

Capítulo 2

Impedancia acústica

Es común encontrar el término impedancia en diferentes ramas de la Física ya que es la relación entre la magnitud de una acción periódica y la respuesta producida en el sistema físico; así, tenemos la impedancia eléctrica que es la razón entre el voltaje y la corriente, como una medida de la oposición del circuito al paso de la segunda; la impedancia mecánica, como la medida de la oposición al movimiento de una estructura sujeta a una fuerza. La impedancia acústica está relacionada a la propagación de ondas sonoras en un medio acústico.

Este capítulo tiene como objetivo revisar la impedancia acústica y calcular las impedancias relevantes para el estudio del resonador. Comenzaremos estudiando el oscilador forzado y amortiguado para identificar elementos importantes que aprovecharemos en el desarrollo de este trabajo y como una ilustración del concepto de impedancia.

2.1. Impedancia mecánica

Consideremos un cuerpo de masa m bajo la acción de una fuerza de restitución lineal en la posición $-kx$, sujeto a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad, $-R_m \frac{dx}{dt}$, donde R_m es una constante positiva llamada resistencia mecánica, e impulsado por una fuerza externa $F(t)$. La ecuación que describe el movimiento se obtiene a partir de la segunda ley de Newton

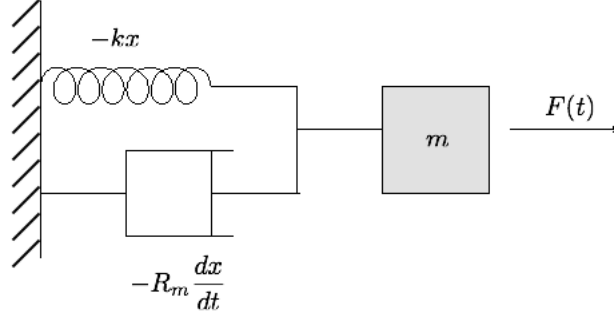


Figura 2.1: Oscilador sujeto a una fuerza de restitución $-kx$, fuerza disipativa $R_m\dot{x}$ e impulsado por $F(t)$.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - R_m \frac{dx}{dt} + F(t) \quad (2.1)$$

Dividiendo por m y redefiniendo los parámetros

$$\beta = \frac{R_m}{2m} \quad (2.2a)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (2.2b)$$

la ecuación de movimiento lleva a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (2.3)$$

donde $f(t)$ es la fuerza externa por unidad de masa.

La solución a la ecuación anterior será entonces la suma de dos partes: la solución general a la ecuación homogénea, $x_H(t)$, que contiene dos constantes arbitrarias, y una solución particular, $x_P(t)$, que dependerá del forzamiento externo $f(t)$:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) \quad (2.4)$$

La solución $x_H(t)$ se obtiene resolviendo la ecuación homogénea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.5)$$

dado que la ecuación es lineal y de coeficientes constantes su solución es de la forma

$$x = Ae^{\lambda t} \quad (2.6)$$

donde λ satisface la ecuación algebraica que se sigue de sustituir la solución anterior en (2.5)

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.7)$$

este polinomio de segundo grado tiene como raíces

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (2.8)$$

Para nuestro propósito es suficiente considerar el caso en que la resistencia mecánica es muy pequeña, por ello $\omega_0 > \beta$, de modo que λ es un número complejo. Notamos que si $R_m = 0$ entonces $\lambda = \pm i\omega_0$ lo que sugiere definir una nueva constante

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.9)$$

con lo cual λ se escribe ahora como

$$\lambda = -\beta \pm i\omega_a \quad (2.10)$$

y ω_a resulta ser la frecuencia angular del oscilador corregida por el amortiguamiento. Notemos que ω_a siempre es menor que la frecuencia angular natural ω_0 del oscilador sin amortiguar.

La solución general a la ecuación homogénea es entonces

$$x_H(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t}) \quad (2.11)$$

donde A_1 y A_2 son constantes reales arbitrarias. En forma alternativa, la solución $x_H(t)$ se puede escribir como

$$x_H(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \phi) \quad (2.12)$$

donde A y ϕ son constantes reales determinadas por las condiciones iniciales.

Debido al factor exponencial negativo, después de un tiempo $t \gg 1/\beta$, el término de amortiguamiento hace que la solución $x_H(t)$ sea despreciable comparada con la solución

$x_P(t)$ y por lo tanto el movimiento del oscilador se describe por $x_P(t)$ para tiempos grandes

$$x(t) \rightarrow x_P(t) \quad t \gg \frac{1}{\beta} \quad (2.13)$$

Lo anterior podemos entenderlo de la siguiente manera: el movimiento tiene dos etapas, en los primeros instantes $x_H(t)$ contribuye significativamente al movimiento junto con $x_P(t)$, esta etapa del movimiento se conoce como transitorio, el movimiento transitorio depende de las condiciones iniciales; luego, conforme transcurre el tiempo la contribución de $x_H(t)$ es cada vez más pequeña y el movimiento se parece cada vez más a $x_P(t)$, esta etapa se conoce como estacionario. El movimiento estacionario descrito por $x_P(t)$ es independiente de las condiciones iniciales y sólo depende del forzamiento externo.

Ahora buscamos la solución particular; para ello, consideramos que el forzamiento externo es del tipo sinusoidal, $f(t) = f_0 \cos \Omega t$, para tener la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t \quad (2.14)$$

La solución particular de la ecuación (2.14) se encuentra más fácilmente si reemplazamos el forzamiento externo $f_0 \cos \Omega t$ por la parte real de la expresión compleja $\mathbf{f}(t) = f_0 e^{i\Omega t}$. Como el operador del lado izquierdo de la ecuación (2.14) es lineal, y además real, podemos reemplazar la variable x por la parte real de la variable compleja $\mathbf{x} = x + iy$. Con lo anterior la ecuación diferencial a resolver se convierte en¹

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{x} = f_0 e^{i\Omega t} \quad (2.15)$$

y de su solución basta tomar la parte real para obtener $x(t)$.

Por ser (2.15) una ecuación diferencial lineal, la solución particular tiene la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} e^{i\Omega t} \quad (2.16)$$

donde \mathbf{A} es una constante compleja. Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos

$$(-\Omega^2 + 2i\beta\Omega + \omega_0^2)\mathbf{A} e^{i\Omega t} = f_0 e^{i\Omega t} \quad (2.17)$$

¹De aquí en adelante reservaremos la notación en negrita para denotar números complejos.

cancelando el factor $e^{i\Omega t}$ y despejando \mathbf{A} queda

$$\mathbf{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega} \quad (2.18)$$

lo que lleva a la solución del desplazamiento complejo $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{i\Omega} \frac{mf_0 e^{i\Omega t}}{R_m + i\frac{m}{\Omega}(\Omega^2 - \omega_0^2)} \quad (2.19)$$

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo obtenemos una velocidad en los complejos cuya parte real es la velocidad del oscilador

$$\mathbf{u}(t) = \frac{mf_0 e^{i\Omega t}}{R_m + i\frac{m}{\Omega}(\Omega^2 - \omega_0^2)} \quad (2.20)$$

Las últimas dos expresiones pueden ser escritas en una forma más sencilla si definimos la *impedancia mecánica* del sistema, \mathbf{Z}_m , como la función compleja de la variable Ω

$$\mathbf{Z}_m(\Omega) = R_m + i\frac{m}{\Omega}(\Omega^2 - \omega_0^2) \quad (2.21)$$

entonces \mathbf{x} y \mathbf{u} se escriben como

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{i\Omega} \frac{F_0}{\mathbf{Z}_m} e^{i\Omega t} \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \frac{F_0}{\mathbf{Z}_m} e^{i\Omega t} \quad (2.22b)$$

donde $F_0 = mf_0$ es la amplitud de la fuerza aplicada.

