.
- Fase descendente: Actividad encaminada a construir una argumentación deductiva, desde la perspectiva del estudiante, sobre la conjetura elaborada.

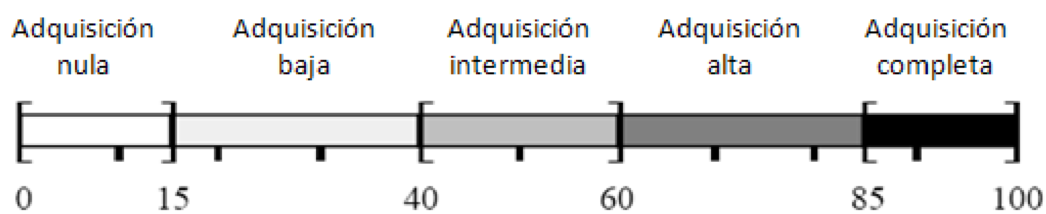
## ELEMENTOS DE MODIFICACIÓN PROPUESTOS

En esta instancia ya hemos mencionado las 2 influencias centrales del trabajo, en el presente apartado se pretende hablar de las modificaciones necesarias para amalgamar ambas corrientes teóricas. Dentro de las consideraciones, está el uso de una metodología apropiada que permita asignar un nivel de Van Hiele. Una segunda consideración, es enfatizar las características de tipo lógico dentro de cada nivel de razonamiento, lo cual representa un vínculo implícito con las categorías de demostración presentadas por Rodríguez.

Ante la difusión del modelo de Van Hiele, diversos autores incorporaron consideraciones que hicieran práctico su uso. Se tomó como modelo metodológico la versión moderna de la Teoría de Van Hiele planteada por Ángel Gutiérrez, ya que nos permite fundamentar el cómo, cuándo y qué preguntar (útiles en el diseño de un problemario que capture las pruebas matemáticas), además de que sus investigaciones consideran mecanismos de evaluación de los niveles de razonamiento de Van Hiele y es compatible con el trabajo de Chacara (2004). En cuanto al uso de las categorías de demostración presentadas por Rodríguez (2006), han sido seleccionadas por los diversos matices que le asignan a las pruebas de tipo empírico y deductivo, lo fino de estas clasificaciones nos permitirá precisar los tipos de argumentos usados por los estudiantes.

Una de las razones para basarnos en la versión de Gutiérrez, es por su amplio trabajo al respecto y aportaciones relacionadas con métodos para evaluar la adquisición de los Niveles de razonamiento. El paradigma particular al que hemos recurrido defiende la existencia de subniveles, basados en la observación de respuestas de estudiantes donde aparecen influencias de distintos niveles de razonamiento (Gutiérrez, 1991, p. 237). Este tipo de descubrimientos hizo necesario una re-definición de las escalas para medir los niveles, con la finalidad de obtener una visión más completa del nivel real de razonamiento de cada estudiante y mantener una continuidad inherente de su avance.

La metodología para cuantificar la adquisición de cada subnivel, es posible ilustrarla con la representación de un segmento graduado de 0 a 100, asignando a los distintos intervalos un grado de dominio de cada nivel, sin la intención de considerar discontinuo el avance dentro de un nivel sino con el objetivo de facilitar la clasificación y su estudio.




El criterio para definir tal escala tiene su fundamento en el tipo de práctica realizada por los estudiantes durante la resolución de problemas, particularmente, un alumno que intenta pasar de un determinado nivel de razonamiento **N** al consecuente **N+1**, comienza sin una consciencia de la existencia o necesidad de métodos específicos de razonamiento propios del siguiente (en este caso, se dice que el estudiante tiene una *adquisición nula* del nivel de razonamiento “**N+1**”).

Un escenario distinto, se da cuando los estudiantes están conscientes de la necesidad de nuevos métodos de resolución, ante la imposibilidad de resolver el problema con las herramientas conocidas, y al intentar diseñarlos o utilizarlos, su poca experiencia hace que fallen y se vean en la necesidad de trabajar de nuevo con las herramientas que resultaron ineficientes pero conocidas (el intento de avanzar hace que el estudiante tenga una adquisición parcial del siguiente nivel, pero por su desempeño y las características de este periodo se le asigna la etiqueta de *adquisición* baja).

Cuando los estudiantes cuentan con más práctica en la resolución de un campo de problemas, generan experiencia en el uso de nuevas herramientas (particularmente algunas pertenecientes al siguiente nivel de razonamiento), pero sin dejar de utilizar las ya conocidas del nivel anterior, a este periodo donde se utilizan indistintamente métodos de distintos niveles se asigna la *adquisición intermedia* del nivel.

Un siguiente paso, consiste en un dominio cada vez mayor de las herramientas del siguiente nivel de razonamiento y una necesidad cada vez menor de métodos de resolución utilizados en el nivel anterior, cuando el estudiante presenta este tipo de características diremos que ha logrado una *adquisición alta* del nivel.

Finalmente, los estudiantes reciben el título de *adquisición completa* si cuentan con una completa maestría en el nuevo nivel y no presentan dificultades que comprometan su dominio del mismo.

Para fines prácticos, presentamos la siguiente tabla con equivalencias que relacionan los niveles y subniveles de Van Hiele con las categorías de demostración:

| **Nivel de Van Hiele** | **Adquisición de Nivel (Subnivel)** | **Categoría de Demostración** |
|---|---|---|
| **1** | Nula | Autoritaria |
| | Baja | Ritual |
| | Intermedia | Simbólica |
| | Alta | |
| | Completa | Perceptivo experimento naif puro |
| **2** | Nula | Perceptivo exhaustiva pura |

| | | |
|---|---|---|
| | Baja | Perceptivo experimento crucial puro |
| | Intermedia | Perceptivo ejemplo genérico puro |
| | Alta | |
| | Completa | Inductivo puro |
| **3** | Nula | Perceptivo con inferencia |
| | Baja | Inductivo con inferencia |
| | Intermedia | |
| | Alta | |
| | Completa | De experimento mental Transformativa |
| **4** | Nula | |
| | Baja | |
| | Intermedia | Formal transformativa |
| | Alta | De experimento mental axiomática |
| | Completa | Formal axiomática |

Por las distintas connotaciones del término "*fase*", durante el análisis de resultados nos referiremos a la **fase ascendente** en los momentos de exploración y **fase descendente** para las asignaciones de las categorías de demostración.