CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

ANTECEDENTES

La selección del tema y la problemática en general, obligan a tener en cuenta los diversos antecedentes, gestados en la disciplina matemática y con repercusiones en el ambiente escolar; de ahí la conveniencia de recrear el panorama global del escenario en el que se desenvuelve el tema de interés. El conocer el contexto que condicionó la evolución del concepto de prueba en matemáticas, nos permite revalorar la necesidad de argumentar, su papel en el plano científico y sus efectos en el salón de clases. Como cierre del capítulo, se relaciona el escenario con las razones para plantear el problema de investigación, su justificación y los objetivos perseguidos.

CONSIDERACIONES CIENTÍFICAS (DISCIPLINA MATEMÁTICA)

Como fruto de la concepción filosófica del "Círculo de Viena[3]", la objetividad de los criterios de verificación y de confirmación en las ciencias toma un rol protagónico, al grado de que, tan pronto una teoría o explicación se convierte en conocimiento probado o confirmado, surge la nueva dificultad de justificar el método que da legitimidad a las inferencias realizadas.

En el ámbito de las ciencias, todo conocimiento que pretendemos sea respetado o que aspiremos a llamarlo "científico", tiene la necesidad de estar apropiadamente fundamentado, en el sentido de que sus bases sean firmes y sus resultados

[3] Movimiento iniciado en Viena por Moritz Schilck, entre 1922-1936, interesado en distinguir lo que es una ciencia y lo que no, además de elaborar un lenguaje común a todas las ciencias. Las 4 tesis que definen el círculo son: La posibilidad de diferenciar al conocimiento científico o ciencia del resto de conocimientos, la capacidad de expresar una observación científica a través de símbolos y relacionarse con otras observaciones mediante el mismo lenguaje, la realidad es única para todos los conocimientos (crítica a la metafísica) y, por último, todo estudio científico se compone de fases de observación, procesamiento y conclusiones finales (o leyes generalistas).

consistentes. Aunque la fundamentación de cada conocimiento está condicionada por los lineamientos de la comunidad a la que está dirigido, realmente son los argumentos y pruebas las que determinarán si dicho saber perdura a través del tiempo.

El hablar de “pruebas” es un tema complejo, bajo la premisa que éstas son las transmisoras de la verdad y omitiendo el trasfondo filosófico de definir el significado de “verdad”, el simple hecho de discutir si alguna ciencia está ó no apropiadamente fundamentada a partir de los argumentos y pruebas en los que se basa, implica creer que nuestro razonamiento es inmune de perderse en el proceso de verificación. Aunque la confiabilidad y complejidad de las pruebas están condicionadas por la comunidad que se desea convencer, también podemos clasificar a las ciencias según el papel que desempeñan las pruebas, ya que los mismos objetivos que éstas persiguen varían según los intereses primarios de la disciplina en la que están inmersos. En la clasificación en ciencias fácticas y formales, presentada previamente, podemos distinguir un rol significativamente distinto de las pruebas, en las factuales por ejemplo, la confiabilidad de una prueba se basa en un control de parámetros de tipo experimental, ya que recordemos que sus intereses se concentran en crear teorías que expliquen de manera eficiente los fenómenos que nos rodean. En cambio, en las ciencias formales (dado la naturaleza de los objetos que las conforman y sus pretensiones), la forma de probar juega un papel aun más relevante, al no limitarse en el reconocimiento de la consistencia del saber que persigue sino, además, cuestionar los métodos de razonamiento utilizados para conseguir dicha estabilidad (analizando a las pruebas mismas).

Específicamente en el contexto matemático, las pruebas reconocidas como válidas reciben el nombre de “demostración” y es la comunidad de matemáticos, como fruto de un constante replanteamiento y fundamentación de la disciplina, la que delimita las características que deben contener. Entre las directrices fundamentales, podemos mencionar dos consideraciones necesarias para reconocer una prueba como demostración matemática: Primeramente, al razonamiento deductivo basado en los principios de la lógica aristotélica (al menos en sus orígenes y considerando la evolución de la lógica misma), y en segunda instancia, la naturaleza ideal de los objetos (la cuál es necesaria para no ser influenciados por los sentidos y la intuición).

El auge de las demostraciones matemáticas con este esquema se alcanzó en el siglo XX, bajo la escuela Bourbakí[4], donde el grupo se encargó de sistematizar las relaciones entre distintas teorías matemáticas, mediante el método axiomático y replanteando completamente la disciplina. El punto de partida fue la redacción de un tratado como herramienta indispensable para la comunidad matemática, con el objetivo de partir de una base común y lógicamente ordenada, la teoría de Conjuntos se convirtió en el elemento unificador, con la cual se esperaba conseguir la mayor generalidad y utilidad posible para los usuarios en distintas tareas, descartando por ello las referencias intuitivas de lo real. Es en 1938 que se elige el título de su obra: "*Éléments de Mathématique",* haciendo alusión a los Elementos de Euclides, omitiendo la letra "*s"* de *Mathématiques* para reafirmar el objetivo de unificar a la disciplina.