Estas expresiones nos permiten aclarar el significado físico de la impedancia \mathbf{Z}_m ; para ello, basta tomar su forma polar

$$\mathbf{Z}_m = Z_m e^{i\varphi} \quad (2.23)$$

donde Z_m es la magnitud de la impedancia

$$Z_m(\Omega) = \sqrt{R_m^2 + \frac{m^2}{\Omega^2}(\Omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (2.24)$$

y φ es la fase de la impedancia

$$\varphi(\Omega) = \tan^{-1} \frac{m(\Omega^2 - \omega_0^2)}{\Omega R_m} \quad (2.25)$$

Usando la forma polar de \mathbf{Z}_m podemos escribir las ecuaciones (2.22a) y (2.22b) en la forma

$$\mathbf{x}(t) = \frac{F_0}{\Omega Z_m} e^{i(\Omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})} \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \frac{F_0}{Z_m} e^{i(\Omega t - \varphi)} \quad (2.26b)$$

y hemos usado la identidad $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. La parte real de estas expresiones nos dan la posición y velocidad del oscilador en el estado estacionario

$$x(t) = \frac{F_0}{\Omega Z_m(\Omega)} \text{sen}(\Omega t - \varphi) \quad (2.27a)$$

$$u(t) = \frac{F_0}{Z_m(\Omega)} \text{cos}(\Omega t - \varphi) \quad (2.27b)$$

donde usamos $\text{cos}(\theta - \frac{\pi}{2}) = \text{sen}\theta$. Es decir, la amplitud de la velocidad, en el régimen estacionario, es inversamente proporcional a la magnitud de la impedancia mecánica y la fase de la impedancia representa el desfaseamiento entre la aplicación de la fuerza y la velocidad del oscilador.² Esto significa que la impedancia mecánica, como número complejo, contiene toda la información sobre la respuesta del oscilador en el régimen estacionario, una vez conocido el forzamiento externo.

La parte real de la impedancia representa la resistencia mecánica; la parte imaginaria se llama *reactancia* y se denota con $X = \Im\{\mathbf{Z}\}$. La reactancia mecánica del oscilador es la función de la frecuencia Ω :

$$X_m(\Omega) = \frac{m}{\Omega} (\Omega^2 - \omega_0^2) \quad (2.28)$$

que permite escribir la impedancia del oscilador como la suma, compleja, de la resistencia y la reactancia

$$\mathbf{Z}_m = R_m + iX_m \quad (2.29)$$

con magnitud

$$Z_m = \sqrt{R_m^2 + X_m^2} \quad (2.30)$$

²Note que igualmente pudimos definir una impedancia en relación con la posición del oscilador, lo cual es más frecuente en los sistemas mecánicos, pero para el propósito del presente trabajo es preferible la impedancia en relación con la velocidad.

Claramente, de las ecuaciones (2.27a) y (2.27b), la respuesta del oscilador es máxima cuando Z_m es mínima y esto ocurre para aquellas frecuencias Ω que hacen que la reactancia sea cero. Este fenómeno se llama *resonancia* y la frecuencia a la cual ocurre se llama *frecuencia de resonancia*.

De la expresión (2.28) se sigue que para el oscilador la frecuencia de resonancia es $\Omega_r = \omega_0$; es decir, si el forzamiento externo tiene la misma frecuencia que la frecuencia natural del oscilador la amplitud de respuesta del oscilador tiene un máximo local y la magnitud de la impedancia es mínima.

2.2. Impedancia acústica

La impedancia acústica, cuyo símbolo es \mathbf{Z} , es la razón de la presión acústica al flujo de volumen acústico, $\mathbf{Z} = \mathbf{p}/\mathbf{U}$. El flujo es medido en metros cúbicos por segundo, entonces, de la definición podemos ver que las unidades de la impedancia acústica son de presión por segundo sobre metro cúbico, $Pa \cdot s/m^3$.

La impedancia acústica es una función que varía con la frecuencia. La impedancia acústica a una frecuencia en particular indica cuánta presión es generada por la onda acústica de esa frecuencia. En el caso particular de instrumentos de viento, la impedancia acústica tiene la ventaja de ser una propiedad física del instrumento y lo caracteriza.

Se pueden definir los siguientes tres tipos de impedancias acústicas ya que éstas son muy útiles en diferentes circunstancias:

1. La *impedancia acústica específica*, \mathbf{Z} , es la razón de presión acústica \mathbf{p} a la velocidad \mathbf{u} asociada a la partícula oscilante en un medio. Es una propiedad característica del medio y del tipo de onda que es propagada. Es útil en cálculos que involucran la transmisión de ondas acústicas de un medio a otro.

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}} \quad (2.31)$$

2. La *impedancia de radiación acústica*, \mathbf{Z}_{ra} , la cual es útil en el estudio de radiación acústica de superficies vibrantes. Está relacionada con la impedancia acústica

específica por la expresión

$$\mathbf{Z}_{ra} = \frac{\mathbf{Z}}{S} \quad (2.32)$$

donde S es el área de la superficie vibrante.

3. La *impedancia de radiación*, \mathbf{Z}_r , usada en cálculos de acoplamientos entre ondas acústicas y fuentes de forzamiento o cargas impulsadas. Es parte de la impedancia mecánica \mathbf{Z}_m de un sistema vibrante relacionada con la radiación de sonido. La impedancia de radiación se define como la razón entre la fuerza \mathbf{f} y la velocidad \mathbf{u} asociada a la partícula oscilante del medio y está relacionada con la impedancia acústica específica en una superficie por la expresión

$$\mathbf{Z}_r = S\mathbf{Z} \quad (2.33)$$

2.3. Radiación de una esfera pulsante

La fuente acústica más sencilla es la esfera pulsante. Ésta consiste en una esfera cuyo radio oscila con el tiempo, lo cual provoca que la esfera emita una onda de presión que se manifiesta como la onda acústica. La esfera pulsante es muy útil ya que sirve como modelo para analizar una importante variedad de fuentes que en la literatura especializada se refieren como *fuentes simples*.

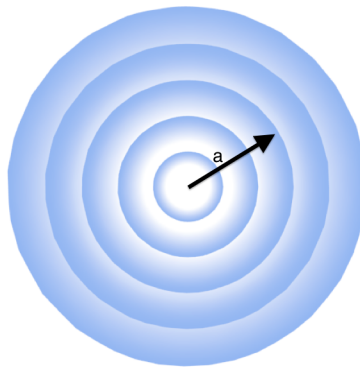


Figura 2.2: Esfera pulsante de radio promedio a .

En un medio homogéneo e isotrópico, la esfera pulsante produce una onda de presión que es esférica, saliente y con las mismas propiedades en todas direcciones. Matemática-

mente, esta onda de presión sólo depende de la variable radial r y el tiempo t , es decir se describe por una función real $p(r, t)$. La forma explícita de $p(r, t)$ se obtiene a partir de la ecuación de onda (1.29)

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

que escrita en coordenadas esféricas, y tomando en cuenta que la presión es independiente de los ángulos, se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.35)$$

Si hacemos el cambio de función

$$p(r, t) = \frac{q(r, t)}{r} \quad (2.36)$$

entonces, al sustituir en la ecuación anterior obtenemos la ecuación que satisface la función $q(r, t)$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \quad (2.37)$$

esta ecuación se resuelve con el método de separación de variables y proporciona la solución

$$q(r, t) = \mathbf{A} e^{ik(ct-r)} \quad (2.38)$$

donde k , la constante de separación, tiene unidades de inverso de la distancia y se conoce como *número de onda*. Esta solución es una función en los complejos que representa una onda esférica saliente. Entonces hay que tomar la parte real de esta función para obtener la presión acústica $p(r, t)$. Como el producto kc tiene unidades de inverso de tiempo es conveniente introducir la frecuencia $\omega = kc$, por lo tanto, la onda de presión se describe por la parte real de la presión compleja

$$\mathbf{p}(r, t) = \frac{\mathbf{A}}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.39)$$

donde A está determinada por las condiciones en la frontera. Ésta es una onda radial de frecuencia ω , que se desplaza con la velocidad del sonido c y cuya amplitud decae con la distancia como $1/r$.

Consideremos una esfera de radio promedio a , vibrando radialmente en forma cosenoidal, $r(t) = a \cos \omega t$, con el desplazamiento de la superficie mucho menor que el radio a . La

velocidad de la frontera de la esfera es la parte real de la velocidad compleja $\mathbf{u}(t) = u_0 e^{i\omega t}$. La presión acústica del fluido en contacto con la esfera se obtiene de (2.39) evaluando en $r = a$. Por su parte, la componente radial de la velocidad del fluido en contacto con la esfera se encuentra usando la impedancia acústica específica para la onda esférica, también evaluada en $r = a$.

