Capítulo 6

Distribuciones

6.1 Introducción

En la dedicatoria del libro de Lighthill ([53]) aparece lo siguiente, en relación con el desarrollo del concepto de la delta de Dirac:

"to Paul Dirac who saw that it must be true,
Laurent Schwartz who proved it,
and George Temple who showed how simple it could be made".

P. Dirac y R. Feynmann

Después de los trabajos de Heaviside (1895), Dirac (1925) y Van del Pol (1932), Laurent Schwartz publicó de 1945 a 1948 una serie de artículos, exponiendo una teoría coherente y completa de une nueva herramienta matemática: las distribuciones. Poco más tarde, Gelfand en Rusia se considera también co-responsable de la oficialización de la nueva teoría, elaborando una teoría de funciones generalizadas, que son una extensión de las distribuciones. La trayectoria seguida por los avances en los conceptos de función sigue el itinerario función-medida-distribución. En palabras de Lauren Schwartz, reivindicando el papel de las matemáticas en los hábitos entonces muy corrientes entre los físicos de utilizar un conjunto de reglas de cálculo simbólico para menejar la delta de Dirac y sus "derivadas", "δ será una medida y no una función, δ será una distribución y no una medida". La clave del nuevo concepto consiste en hacer uso de una caracterización indirecta para las nuevas "funciones" que incluya a los conceptos de "función" precedentes. Dicha caracterización se basa en determinar el efecto de los nuevos (y antiguos) objetos sobre familias de funciones que tienen buenas propiedades de continuidad y diferenciabilidad: las funciones de prueba.

Laurent Schwartz en su *Theorie des Distributions* ha desarrollado una teoría rigurosa, George Temple ha dado una versión de la teoría (funciones generalizadas) que parece ser mas inteligible a los estudiantes, esta es la forma en que aquí la abordaremos.

Definición 6.1 (Espacio S de las funciones rápidamente decrecientes) S es el conjunto de funciones $f \in C^{\infty}$ tales que

$$\lim_{|x|\to\infty} \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right| |x|^l \to 0 \qquad \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

Nota 6.1 *El valor nulo del lımite anterior, significa que la función y todas sus derivadas tienen la propiedad de tender a cero mas rápido que cualquier crecimiento de las potencia de x, cuando $|x|$ es muy grande. Geometricamente la propiedad significa que la gráfica de y las gráficas de todas las derivadas, para $|x|$ muy grande se confunden con el eje x.*

Nota 6.2 *S es un espacio vectorial.*

Definición 6.2 (Funciones de prueba) Una *función de prueba* es una función $\phi(x) \in \mathcal{C}^{\infty}$ con soporte compacto. La cerradura del conjunto de valores de x en los que $\phi(x) \neq 0$ se llama *soporte* de la función $\phi(x)$.

Definición 6.3 (Sucesión regular f_n) Una sucesión de funciones (f_n) se dice ser *regular* si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \varphi \, \mathrm{d}x$$

existe para toda $\varphi \in S$.

Definición 6.4 (Distribución) Una *distribución* F es una funcional lineal definida a través de la sucesión de funciones siguiente:

$$\mathrm{F}\,[\varphi] = \lim_{n\to\infty} \int f_n \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Nota 6.3 *Una distribución es una clase de equivalencia de sucesiones regulares.*

En 1926, el físico inglés P.A.M. Dirac (1902-1984), introdujo la "función" delta de Dirac, en conexión con sus estudios sobre Mecánica Cuántica. Realmente no se trata de una función en el sentido ordinario del termino, sino de una distribución.

El concepto de la "función" delta de Dirac, también llamada función impulso unitario, resulta un modelo útil en situaciones en las que, por ejemplo, tenemos un sistema mecánico sobre el que actúa una fuerza externa de gran magnitud durante un breve instante de tiempo. En el caso extremo en el que esta fuerza estuviese concentrada en un punto, vendría representada por la delta de Dirac.

Debido a que en muchas situaciones se busca la respuesta de un sistema cuando se le aplica una fuerza externa muy intensa pero durante un intervalo muy corto de tiempo, lo que se conoce como una fuerza impulsiva, se introducen para modelar estas situaciones el siguiente objeto matemático.