CONSIDERACIONES ESCOLARES

En los años cincuenta surgió un movimiento europeo, con la firme intención de introducir la nueva Matemática en la enseñanza escolar de los distintos niveles educativos, bajo la premisa que los cambios en la matemática se debían reflejar también en su enseñanza elemental. Estados Unidos fue el primero en América en interesarse por actualizar sus programas de matemáticas, deslumbrado por la precisión del lenguaje que ofrecían las llamadas "Matemáticas Modernas", publicando varios libros de texto y material educativo dirigidos a profesores de enseñanza media. Fue hasta los setentas cuando México se incorporó a la

[4] Pseudónimo de una sociedad de matemáticos franceses, responsables de la reestructuración de las Matemáticas durante el primer tercio del siglo XX, cuya aportación consistió en homogeneizar los fundamentos de las distintas ramas de la disciplina, mediante el apoyo de la teoría de conjuntos como una base común a todas.

corriente modernista, utilizando como material educativo una mezcla de los usados por la comunidad francesa y estadounidense, en sus respectivos países.

La reforma educativa se implementó en 1971, modificando considerablemente el currículo matemático escolar, con la intención de unificar el lenguaje y promover el formalismo adoptado por la disciplina a finales del siglo XIX. La transformación alcanzó los niveles de primaria y el medio superior, para después ser acogidos por instituciones privadas. La nueva prioridad en la matemática escolar era la comprensión de las relaciones entre los objetos ideales, bajo la premisa de que los estudiantes podrían aterrizar las estructuras abstractas en sus prácticas habituales.

Se necesitaron casi 20 años para reconocer que ni alumnos ni profesores estaban preparados para enfrentar la nueva propuesta curricular, las razones del fracaso pueden ser el desconocimiento de los docentes de la teoría de conjuntos y el rigor de su estructura, la cual estaba fuera del alcance del estudiante. Al fracasar los intentos unificadores, los Conjuntos y la Lógica, elementos importantes de la nueva concepción de las Matemáticas, mantuvieron su presencia en el currículo escolar pero se convirtieron en elementos aislados del resto de las ciencias.

Con la intención de corregir el rumbo y subsanar el daño de las Matemáticas Modernas en el ámbito escolar, aparece la reforma educativa de 1992 con el claro objetivo de reorientar el rumbo hacia una matemática aplicable en la vida real. En este periodo de transición en la matemática escolar, y como producto de la confrontación de las 2 reformas, la práctica mayoritaria en el salón de clases fue influenciada por alguno de los extremos, el formado por docentes que limita la capacidad formativa de la disciplina Matemática, reduciendo sus clases a un recetario de técnicas de resolución de problemas (de tipo algorítmico) o, en caso contrario, aquellos profesores que manejan una matemática lejos de la *zona de desarrollo próximo*[5] de sus estudiantes, priorizando la formalidad y convenciendo

[5] Entendida como la zona que separa el nivel real de un alumno y el nivel de desarrollo potencial, determinado por la capacidad del individuo de resolver un problema bajo la supervisión de un guía o de un compañero más capaz.

con ello al alumno de su imposibilidad de generar, de forma independiente, tales razonamientos.

Aunque el panorama se tornó menos gris y la modificación estaba dando resultados, la iniciativa federal sólo se preocupó por incluir en el movimiento a la educación pública, marginando a las escuelas privadas y la educación abierta. Los sectores privados utilizaron sus propios fondos para actualizar sus programas, mientras que la educación abierta mantiene a la fecha (2010), los programas implementados en los años 70´s.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Fruto de nuestro trabajo dentro del sistema abierto, bajo las condiciones globales antes mencionadas, aparecieron varias interrogantes relacionadas con la demostración y su relación con el movimiento de las Matemáticas Modernas. Tomando en cuenta que en los textos de preparatoria abierta aparece un apartado dedicado a las demostraciones, bajo los axiomas de los números reales y en su presentación formal (propio de la influencia Bourbakí), surgieron cuestionamientos como: ¿Está el alumno de preparatoria preparado para comprender la necesidad de la formalidad en las demostraciones matemáticas? ¿Qué requisitos (habilidades, conocimientos previos, capacidades argumentativas, competencias, etc.) son necesarios para que el estudiante pueda *aprender significativamente* el papel de las demostraciones matemáticas? Aterrizando éstas preguntas en la práctica profesional ¿Cuál es la metodología apropiada para presentar la demostración (implícita o explícitamente) en clase?

Es un acuerdo generalizado en la comunidad docente, la importancia de la “Demostración” en la formación matemática de los estudiantes (Crespo, 2007; p.18-21), pero es pertinente una aclaración sobre la variedad de significados asociados al término. En los niveles escolares previos a la formación profesional, incluso en esta última, podemos encontrar una concepción más abierta y menos rigurosa que la asignada dentro de la disciplina matemática, razón por la cual es necesario seleccionar modelos curriculares adecuados, (dadas las pretensiones del trabajo, que consideren necesario y relevante la comprensión del papel de las pruebas en matemáticas y avance en la complejidad de éstas, con el objetivo de alcanzar los requisitos de una “Demostración Matemática”).