Para encontrar la impedancia acústica de la esfera pulsante retomemos la relación entre presión y velocidad, ecuación (1.14b),

$$\vec{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho_0} \int \nabla \mathbf{p} dt \quad (2.40)$$

y sustituimos la expresión para la onda esférica, como ésta depende espacialmente sólo de la variable radial, queda

$$\vec{\mathbf{u}} = -\hat{r} \frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} dt \quad (2.41)$$

donde \hat{r} es el vector unitario radial.

Realizando por separado la operación indicada en el integrando obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} &= \frac{-ikr A e^{i(\omega t - kr)} - A e^{i(\omega t - kr)}}{r^2} \\ &= -\left(ik + \frac{1}{r} \right) \frac{\mathbf{A}}{r} e^{i(\omega t - kr)} \end{aligned} \quad (2.42)$$

sustituyendo en la integral, dividiendo por $-\rho_0$ y llevando a cabo la integración, resulta

$$\vec{\mathbf{u}} = \hat{r} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{k}{\omega} - \frac{i}{\omega r} \right) \frac{\mathbf{A}}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.43)$$

donde hemos omitido una constante de integración irrelevante para nuestro propósito. Identificando el último factor en esta relación como la presión, ecuación (2.39), y usando la expresión para la frecuencia, queda finalmente

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho_0 c k r} (kr - i) \mathbf{p}(r, t) \quad (2.44)$$

donde hemos omitido el carácter vectorial.

Ahora podemos calcular la impedancia acústica específica dada por el cociente de la presión con la velocidad, $\mathbf{Z} = \mathbf{p}/\mathbf{u}$, ecuación (2.31),

$$\mathbf{Z} = \rho_0 c k r \frac{kr + i}{(kr)^2 + 1} \quad (2.45)$$

o bien, escrita en forma polar

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= \rho_0 c \frac{kr}{\sqrt{k^2 r^2 + 1}} e^{i\theta} \\ &= \rho_0 c \cos \theta e^{i\theta}\end{aligned}\quad (2.46)$$

donde el ángulo θ está determinado por $\tan \theta = 1/kr$. Note la dependencia de la impedancia en la variable r a través del ángulo $\theta(r)$.

En particular en $r = a$, la velocidad de la superficie de la esfera pulsante es la parte real de $\mathbf{u} = u_0 e^{i\omega t}$ y usando la impedancia evaluada en $r = a$ junto con la presión en la superficie de la esfera, obtenida de la expresión (2.39) evaluada en $r = a$, tenemos

$$\frac{\mathbf{A}}{a} e^{i(\omega t - ka)} = \rho_0 c \cos \theta_a e^{i\theta_a} u_0 e^{i\omega t} \quad (2.47)$$

donde $\tan \theta_a = 1/ka$. Despejando \mathbf{A} de esta expresión

$$\mathbf{A} = \rho_0 c u_0 a \cos \theta_a e^{i(ka + \theta_a)} \quad (2.48)$$

y sustituyendo en (2.39) obtenemos la presión compleja de la onda acústica emitida por la esfera pulsante de radio a

$$\mathbf{p}(r, t) = \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} \cos \theta_a e^{i[\omega t - k(r-a) + \theta_a]} \quad (2.49)$$

la parte real de esta expresión nos proporciona $p(r, t)$:

$$p(r, t) = \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} \cos \theta_a \cos[\omega t - k(r-a) + \theta_a] \quad (2.50)$$

2.4. Intensidad acústica

La intensidad de una onda acústica es el promedio temporal de la energía transmitida por unidad de área, por unidad de tiempo, en dirección normal a la propagación

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T pu \, dt \quad (2.51)$$

donde T es el periodo de la onda acústica.

La intensidad instantánea $I(t) = p(r, t)u(r, t)$ de una onda sonora es la razón instantánea por unidad de área y de tiempo a la cuál un elemento de fluido hace trabajo sobre otro adyacente. La intensidad acústica se mide en watts por metro cuadrado, W/m^2 .

Para la esfera pulsante, tanto la presión como la velocidad son radiales, por lo tanto el producto $\vec{p} \cdot \vec{u}$ se reduce a pu . La presión está dada por

$$p(r, t) = \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} \cos \theta_a \cos[\omega t - k(r - a) + \theta_a] \quad (2.52)$$

y la velocidad la podemos calcular haciendo uso de la definición de impedancia $\mathbf{u} = \mathbf{p}/\mathbf{z}$. Con ayuda de (2.46) y (2.50) tenemos

$$\mathbf{u} = \frac{u_0 a \cos \theta_a}{r \cos \theta} e^{i[\omega t - k(r - a) + \theta_a - \theta]} \quad (2.53)$$

tomando la parte real de esta expresión

$$u(r, t) = \frac{u_0 a \cos \theta_a}{r \cos \theta} \cos[\omega t - k(r - a) + \theta_a - \theta] \quad (2.54)$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la intensidad de la onda sonora emitida por la esfera pulsante. Sustituyendo (2.52) y (2.54) en (2.51), tenemos

$$I = \frac{1}{T} \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} \cos \theta_a \frac{u_0 a \cos \theta_a}{r \cos \theta} \int_0^T \cos(\omega t - \Theta) \cos(\omega t - \Theta - \theta) dt \quad (2.55)$$

donde $\Theta = k(r - a) - \theta_a$. Utilizando la identidad $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ para modificar el segundo factor del integrando

$$I = \frac{1}{T} \frac{\rho_0 c u_0^2 a^2 \cos^2 \theta_a}{r^2 \cos \theta} \int_0^T [\cos^2(\omega t - \Theta) \cos \theta + \cos(\omega t - \Theta) \sin(\omega t - \Theta) \sin \theta] dt \quad (2.56)$$

Tomando en cuenta que el periodo de la onda es $T = 2\pi/\omega$ y que el segundo término del integrando es impar, su integral sobre un periodo es cero. Si además en el primer término usamos la identidad: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, obtenemos

$$I = \frac{\rho_0 c u_0^2 a^2 \cos^2 \theta_a}{r^2 \cos \theta} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T \frac{1}{2} dt + \int_0^T \cos[2(\omega t - \Theta)] dt \right\} \cos \theta \quad (2.57)$$

de nuevo, el integrando de la segunda integral es impar y su integral en un periodo completo es cero. Por lo tanto, la intensidad acústica de la esfera pulsante es

$$I = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 c u_0^2 a^2 \cos^2 \theta_a}{r^2} \quad (2.58)$$

Como una preparación para lo que discutiremos a continuación, nos interesa analizar matemáticamente el caso particular en que $ka \ll 1$. Dada esta condición, por ejemplo la presión se calcula a partir de (2.49)

$$\mathbf{p}(r, t) = \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} \cos \theta_a e^{i[\omega t - k(r-a) + \theta_a]} \quad (2.59)$$

Recordando la definición de θ_a , la cual está dada por $\tan \theta_a = 1/ka$, tenemos

$$\begin{aligned} \sin \theta_a &= \frac{1}{\sqrt{1 + (ka)^2}} \\ \cos \theta_a &= \frac{ka}{\sqrt{1 + (ka)^2}} = ka \sin \theta_a \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ahora veamos la parte que involucra a ka y a θ_a de (2.59)

$$\begin{aligned} \cos \theta_a e^{i(ka + \theta_a)} &= ka \sin \theta_a [\cos ka + i \sin ka] [\cos \theta_a + i \sin \theta_a] \\ &= ka \sin \theta_a [\cos ka + i \sin ka] [ka \sin \theta_a + i \sin \theta_a] \\ &= ka \sin^2 \theta_a [\cos ka + i \sin ka] [ka + i] \end{aligned} \quad (2.61)$$

Con la aproximación $ka \ll 1$ tenemos

$$\sin ka \approx ka \quad \cos ka \approx 1$$

para tener

$$\cos \theta_a e^{i(ka + \theta_a)} \approx ka \sin^2 \theta_a [1 + ika] [ka + i] \quad (2.62)$$

$$= ka \sin^2 \theta_a [ka - ka + i + ik^2 a^2] \quad (2.63)$$

$$= ika \sin^2 \theta_a [1 + k^2 a^2]$$

$$= ika$$

Con este resultado la presión en el régimen $ka \ll 1$ es

$$\mathbf{p}(r, t) = i \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} k a e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.64)$$