6.2 Sucesiones delta

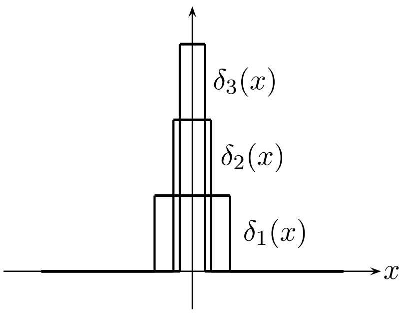
En esta sección la definición y propiedades de la delta de Dirac se establecen a partir del concepto de sucesión delta (ver [38], capítulo 4). La idea de una sucesión delta es que, aunque una función delta no puede existir, podemos encontrar una sucesión de funciones $\{\delta_n(x)\}$ que en el límite cuando $n \to \infty$ satisface la ecuación

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0)$$

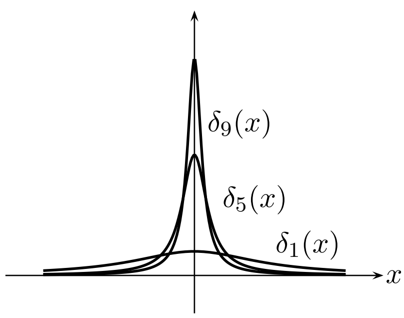
para toda función continua $\phi(x)$. Nótese que en definición de $\delta_n(x)$ de ninguna manera implica que el límite $\lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$ exista, pues, en general, no es permitido intercambiar los procesos de límite y de integración.

Hay muchos ejemplos de sucesiones delta; algunos de los mas sugestivos son los siguientes.

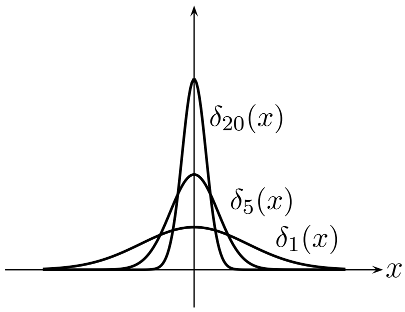
1. $\delta_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad |x| \leqslant \dfrac{1}{2n} \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \dfrac{1}{2n} \end{cases}$



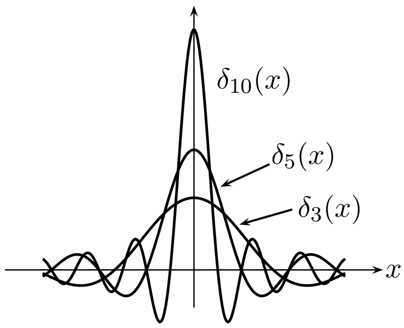
2. $\delta_n(x) = \dfrac{n}{\pi} \dfrac{1}{1 + x^2 n^2}$



3. $\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \exp\left(-nx^2\right)$



4. $\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{x}$



La distribución delta a veces es considerada como una "función" impulso, y en ese caso su representación gráfica sería como se muestra en la figura 6.1.

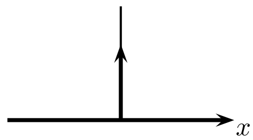


Figura 6.1: La "función" impulso

La función delta de Dirac no es una función en el sentido habitual, pero es un ejemplo de lo que se conoce como funciones generalizadas o distribuciones para las que existen las correspondientes nociones de derivada e integral. Manejadas con cuidado, las propiedades que mostraremos proporcionan resultados de contenido practico que no se pueden obtener por los métodos usuales, lo que hace de esta función una herramienta muy útil. Como tal, la función delta de Dirac es físicamente irrealizable, pero podemos aproximarla suficientemente bien de una manera que, además, nos permite entender de donde vienen sus propiedades.

Teorema 6.1 *Dada una función continua f*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\,. \tag{6.1}$$

Nota 6.4 *Simbólicamente se escribe: $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea F tal $F'(x) = f(x)$ y sea $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{si } x \in [-\varepsilon, \varepsilon], \\ 0 & \text{para otros valores de } x. \end{cases}$

Entonces, por definición,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)\,\delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}F(x)\Big|_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-F\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = F'(0) = f(0)\,.
\end{aligned}
$$

Entonces, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\,.$ □

Corolario 6.1 *En particular*

$$\delta(x) * f(x) = f(x)\,.$$

Nota 6.5 *La distribución δ es unidad respecto a la convolución.*

Teorema 6.2 *La delta de Dirac cumple*

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$

Demostración. Esta afirmación se puede probar de manera inmediata usando distintas sucesiones delta. Una manera es la siguiente:

$$\delta_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$

Otra sería:

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{+n} \mathrm{e}^{ixt-\frac{|t|}{n}}\,\mathrm{d}t,$$

y una tercera sería:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathrm{e}^{i\omega x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\omega;$$

Esta última es una integral de Fourier; por tanto

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$ □

Teorema 6.3 *Un sistema de vectores ortonormales $\{\psi_i(x)\}$ es una base si y sólo si se cumple la siguiente relación:*

$$\delta(x-y) = \sum_i \psi_i^*(y)\psi_i(x).$$

Demostración. El conjunto $\{\psi_i(x)\}$ es una base si y sólo si todo vector $\psi(x)$ se puede escribir en la forma

$$\psi(x) = \sum_i c_i \psi_i(x),$$

donde las constantes c_i están dadas por $c_i = \int \psi_i^*(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y$. Entonces

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_i c_i\psi_i(x) = \sum_i \left(\int \psi_i^*(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y\right)\psi_i(x)\\ &= \sum_i \left(\int \psi_i^*(y)\psi(y)\right)\psi_i(x)\,\mathrm{d}y = \sum_i \left(\int \psi_i^*(y)\psi_i(x)\right)\psi(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\sum_i \left(\int \psi_i^*(y)\psi_i(x)\right) = \delta(x-y).$$

□

Teorema 6.4 *Para la delta de Dirac se cumple que*

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$$

Demostración. En el teorema 6.1 hacer el cambio de variable $y = ax$ primero para $a > 0$ y luego para $a < 0$. □

Teorema 6.5 *Si H es la función de Heaviside, entonces*

$$\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x);$$

de modo equivalente

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x')\,\mathrm{d}x'.$$

Demostración. Sea H_n la sucesión de Heaviside $H_n(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arctan(nx)$.

Entonces $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2x^2}$; pero $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2x^2}$ es una sucesión delta.

Por tanto $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x) = \delta(x)$. □

Teorema 6.6 *Para la función signo se cumple que*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{sgn}(x) = \delta(x).$$

De manera equivalente

$$\mathrm{sgn}(x) = -1 + 2\int_{-\infty}^{x} \delta(x')\,\mathrm{d}x'.$$

Demostración. Nótese que $\operatorname{sgn}(x) = 2H(x) - 1$. □

Teorema 6.7 *(Paridad de la función Heaviside) La función de Heaviside satisface las siguientes identidades:*

$$\begin{aligned} H(x) + H(-x) &= 1, \\ H(x) - H(-x) &= \operatorname{sgn}(x). \end{aligned}$$

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de las definiciones. □

Teorema 6.8

$$\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = 2x\delta(x) + \operatorname{sgn}(x).$$

Demostración. Nótese que

$$|x| = x \operatorname{sgn}(x)$$

y, por tanto,

$$\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = x \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn}(x).$$ □

Teorema 6.9 *(de Dirichlet)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} \, \mathrm{d}x = \pi \operatorname{sgn}(a).$$

Teorema 6.10 *(Derivada de la delta de Dirac)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x-a) f(x) \, \mathrm{d}x = -f'(a).$$

Demostración. Integrando por partes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \delta'(x) \, \mathrm{d}x = f(x) \, \delta(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \, \delta(x) \, \mathrm{d}x;$$

por tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x-a) \, f(x) \, \mathrm{d}x = -f'(a).$$ □

Corolario 6.2 *Por inducción se cumple que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x) \, f(x) \, \mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

Definición 6.5 (Derivada de una distribución) Si F es una distribución y ϕ es una función de prueba, entonces la *derivada de* F, denotada con F$'$, se define de manera tal que se cumple lo siguiente:

$$\langle \, \mathrm{F}', \phi \rangle = - \langle \, \mathrm{F}, \phi' \rangle.$$

Teorema 6.11 *Si una función f se puede escribir en la forma*

$$f(x) = f_s(x) + \sum_{k=1}^{n} f_k H(x - x_k),$$

entonces f' existe excepto posiblemente en los puntos (de discontinuidad simple) x_k; además,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}x} + \sum_{k=1}^{n} f_k \delta(x - x_k).$$

A resultado siguiente muestra una manera en la que la transformada de Fourier se relaciona con distribuciones.