Aunque el planteamiento original surge de la experiencia en el sistema abierto, no representa un escenario ideal por diversas complicaciones, tales como: Los tiempos asignados a tópicos complejos, la metodología implementada (autodidacta en la mayoría de los casos) y la propuesta educativa que lo sustenta; los resultados de una investigación con éstas limitantes, restringen la aplicación del trabajo a otros escenarios. La medida tomada consiste en adaptar las interrogantes a un modelo educativo que considere relevante el desarrollo de capacidades argumentativas y, además, implemente el uso de demostraciones formales.

Por la importancia de trabajar con instituciones que recurren al uso de demostraciones formales, la Licenciatura en Matemáticas es la opción idónea como escenario de trabajo, intentando mantener como filtro la experimentación con alumnos que inicien su formación matemática; ya que trabajar con estudiantes de semestres avanzados puede significar una contaminación en el tipo de pruebas que ellos consideran convincentes (por la alta influencia del formalismo en sus cursos). Una ventaja distinta, es el reconocimiento del tipo de argumentos que les resultaron satisfactorios durante su formación preparatoria (la cual es relevante por ser considerada como la etapa de transición entre la enseñanza intuitiva y racional).

Por las características del tipo de estudiantes y los intereses originales que motivaron este trabajo, las preguntas de investigación que se plantean como guía son las siguientes:

- **¿Qué tipo de pruebas aparecen en el salón de clases?**

- **¿Qué tipo de pruebas utilizan los estudiantes cuando aumenta la complejidad del contenido matemático?**
- **Relacionado con la pregunta anterior ¿Los métodos de validación utilizados por los estudiantes tienen un orden de transición?**

Las herramientas para estar en condiciones de plantear una respuesta a estas interrogantes, se apoyan en distintas investigaciones hechas por miembros de la comunidad de Matemática Educativa, éstas pueden ser clasificadas en dos tipos: Primeramente los trabajos de corte histórico, que permiten comprender el nacimiento y evolución de la demostración dentro de la disciplina matemática, con la intención de identificar los cambios de paradigma sobre las formas de argumentar, sus razones y características. Como segunda herramienta, está un contraste del análisis histórico con metodologías de diversas investigaciones dentro de un contexto escolar, con el fin de asociarlos apropiadamente para diseñar herramientas aplicables en el salón de clases.

Un riesgo latente en el trabajo sobre la "Demostración Matemática" consiste en el trabajo implícito que se le asigna dentro del salón de clases; limitando los requerimientos y la naturaleza lógica de las pruebas al desarrollo de hábitos en la forma de actuar de los estudiantes. Es por ello conveniente asignar un papel protagónico a la demostración matemática y sus características, centrando la atención en generar una toma de conciencia sobre los métodos de razonamiento utilizados. Aunque no es de interés del trabajo la discusión de alternativas para lograr tales objetivos, Murillo (2006) presenta varios métodos y los clasifica según el papel que desempeñan, el estudio de paradojas, por ejemplo, permite exteriorizar de manera evidente el razonamiento empleado, además de cooperar con el desarrollo de los procesos deductivos, implicaciones informales y las bases para la construcción de la noción de "consistencia", la cual es elemental en el estudio de sistemas axiomáticos.

JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

Al margen de la importancia de la argumentación en la vida cotidiana, uno de los intereses pretendidos en la formación escolar consiste en desarrollar en los estudiantes un pensamiento reflexivo y de carácter conjetural, pensando en generar un entrenamiento en la mentalidad crítica del individuo, capaz de cuestionar no sólo los fenómenos de su alrededor sino que, además, le permite estar en condiciones de exigir y adaptarse a los lineamientos de una nueva comunidad con mayor estatus académico y/o social. En el contexto matemático no es la excepción, y aunque la mayoría de los estudiantes no se convertirán en futuros matemáticos, es indispensable que las distintas formas de justificar, al igual que el resto de los conocimientos de la disciplina, se desarrollen de manera ascendente durante su formación escolar, permitiéndoles convertirse en usuarios competentes de la ciencia.

Concretamente, uno de los objetivos de la Licenciatura en Matemáticas es el desarrollo de la capacidad argumentativa del estudiante y su maestría en la construcción de demostraciones formales. La práctica docente, da por sentado que el alumno acepta las demostraciones matemáticas como contundentes e irrefutables, sin dedicar mucho tiempo a la descripción de las características que avalan tal afirmación. Una aplicación adicional del trabajo es contrastar la realidad con lo esperado por los docentes de la Licenciatura en Matemáticas, considerando el tipo de argumentos usados en las aulas y la influencia de la metodología de enseñanza aplicada por los maestros. Por lo anterior, los objetivos declarados en el trabajo son los siguientes:

- ***Identificar los métodos de validación utilizados por los estudiantes.***
- ***Analizar los cambios de las pruebas matemáticas utilizadas, considerando un avance en la complejidad del contenido matemático.***