Por su parte la impedancia acústica específica en la superficie de la esfera pulsante está dada por (2.46) evaluada en $r = a$:

$$\mathbf{Z} = \rho_0 c \cos \theta_a e^{i\theta_a} \quad (2.65)$$

y en el régimen $ka \ll 1$, usando (2.60), se reduce a

$$\mathbf{Z} = \rho_0 c k a (ka + i) \quad (2.66)$$

Cuando el radio de la fuente a es pequeño comparado con la longitud de la onda sonora entonces se realiza la condición $ka \ll 1$, esto implica a su vez $\theta_a \rightarrow \pi/2$ y la impedancia acústica específica cerca de la superficie de la esfera es altamente reactiva. Esto es síntoma de la fuerte divergencia radial de la onda cerca de una fuente pequeña y representa el almacenamiento y liberación de energía a través de capas sucesivas del fluido que se estiran y se encogen esféricamente. Este efecto inercial se manifiesta en la reactancia tipo masa de la impedancia acústica específica. En este límite de longitud de onda grande, la presión

$$\mathbf{p}(r, t) = i \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} k a e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.67)$$

está desfasada con respecto a la velocidad de partícula por un ángulo cercano a $\pi/2$, la presión y velocidad de partícula no están fuera de fase exactamente por $\pi/2$ ya que esto llevaría al anulamiento de la intensidad.

Por otro lado, en el régimen $ka \ll 1$ la intensidad acústica se obtiene a partir de (2.58) y usando (2.60) queda

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c u_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 (ka)^2 \quad (2.68)$$

con u_0 constante. Es conveniente notar que la amplitud de la presión en (2.67), $P = \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} k a$ y la intensidad están simplemente relacionados

$$I = \frac{P^2}{2\rho_0 c} \quad (2.69)$$

La intensidad (2.68) es proporcional al cuadrado de la frecuencia y depende de la cuarta potencia del radio de la fuente. De este modo, podemos ver que fuentes pequeñas, respecto a su longitud de onda, son inherentemente pobres radiadores de energía acústica.

Cuando las dimensiones de la fuente son más pequeñas que la longitud de onda radiada, el campo de presión depende de la cantidad de aire desplazado, una medida de esto es el desplazamiento de volumen, definido como el área de la superficie vibrante por la amplitud promedio del desplazamiento ξ . Su derivada temporal se conoce como *fortaleza de la fuente*

y está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \frac{d}{dt} \int_S \vec{\xi} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_S \vec{u} \cdot \hat{n} ds\end{aligned}\quad (2.70)$$

donde S representa el área de la superficie vibrante y \hat{n} el vector unitario normal a la superficie. Notando que la fortaleza oscila con la frecuencia ω , podemos escribir

$$\mathbf{Q} = Q e^{i\omega t} \quad (2.71)$$

Es importante notar que, sin importar la forma que tengan, fuentes que producen el mismo campo acústico que una esfera pulsante, siempre que la longitud de onda sea mayor que las dimensiones de la fuente y que éstas tengan la misma fortaleza, son llamadas fuentes simples. Como consecuencia de esto, la razón de la fortaleza de a la presión que produce en un punto, a una distancia r de la fuente, es la misma para todas las fuentes simples, a la misma frecuencia. Este resultado es conocido como *principio de reciprocidad acústica* y se puede enunciar matemáticamente como

$$\frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{p}_1(r)} = \frac{\mathbf{Q}_2}{\mathbf{p}_2(r)} \quad (2.72)$$

este cociente es llamado *factor de reciprocidad*.

Lo anterior nos permite calcular el campo de presión de cualquier fuente simple por más irregular que sea ya que dicho campo debe ser idéntico al campo de presión producido por una pequeña esfera pulsante de la misma fortaleza.

2.5. Fuentes simples

2.5.1. Fuente libre

La fuente es libre si está en el *espacio libre*; es decir, si genera un campo de presiones como el dado por (2.67). En ese caso podemos calcular el factor de reciprocidad, de campo libre, con ayuda de la fortaleza de una fuente esférica de radio promedio a

$$\mathbf{Q} = \int_S u_0 e^{i\omega t} ds = 4\pi u_0 a^2 e^{i\omega t} \quad (2.73)$$

y utilizando la expresión para la presión en el espacio libre, ecuación (2.67), tenemos

$$\frac{Q}{\mathbf{p}(r)} = \frac{4\pi u_0 a^2 e^{i\omega t}}{i\rho_0 c u_0 \frac{a}{r} k a e^{i(\omega t - kr)}} = -i \frac{2\lambda r}{\rho_0 c} e^{ikr} \quad (2.74)$$

donde hemos usado la longitud de la onda sonora $\lambda = 2\pi/k$. Con esto podemos reescribir la expresión para la presión en el límite de grandes longitudes de onda, (2.67), en términos de la amplitud de la fortaleza de la fuente

$$\mathbf{p}(r, t) = \frac{1}{2} i \rho_0 c \frac{Q}{\lambda r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.75)$$

la cuál, por el *principio de reciprocidad*, es cierta para todas las fuentes simples.

La amplitud de presión para fuente simple es $P = |\mathbf{p}(r, t)|$

$$P = \frac{1}{2} \rho_0 c \frac{Q}{\lambda r} \quad (2.76)$$

con lo cual, de (2.69), obtenemos la intensidad

$$I = \frac{1}{8} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda r} \right)^2 \quad (2.77)$$

La integración de la intensidad sobre la superficie de una esfera de radio fijo, r , centrada en la fuente nos da la potencia radiada,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\rho_0 c Q^2}{8\lambda^2 r^2} 4\pi r^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.78)$$

Este resultado nos dice que la potencia radiada por la fuente libre es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la onda emitida.

2.5.2. Fuente apantallada.

Otro caso de interés práctico es aquél de una fuente simple cerca de una frontera rígida que no permite que la onda sonora pase a través de ella. Si las dimensiones de la frontera son mucho mayores que la longitud de onda del sonido, la frontera puede ser considerada como un plano de extensión infinita. Este tipo de frontera es denominada *baffle* o pantalla, y tenemos el caso de una fuente simple apantallada.

En la reflexión de una onda esférica en una frontera plana simple, el mismo campo de presiones puede ser generado por un sistema de dos fuentes, la primera es nuestra fuente original, en la segunda la fuerza y posición son seleccionados para satisfacer la condición en la frontera y recrear el campo de presiones en el espacio de interés, de manera similar al método de imágenes usado en el electromagnetismo³.

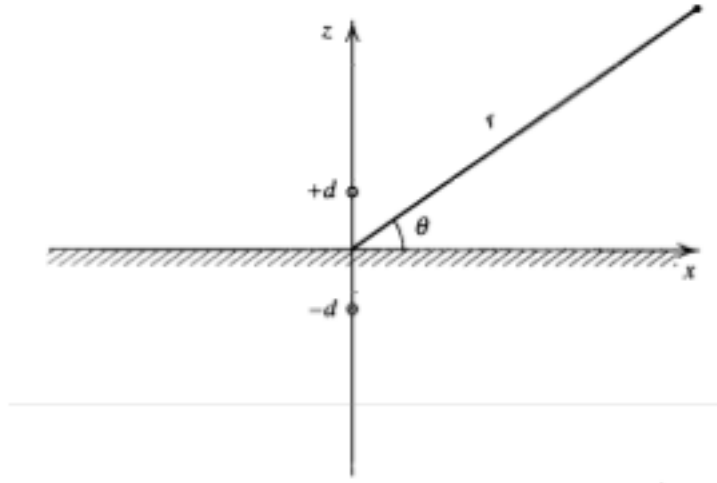


Figura 2.3: Uso del método de imágenes para calcular campos acústicos.

Consideremos una fuente de ondas esféricas colocada sobre el eje z a una distancia $+d$ del origen, ésta da origen a una onda esférica en todo el espacio dada por

$$\mathbf{p}(\vec{r}, t) = \frac{A}{r_-} e^{i(\omega t - kr_-)} \quad (2.79)$$

donde $r_- = \sqrt{(z-d)^2 + x^2 + y^2}$ es la distancia desde el punto $(0, 0, d)$ al punto $\vec{r} = (x, y, z)$, donde observamos la presión. Si la segunda fuente, la imagen, de igual fuerza, frecuencia y ángulo de fase inicial es colocada en $(0, 0, -d)$ a la distancia r_+ del punto de observación, la presión que genera es

$$\mathbf{p}(\vec{r}, t) = \frac{A}{r_+} e^{i(\omega t - kr_+)} \quad (2.80)$$

con $r_+ = \sqrt{(z+d)^2 + x^2 + y^2}$.