Teorema 6.12 *(Deltas con periodo 2π)*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2m\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(inx).$$

Teorema 6.13 *(Deltas con periodo L)*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mL) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{2\pi n}{L} ix}.$$

Teorema 6.14

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{e}^{ikx}\, \mathrm{d}k. \tag{6.2}$$

Demostración. Considere la sucesión delta siguiente:

$$\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon|k|} \cos kx\, \mathrm{d}k.$$

Como $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightharpoonup 0+} \delta_\varepsilon(x)$,
se sigue que

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k \cos(kx)\, \mathrm{d}k.$$

□

Nota 6.6 *En tres dimensiones, el teorema anterior establece que $\delta(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^3} \iiint \mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle}\, \mathrm{d}k$.*

Teorema 6.15 *Supongamos que $0 < x < L$. Sean $\phi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ y $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}} \cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$. Entonces,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\phi_n(x') = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \delta\left(x - x'\right),$$

$$\frac{1}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n(x') = \frac{2}{L}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\} = \delta\left(x - x'\right).$$

Teorema 6.16 *(Propiedad de completitud de las exponenciales)*

$$\delta\left(x - x'\right) = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{2\pi n}{L} i(x-x')}.$$

De manera equivalente

$$\delta\left(x - x'\right) = \frac{1}{L}\left(1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}\left(x - x'\right)\right)\right).$$

Demostración. Tomemos $\delta_n\left(x\right) = \begin{cases} n & |x| \leqslant \dfrac{1}{2n}, \\ 0 & |x| > \dfrac{1}{2n}. \end{cases}$

Entonces su serie de Fourier (de periodo $2L$) es

$$\delta_n\left(x\right) = \frac{1}{2L} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{m\pi} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{nL}\cos\frac{m\pi}{L}x.$$

Haciendo $n \to \infty$

$$\delta\left(x\right) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{L}x.$$

□

Corolario 6.3 *Se cumple*

$$\delta'\left(x\right) = \frac{ik}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k.$$

6.3 Transformada de Fourier

Presentamos a continuación la transformada de Fourier de algunas distribuciones, así como algunas consecuencias importantes.

Teorema 6.17 *(Transformada de Fourier de la función de Heaviside)*

$$\mathcal{F}[H(x)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}.$$

Teorema 6.18 *(Transformada de Fourier para la delta de Dirac)*

$$\mathcal{F}\left[\delta\left(t - a\right)\right] = \mathrm{e}^{-ia\omega}.$$

Demostración. $\mathcal{F}\left[\delta\left(t-a\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-it\omega}\,\delta\left(t-a\right)\mathrm{d}t$. Entonces

$$\mathcal{F}\left[\delta\left(t-a\right)\right]=\mathrm{e}^{-ia\omega}\,.$$

□

Corolario 6.4 $\mathcal{F}\left[\delta\left(t\right)\right]=1$.

Teorema 6.19 *(Completez de las exponenciales)*

$$\delta\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-it\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Demostración. De

$$\delta\left(t\right)=\mathcal{F}^{-1}\left[\delta\left(\omega\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-it\omega}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\omega.$$

se sigue que

$$\delta\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-it\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

□

Teorema 6.20 *(Transformada de Fourier de la derivada de la delta de Dirac)*

$$\mathcal{F}\left[\delta'\left(t-a\right)\right]=\frac{1}{2\pi}i\omega\,\mathrm{e}^{ia\omega}\,.$$

Teorema 6.21 1. *Transformada de la función exponencial*

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{bx}\right]=2\pi\delta\left(s-ib\right). \tag{6.3}$$

2. *Transformada de las funciones circulares*

$$\mathcal{F}\left[\operatorname{sen} bx\right]=i\pi\left[\delta\left(s-b\right)-\delta\left(s+b\right)\right]. \tag{6.4}$$

$$\mathcal{F}\left[\cos bx\right]=\pi\left[\delta\left(s-b\right)+\delta\left(s+b\right)\right]. \tag{6.5}$$

3. *Transformada de las funciones hiperbólicas*

$$\mathcal{F}\left[\operatorname{senh} bx\right]=\pi\left[\delta\left(s-ib\right)-\delta\left(s+ib\right)\right]. \tag{6.6}$$

$$\mathcal{F}\left[\cosh bx\right]=\pi\left[\delta\left(s-ib\right)+\delta\left(s+ib\right)\right]. \tag{6.7}$$

A continuación, y para terminar este capítulo, presentamos algunas funciones que tienen relación con la delta de Dirac y con la función de Heaviside y que surgen en aplicaciones tanto en física como en ingeniería.