³El método de imágenes es consecuencia del teorema de unicidad de la solución de la ecuación de onda. Sin importar cómo se construye la solución a la ecuación de onda, si satisface las condiciones en la frontera e iniciales entonces es la solución del problema físico.

La presión debida a la fuente y la imagen en el punto \vec{r} es entonces:

$$\mathbf{p}(\vec{r}, t) = \frac{A}{r_-} e^{i(\omega t - kr_-)} + \frac{A}{r_+} e^{i(\omega t - kr_+)} \quad (2.81)$$

es fácil demostrar que, en $z = 0$, la componente normal de la velocidad de partícula es cero, cumpliendo la condición en la frontera.

Para un mejor entendimiento busquemos la expresión a la cual se reduce esta solución analítica para puntos lejanos a la fuente, $r \gg d$. De la definición de r_{\pm} , como la distancia de la imagen y la fuente al punto \vec{r} , tenemos

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \sqrt{r^2 \pm 2rd \sin \theta + d^2} \\ &= r \left[1 \pm \frac{2d \sin \theta}{r} + \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo que forma el vector que ubica el punto de interés con respecto al plano de la frontera. Para $r \gg d$ tenemos la aproximación

$$r_{\pm} \approx r \sqrt{1 \pm \frac{2d \sin \theta}{r}}$$

y usando el desarrollo binomial a primer orden queda

$$r_{\pm} \approx r \pm \Delta r \quad (2.82)$$

donde

$$\Delta r = d \sin \theta \quad (2.83)$$

Con estos resultados la expresión para la presión (2.81) se vuelve

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(r, \theta, t) &\approx \frac{A}{r - \Delta r} e^{i[\omega t - k(r - \Delta r)]} + \frac{A}{r + \Delta r} e^{i[\omega t - k(r + \Delta r)]} \\ &\approx \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \left\{ \frac{e^{ik\Delta r}}{1 - \frac{\Delta r}{r}} + \frac{e^{-ik\Delta r}}{1 + \frac{\Delta r}{r}} \right\} \end{aligned} \quad (2.84)$$

y haciendo uso de la serie geométrica

$$\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x + \dots$$

con el desarrollo a primer orden en Δr , y después de usar la relación estándar entre exponenciales complejas y funciones trigonométricas, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(r, \theta, t) &\approx 2 \frac{A}{r} \cos(k\Delta r) e^{i(\omega t - kr)} \\ &\approx 2 \frac{A}{r} \cos(kd \sin \theta) e^{i(\omega t - kr)} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Entonces el campo de presión en el semiespacio ocupado por la fuente es el doble del generado por la fuente en el espacio libre, ecuación (2.76), y por lo tanto tiene amplitud de presión

$$P = \rho_0 c \frac{Q}{\lambda r} \quad (2.86)$$

Como resultado de esto la intensidad es incrementada por un factor de cuatro,

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda r} \right)^2 \quad (2.87)$$

y la integración de la intensidad sobre un hemisferio, ya que no hay penetración acústica al espacio detrás de la pantalla, da el doble de la potencia radiada,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda r} \right)^2 2\pi r^2 \\ &= \pi \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.88)$$

La duplicación de la potencia de salida de la fuente puede ser visto como sorpresivo pero resulta del hecho de que la fuente tiene la misma fortaleza en ambos casos, la superficie de la fuente se está moviendo con la misma velocidad, pero en el caso apantallado está trabajando al doble de fortaleza y por lo tanto debe gastar el doble de la potencia para mantener su propio movimiento en presencia de la pantalla.

2.6. Impedancia de radiación

Consideremos una fuente acústica cuya cara activa, de área S , llamada diafragma, se mueve uniformemente con velocidad \mathbf{u} cuya magnitud y fase pueden ser función de la posición. Si $d\mathbf{f}_S$ es la componente normal de la fuerza en un elemento dS del diafragma, la impedancia de radiación es

$$\mathbf{Z}_r = \int_S \frac{d\mathbf{f}_S}{\mathbf{u}} \quad (2.89)$$

donde la integral se extiende sobre toda la superficie S .

Si el diafragma tiene masa m , resistencia mecánica R_m , es impulsado por un resorte de constante s y se mueve uniformemente con una componente normal de velocidad $\mathbf{u}_0 = u_0 e^{i\omega t}$ bajo la fuerza externa aplicada $\mathbf{f} = f_0 e^{i\omega t}$, la segunda ley de Newton revela

$$\mathbf{f} - \mathbf{f}_S - R_m \frac{d\xi}{dt} - s\xi = m \frac{d^2\xi}{dt^2} \quad (2.90)$$

donde ξ es el complejo que representa al desplazamiento del diafragma y la fuerza debida al fluido es $\mathbf{f}_S = \mathbf{Z}_r \mathbf{u}_0$, donde \mathbf{Z}_r es la impedancia de radiación. Sustituyendo \mathbf{f} y \mathbf{f}_S queda la ecuación

$$f_0 e^{i\omega t} - \mathbf{Z}_r u_0 e^{i\omega t} - R_m \frac{d\xi}{dt} - s\xi = m \frac{d^2\xi}{dt^2} \quad (2.91)$$

para la cual proponemos como solución

$$\xi = \mathbf{A} e^{i\omega t} \quad (2.92)$$

sustituyendo y cancelando el factor $e^{i\omega t}$, tenemos

$$f_0 - u_0 \mathbf{Z}_r - R_m \mathbf{A} i\omega - s\mathbf{A} = -m\omega^2 \mathbf{A}$$

despejando la amplitud \mathbf{A} de esta expresión

$$\mathbf{A} = \frac{f_0 - \mathbf{Z}_r u_0}{i\omega R_m - m\omega^2 + s} \quad (2.93)$$

y sustituyendo este resultado en (2.92) tenemos

$$\xi(t) = \frac{f_0 - \mathbf{Z}_r u_0}{i\omega R_m - m\omega^2 + s} e^{i\omega t} \quad (2.94)$$

Derivando $\xi(t)$ con respecto al tiempo obtenemos la velocidad

$$\frac{d\xi}{dt} = i\omega \frac{f_0 - u_0 \mathbf{Z}_r}{i\omega R_m - m\omega^2 + s} e^{i\omega t} \quad (2.95)$$

ésta es la velocidad $\mathbf{u}_0(t)$ del diafragma, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(t) &= \frac{f_0 e^{i\omega t} - u_0 \mathbf{Z}_r e^{i\omega t}}{R_m + im\omega - i\frac{s}{\omega}} \\ &= \frac{\mathbf{f} - \mathbf{Z}_r \mathbf{u}_0(t)}{R_m + im\omega - i\frac{s}{\omega}} \end{aligned} \quad (2.96)$$

en términos de la impedancia mecánica, \mathbf{Z}_m ,

$$\mathbf{Z}_m = R_m + i \left(m\omega - \frac{s}{\omega} \right) \quad (2.97)$$

finalmente obtenemos la relación

$$\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_r} \quad (2.98)$$

así, en la presencia de una carga de fluido, la fuerza aplicada enfrenta la suma de la impedancia mecánica de la fuente y la impedancia de radiación.

La impedancia de radiación puede ser expresada como

$$\mathbf{Z}_r = Z_r e^{i\theta} = R_r + iX_r \quad (2.99)$$

con

$$R_r = Z_r \cos \theta \quad X_r = Z_r \sin \theta$$

donde R_r es la resistencia de radiación y X_r es la reactancia de radiación. Un valor positivo de R_r incrementa la resistencia total, aumentando la potencia disipada por la fuente en una cantidad igual a la potencia radiada en el fluido. Veamos, la potencia radiada es el producto de la fuerza debida al fluido, $\Re(\mathbf{f}_S = \mathbf{Z}_r \mathbf{u}_0)$, por la velocidad, $\Re(\mathbf{u}_0 = u_0 e^{i\omega t})$. Por lo tanto, la potencia radiada es el promedio:

$$\Pi = \frac{1}{T} \int_0^T Z_r u_0^2 \cos(\omega t + \theta) \cos \omega t dt \quad (2.100)$$

donde T es el periodo de la onda sonora. Usando identidades trigonométricas podemos escribir la ecuación anterior en la forma

$$\Pi = \frac{1}{2T} Z_r u_0^2 \int_0^T (\cos \theta + \cos \theta \cos 2\omega t - \sin \theta \sin 2\omega t) dt \quad (2.101)$$

Como el periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega}$, el promedio de los términos con seno y coseno de $2\omega t$ es cero, queda

$$\Pi = \frac{1}{2} u_0^2 Z_r \cos \theta$$

y por lo tanto, la potencia radiada en un periodo es proporcional a la resistencia de radiación

$$\Pi = \frac{1}{2} R_r u_0^2 \quad (2.102)$$

A su vez, la resistencia de radiación puede ser encontrada si se conoce la potencia radiada en el fluido

$$R_r = \frac{2}{u_0^2} \Pi \quad (2.103)$$

y ahora podemos usar las expresiones para la potencia Π ya calculadas. Si la fuente es libre, usamos (2.78) para tener

$$R_{rl} = \pi \frac{\rho_0 c}{u_0^2} \left(\frac{Q}{\lambda} \right)^2 \quad (2.104)$$

y si la fuente es apantallada, usamos (2.88)

$$R_{ra} = 2\pi \frac{\rho_0 c}{u_0^2} \left(\frac{Q}{\lambda} \right)^2 \quad (2.105)$$

recordando que $Q = u_0 S$, y sustituyendo $\lambda = 2\pi/k$, queda

$$R_{rl} = \frac{\rho_0 c}{4\pi} k^2 S^2 \quad (\text{libre}) \quad (2.106a)$$

$$R_{ra} = \frac{\rho_0 c}{2\pi} k^2 S^2 \quad (\text{apantallada}) \quad (2.106b)$$

donde, en cada caso, S es la superficie relevante del área de la fuente.

De (2.98) tenemos que la reactancia total es la suma de la reactancia mecánica y la reactancia de radiación

$$X = m\omega - \frac{s}{\omega} + X_r \quad (2.107)$$

si asumimos que la reactancia total es cero, $X = 0$, podemos dar una interpretación alternativa a la reactancia de radiación, ya que en ese caso podemos escribir

$$\begin{aligned} m + \frac{X_r}{\omega} &= \frac{s}{\omega^2} \\ \omega^2 &= \frac{s}{m + \frac{X_r}{\omega}} \\ \omega &= \sqrt{\frac{s}{m + m_r}} \end{aligned} \quad (2.108)$$

donde $m_r = \frac{X_r}{\omega}$. De aquí que un valor positivo de X_r se manifestará como una carga de masa que decrece la frecuencia original del oscilador de $\sqrt{s/m}$ a la frecuencia $\sqrt{s/(m + m_r)}$. Entonces podemos interpretar a m_r como la masa de radiación. El efecto de la masa de radiación puede ser leve para fuentes operando en un medio ligero como el aire, pero para un fluido denso como el agua el decremento de la frecuencia de resonancia como resultado de la presencia del medio puede ser notable.

2.7. Impedancia de radiación de un pistón circular plano

Una fuente acústica de interés práctico es el pistón circular plano, que sirve de modelo para numerosas fuentes, incluyendo bocinas, tubos de órganos abiertos, y ductos de ventilación.

Consideremos un pistón de radio a montado en una superficie rígida y plana, de extensión infinita. Permitamos que la superficie del pistón se mueva uniformemente con velocidad $u_0 e^{i\omega t}$ normal a la pantalla.

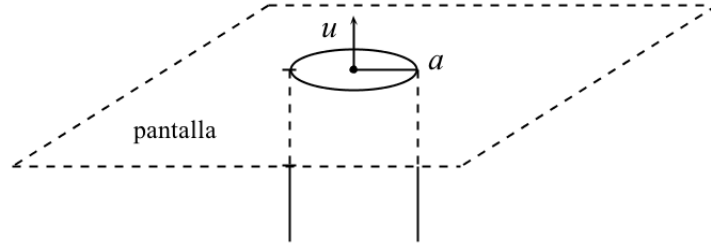


Figura 2.4: Pistón de radio a montado en una pantalla. La superficie del pistón se mueve uniformemente con velocidad $u_0 e^{i\omega t}$ normal a la pantalla.

La presión en cualquier punto del campo puede ser obtenida dividiendo la superficie del pistón en elementos infinitesimales dS' , de los cuáles cada uno actúa como una fuente simple apantallada colocada en el punto \vec{r}' . Consideremos el diferencial de fortaleza de la fuente

$$dQ = u_0 dS' \quad (2.109)$$

Sustituyendo en la expresión para la amplitud de presión debida a una fuente apantallada, ecuación (2.86), escribimos el diferencial de amplitud de presión como

$$dP = \rho_0 c \frac{u_0 dS'}{\lambda |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.110)$$

y la presión total se obtiene integrando sobre la superficie del pistón

$$\mathbf{p}(\vec{r}, t) = i\rho_0 c \frac{u_0}{\lambda} \int_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{i(\omega t - k|\vec{r} - \vec{r}'|)} dS' \quad (2.111)$$

donde la integral de superficie es tomada sobre la región $r' \leq a$.

Para calcular la impedancia de radiación de un pistón circular apantallado de radio a y velocidad $\mathbf{u}(t) = u_0 e^{i\omega t}$, consideremos el área infinitesimal dS' de la superficie del pistón, vea la figura 2.5. Dejemos que $d\mathbf{p}$ sea el incremento en la presión que el movimiento de dS' produce en algún otro elemento de área dS del pistón. La presión total \mathbf{p} en dS puede

ser obtenida integrando la expresión (2.111), para la presión de un pistón circular plano, sobre la superficie del pistón,

$$\mathbf{p} = i\rho_0 c \frac{u_0}{\lambda} \int_S \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS' \quad (2.112)$$

donde $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$ es la distancia entre dS y dS' . La fuerza total \mathbf{f}_S en el pistón debido a la presión es la integral de \mathbf{p} sobre dS , de modo que $\mathbf{f}_S = \int \mathbf{p} dS$. La integración sobre dS' para tener \mathbf{p} y entonces sobre dS para tener \mathbf{f}_S incluye la fuerza en dS resultante del movimiento de dS' y viceversa. Pero, del teorema de reciprocidad acústica, estas dos fuerzas son iguales; consecuentemente, el resultado de la doble integración es el doble de lo que se obtendría si los límites de integración fueran escogidos para incluir la fuerza entre cada par de elementos sólo una vez. Esta selección de los límites da lugar a una considerable simplificación del problema.

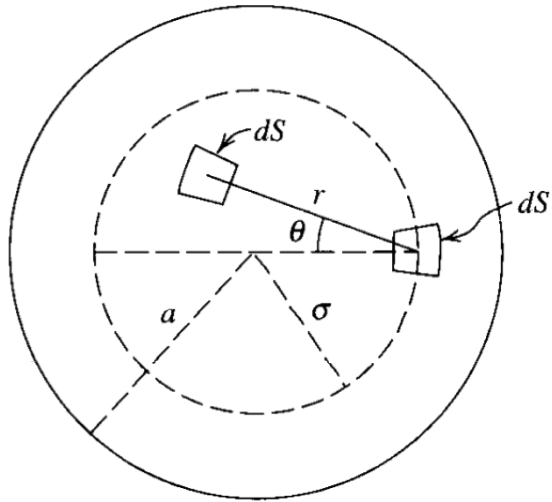


Figura 2.5: Elementos de superficie dS y dS' utilizados para obtener la fuerza de reacción del pistón circular plano.

En la figura 2.5, con σ hemos representado la distancia radial desde el centro del pistón hasta dS' , cada par de elementos es usado sólo una vez mediante la integración sobre el área del pistón dentro de este círculo de radio σ . La máxima distancia desde dS' a cualquier punto dentro del círculo es $2\sigma \cos \theta$, entonces el área completa del círculo será cubierta si

integramos r de 0 a $2\sigma \cos \theta$ y entonces integramos θ de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Extendamos ahora la integración de dS' sobre la superficie completa del pistón escribiendo $dS' = \sigma d\sigma d\phi$ e integrando ϕ de 0 a 2π y entonces σ de 0 a a . Después de multiplicar esto por dos, tenemos la expresión para la fuerza total \mathbf{f}_S en el pistón,

$$\mathbf{f}_S = 2i\rho_0 c \frac{u_0}{\lambda} e^{i\omega t} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sigma \cos \theta} \frac{1}{r} e^{-ikr} r \sigma dr d\theta d\phi d\sigma \quad (2.113)$$

Primero realicemos la integral sobre la variable r

$$\int_0^{2\sigma \cos \theta} e^{-ikr} dr = \frac{i}{k} (-1 + e^{-2ik\sigma \cos \theta}) \quad (2.114)$$

Ahora integramos este resultado con respecto al ángulo θ

$$\begin{aligned} \frac{i}{k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-1 + e^{-2ik\sigma \cos \theta}) d\theta &= -\frac{i\pi}{k} \\ &+ \frac{i}{k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(2k\sigma \cos \theta) - i \sin(2k\sigma \cos \theta)] d\theta \end{aligned} \quad (2.115)$$

como el integrando depende de $\cos \theta$ y ésta es una función par, cada integral es dos veces la integral de 0 a $\pi/2$ y usando las identidades

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2k\sigma \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} J_0(2k\sigma) \quad (2.116)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2k\sigma \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} H_0(2k\sigma) \quad (2.117)$$

donde $J_0(x)$ y $H_0(x)$ son las funciones de Bessel y Struve de orden cero, respectivamente.

Por lo tanto

$$\frac{i}{k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-1 + e^{-2ik\sigma \cos \theta}) d\theta = -\frac{i\pi}{k} + \frac{i\pi}{k} J_0(2k\sigma) + \frac{\pi}{k} H_0(2k\sigma) \quad (2.118)$$

La integral sobre el ángulo φ da como resultado un factor global de 2π y queda sólo la integral en la variable σ . Con estos resultados la integral múltiple que aparece en (2.113) es

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sigma \cos \theta} e^{-ikr} \sigma dr d\theta d\phi d\sigma &= \\ &= -i \frac{\pi^2 a^2}{k} + i \frac{2\pi^2}{k} \int_0^a \sigma J_0(2k\sigma) d\sigma + \frac{2\pi^2}{k} \int_0^a \sigma H_0(2k\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (2.119)$$

Con el cambio de variable

$$x = 2k\sigma \quad (2.120)$$

la integral queda como

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sigma \cos \theta} e^{-ikr} \sigma dr d\theta d\varphi d\sigma = \\ -i \frac{\pi^2 a^2}{k} + i \frac{\pi^2}{2k^3} \int_0^{2ka} x J_0(x) dx + \frac{\pi^2}{2k^3} \int_0^{2ka} x H_0(x) dx \end{aligned} \quad (2.121)$$

y usando las siguientes propiedades de las funciones de Bessel

$$\int_0^{2ka} x J_0(x) dx = 2ka J_1(2ka) \quad (2.122)$$

$$\int_0^{2ka} x H_0(x) dx = 2ka H_1(2ka) \quad (2.123)$$

obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sigma \cos \theta} e^{-ikr} \sigma dr d\theta d\varphi d\sigma = \\ \frac{\pi^2 a^2}{k} \left[i \left(\frac{1}{ka} J_1(2ka) - 1 \right) + \frac{1}{ka} H_1(2ka) \right] \end{aligned} \quad (2.124)$$

Una vez realizada la integral podemos sustituir en la ecuación (2.113) para tener la expresión de la fuerza total sobre el pistón

$$\mathbf{f}_S = 2i\rho_0 c \frac{u_0}{\lambda} e^{i\omega t} \frac{\pi^2 a^2}{k} \left[i \left(\frac{1}{ka} J_1(2ka) - 1 \right) + \frac{1}{ka} H_1(2ka) \right] \quad (2.125)$$

y sustituyendo la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, la velocidad $\mathbf{u}(t) = u_0 e^{i\omega t}$ y el área del pistón $S = \pi a^2$, obtenemos

$$\mathbf{f}_S = \rho_0 c S \left(1 - \frac{1}{ka} J_1(2ka) + i \frac{1}{ka} H_1(2ka) \right) \mathbf{u}(t) \quad (2.126)$$

De esta expresión obtenemos la impedancia de radiación del pistón circular, dada por el cociente $\mathbf{Z}_r = \mathbf{f}_S / \mathbf{u}$,

$$\mathbf{Z}_r = \rho_0 c S \left(1 - \frac{1}{ka} J_1(2ka) + i \frac{1}{ka} H_1(2ka) \right) \quad (2.127)$$

por lo tanto, si definimos las funciones

$$R_1(x) = 1 - \frac{2}{x} J_1(x)$$

$$X_1(x) = \frac{2}{x} H_1(x)$$

la resistencia y reactancia de radiación del pistón son

$$R = \rho_0 c S R_1(2ka) \quad (2.128)$$

$$X = \rho_0 c S X_1(2ka) \quad (2.129)$$

Usando los desarrollos en potencias de las funciones Bessel y Struve de primer orden, las funciones $R_1(x)$ y $X_1(x)$ son

$$R_1(x) = \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{x^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} - \dots \quad (2.130a)$$

$$X_1(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} + \frac{x^5}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right) \quad (2.130b)$$

En el límite de bajas frecuencias, $ka \ll 1$, la impedancia de radiación puede ser aproximada por los primeros términos de los desarrollos en potencias. Así, la resistencia de radiación se reduce a

$$R \approx \frac{1}{2} \rho_0 c S k^2 a^2 \quad (2.131)$$

la reactancia de radiación se vuelve

$$X \approx \frac{8}{3\pi} \rho_0 c S k a \quad (2.132)$$

y, por lo tanto, la impedancia de radiación del pistón apantallado en el límite de bajas frecuencias es

$$\mathbf{Z}_r = \frac{1}{2} \rho_0 c S k^2 a^2 + i \frac{8}{3\pi} \rho_0 c S k a \quad (2.133)$$

Note que, en el límite de bajas frecuencias, la resistencia de radiación del pistón es idéntica a la de una fuente simple apantallada de la misma superficie S , ecuación (2.106b), y que la reactancia de radiación es equivalente a un término de masa, m_r , dado por

$$m_r = \frac{X_r}{\omega} = \frac{8}{3\pi} \rho_0 S a \quad (2.134)$$

esta masa se suma a la del pistón para dar una masa efectiva: $m + m_r$. De este modo, el pistón parece estar cargado con un volumen cilíndrico adicional de fluido, cuya sección transversal es la superficie S del pistón y cuya altura efectiva es $8a/3\pi \approx 0.85a$.

2.8. Tubos

El comportamiento del sonido en un tubo de paredes rígidas depende, además de las propiedades de la fuente, de la longitud del tubo, del comportamiento de su sección transversal como función de la distancia, de la presencia de alguna perforación en sus paredes y de las condiciones en la frontera que describan alguna terminación. Si la longitud de onda del sonido es suficientemente grande, el movimiento de la onda puede ser aproximado por una onda plana, esto ofrece una gran simplificación.

Segmentos de tubos que tienen dimensiones suficientemente pequeñas comparadas con las longitudes de onda relevantes pueden ser considerados como elementos acústicos pasivos cuyo comportamiento semeja al de osciladores mecánicos simples. Estos elementos encuentran aplicación como modelos para sistemas más complicados a bajas frecuencias, permitiendo el estudio de la transmisión de ruido característico de las tuberías, ductos, escapes y otros, sin afectar significativamente ningún flujo estacionario de fluido a través del sistema.

2.8.1. Resonancia en tubos

Asumamos que el fluido en un tubo, con área de sección transversal S y longitud L , es excitado por un pistón colocado en $x = 0$ y que el tubo termina en $x = L$. Si el pistón vibra con frecuencias para las cuales sólo se propagan ondas planas, la onda de presión en el tubo se describe mediante la superposición

$$\mathbf{p}(x, t) = \mathbf{A}e^{i[\omega t + k(L-x)]} + \mathbf{B}e^{i[\omega t - k(L-x)]} \quad (2.135)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son determinadas por las condiciones en la frontera, en $x = 0$ y $x = L$.

La velocidad de partícula se obtiene a partir de la expresión

$$\mathbf{u}(x, t) = -(1/\rho_0) \int (\partial \mathbf{p} / \partial x) dt \quad (2.136)$$

y está dada por

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{k}{\rho_0 \omega} [\mathbf{A}e^{i[\omega t + k(L-x)]} - \mathbf{B}e^{i[\omega t - k(L-x)]}] \quad (2.137)$$

Puesto que la fuerza total del fluido sobre el área transversal en el punto x es $\mathbf{p}(x, t)S$, con las dos expresiones anteriores podemos encontrar la impedancia de radiación, $\mathbf{Z} =$

pS/\mathbf{u} , para todo punto del tubo

$$\mathbf{Z}(x) = \frac{\rho_0 \omega S}{k} \frac{\mathbf{A}e^{ik(L-x)} + \mathbf{B}e^{-ik(L-x)}}{\mathbf{A}e^{ik(L-x)} - \mathbf{B}e^{-ik(L-x)}} \quad (2.138)$$

Si con \mathbf{Z}_0 y \mathbf{Z}_L denotamos la impedancia en $x = 0$ y en $x = L$, respectivamente, entonces

$$\mathbf{Z}_0 = \rho_0 c S \frac{\mathbf{A}e^{ikL} + \mathbf{B}e^{-ikL}}{\mathbf{A}e^{ikL} - \mathbf{B}e^{-ikL}} \quad (2.139a)$$

$$\mathbf{Z}_L = \rho_0 c S \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{\mathbf{A} - \mathbf{B}} \quad (2.139b)$$

donde hemos usado la identidad $\omega = kc$. Es conveniente definir la impedancia escalada, en unidades de $\rho_0 c S$,

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{Z}}{\rho_0 c S} \quad (2.140)$$

Ahora, combinando las ecuaciones (2.139a) y (2.139b) para eliminar las constantes \mathbf{A} y \mathbf{B} obtenemos una relación entre las impedancias escaladas de los extremos del tubo

$$\mathbf{z}_0 = \frac{\mathbf{z}_L + i \tan kL}{1 + i \mathbf{z}_L \tan kL} \quad (2.141)$$

Denotemos la impedancia de salida \mathbf{z}_L como

$$\mathbf{z}_L = r_L + ix_L \quad (2.142)$$

donde r_L y x_L son la resistencia y reactancia, escaladas, en la salida del tubo, respectivamente. Entonces, la ecuación (2.141) puede escribirse como

$$\mathbf{z}_0 = \frac{r_L + i(x_L + \tan kL)}{(1 - x_L \tan kL) + ir_L \tan kL} \quad (2.143)$$

desarrollando la expresión obtenemos la resistencia y reactancia en la entrada del tubo

$$\begin{aligned} \Re\{\mathbf{z}_0\} &= \frac{r_L - x_L(r_L - 1) \tan kL + \tan^2 kL}{(1 - x_L \tan kL)^2 + r_L^2 \tan^2 kL} \\ \Im\{\mathbf{z}_0\} &= \frac{x_L + (1 - x_L^2 - r_L^2) \tan kL - x_L \tan^2 kL}{(1 - x_L \tan kL)^2 + r_L^2 \tan^2 kL} \end{aligned} \quad (2.144)$$

Recordando que las frecuencias de resonancia están determinadas por el anulamiento de la reactancia mecánica de entrada, entonces para encontrar dichas resonancias requerimos $\Im\{\mathbf{z}_0\} = 0$. A continuación consideramos los casos particulares en que el tubo está cerrado o abierto.

2.8.1.1. Tubo cerrado

Supongamos que el tubo está cerrado en $x = L$ por una tapa rígida. Esto significa que la resistencia de salida es infinita, $r_L \rightarrow \infty$, y esto a su vez, con la ecuación (2.144), nos lleva a que la reactancia de entrada sea

$$\Im\{\mathbf{z}_0\} = -\cot kL \quad (2.145)$$

La reactancia es cero, $\cot kL = 0$, y las resonancias ocurren cuando

$$k_n L = (2n - 1)\frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.146)$$

es decir, las frecuencias de resonancia son los armónicos impares de la frecuencia fundamental

$$f_n = (2n - 1)f_1 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.147)$$

donde $f_1 = c/4L$ es la frecuencia fundamental.

2.8.1.2. Tubo abierto

Ahora consideremos el caso en que el tubo está abierto en $x = L$. En este caso la impedancia de salida es la impedancia de radiación, $\mathbf{z}_L = \mathbf{z}_r$, ya que el final abierto del tubo radía sonido al medio que lo rodea.

Si asumimos, por ejemplo, que el extremo abierto del tubo circular de radio a está rodeado por un embudo grande respecto a la longitud de onda, situación que llamaremos *terminación suave*, entonces la abertura semeja a un pistón apantallado en el límite de bajas frecuencias, $ka \ll 1$, cuya impedancia de radiación está dada por la ecuación (2.133), de donde tenemos

$$\frac{\mathbf{z}_r}{\rho_0 c S} = \mathbf{z}_L = \frac{1}{2}(ka)^2 + i\frac{8}{3\pi}ka \quad (\text{terminación suave}) \quad (2.148)$$

en este caso $r_L = (ka)^2/2$ y $x_L = 8ka/3\pi$.

Las resonancias son los valores k_n tales que la reactancia de entrada sea cero, $\Im\{\mathbf{z}_0\} = 0$, de (2.144) obtenemos la ecuación para k_n

$$\frac{x_L + (1 - x_L^2 - r_L^2) \tan k_n L - x_L \tan^2 k_n L}{(1 - x_L \tan k_n L)^2 + r_L^2 \tan^2 k_n L} = 0 \quad (2.149)$$

tomando en cuenta que, como $ka \ll 1$, entonces tanto r_L como x_L son mucho menores que la unidad, la ecuación anterior se aproxima por

$$\frac{x_L + \tan kL - x_L \tan^2 k_n L}{1 - 2x_L \tan k_n L} \approx 0 \quad (2.150)$$

y desarrollando el denominador

$$\begin{aligned} (x_L + \tan k_n L - x_L \tan^2 k_n L)(1 + 2x_L \tan k_n L) &\approx \\ x_L + \tan k_n L + x_L \tan^2 k_n L &\approx 0 \end{aligned} \quad (2.151)$$

resolviendo para $\tan k_n L$ obtenemos como condición para calcular las resonancias k_n

$$\tan k_n L \approx -x_L \quad (2.152)$$

sustituyendo x_L , la ecuación anterior se escribe en forma equivalente como

$$\tan(k_n L) = -\frac{8}{3\pi} k_n a \approx \tan\left(\frac{-8k_n a}{3\pi}\right) \quad (2.153)$$

cuya solución es

$$k_n L = -\frac{8}{3\pi} k_n a + n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.154)$$

y de aquí las frecuencias de resonancia son

$$f_n = n f_1 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.155)$$

las resonancias de un tubo con terminación suave son todos los armónicos de la frecuencia fundamental

$$f_1 = c/[2(L + 8a/3\pi)] \quad (2.156)$$

Es importante notar que, como consecuencia de la impedancia de salida, el tubo ha incrementado su longitud a una longitud efectiva dada por

$$L_{ef} = L + \frac{8}{3\pi} a \approx L + 0.85a \quad (2.157)$$

esta predicción de la corrección en la longitud está de acuerdo con los valores medidos experimentalmente, vea las referencias [2] y [3].

Para un tubo de extremo abierto que termina abruptamente, llamado *terminación abrupta*, la teoría indica que la impedancia de radiación es

$$\frac{\mathbf{Z}_r}{\rho_0 c S} = \mathbf{z}_r = \frac{1}{4}(ka)^2 + i\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}ka \quad (\textit{terminación abrupta}) \quad (2.158)$$

por lo tanto, se sigue del caso anterior que las frecuencias de resonancia son todos los armónicos de la frecuencia fundamental $f_0 = c/[2(L + 4\sqrt{2}/3\pi)]$ y la longitud efectiva del tubo es

$$L_{ef} = L + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}a \approx L + 0.6a \quad (2.159)$$

y, de nuevo, este resultado concuerda con el medido experimentalmente.