Definición 6.6 (Función pulso) La función *pulso* se denota con $\Pi(x)$ y se define de la manera siguiente:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \dfrac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } |x| < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Nota 6.7 *La función pulso se puede escribir en términos de la función selectora (ver definición* 5.2*):* $\Pi(x) = \chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$, χ *es la función selectora.*

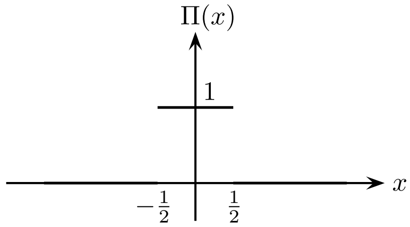


Figura 6.2: La función pulso $\Pi(x)$.

Nota 6.8 *La función pulso también se puede escribir en términos de la función de Heaviside:*

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Nota 6.9 *La función* $f(x) = h\Pi\left(\dfrac{x-c}{b}\right)$ *representa un pulso en* c *de altura* h *y ancho* b*.*

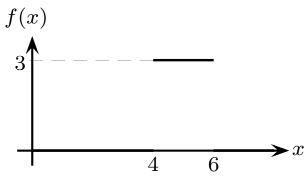


Figura 6.3: La función $f(x) = 3\Pi\left(\dfrac{x-5}{2}\right)$

Definición 6.7 (Función Si) La función *Si(x)* (por las siglas de su nombre en Inglés "Sine Integral") se define de la manera siguiente:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, \mathrm{d}u.$$

La gráfica de la función $\mathrm{Si}(x)$ se muestra en la figura 6.4.

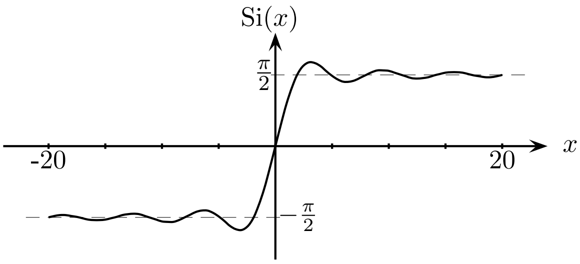


Figura 6.4: La función Si(x)

Definición 6.8 (Función sinc) La función sinc(x) (así llamada por una contracción de su nombre original en latín "sinus cardinalis") se define mediante

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x}.$$

Su gráfica se muestra en la figura 6.5.

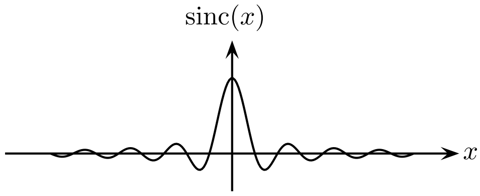


Figura 6.5: La función sinc(x)

Teorema 6.22 *Para la función sinc se cumple que*

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\operatorname{Si}(\pi x)}{\pi}\right); \tag{6.8}$$

$$H(x) * \operatorname{sinc}(x) = \int_{-\infty}^{x} \operatorname{sinc}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Si}(\pi x)}{\pi}; \tag{6.9}$$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sinc}(x)] = \Pi(\omega). \tag{6.10}$$

Teorema 6.23 *Para la función signo (ver definición* 5.4*) se cumple que*

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = -i\pi \operatorname{sgn}(\omega), \tag{6.11}$$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)] = \frac{2}{i\omega}. \tag{6.12}$$

Definición 6.9 (Función triangular)

$$\wedge(x)=\left\{\begin{array}{lll}0 & \text{si} & |x|>1,\\ 1-|x| & \text{si} & |x|<1.\end{array}\right. \tag{6.13}$$

Teorema 6.24 *(Convolución de pulsos)*

$$\wedge(x)=\Pi(x)*\Pi(x)\,. \tag{6.14}$$

Teorema 6.25 *(Derivada de la función triangular)*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wedge(x)=-\Pi\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sgn}(x). \tag{6.15}$$

Definición 6.10 (Pozo infinito)

$$\sqcup(x)=\frac{1}{2}\delta\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Definición 6.11 (Escalón infinito)

$$\mathrm{I}_1(x)=\frac{1}{2}\delta\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Definición 6.12 (Símbolo de muestreo)

$$\mathrm{III}(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-n)\,.$$

Teorema 6.26 *Para la función muestreo se cumple que*

$$\begin{gathered}III(x)*f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}f(x-n)\,,\\ III(ax)=\frac{1}{|a|}\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(x-\frac{n}{a}\right),\\ \mathcal{F}(III(x))=III(\omega)\,,\\ \lceil x\rceil'=III(x)\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lceil x\rceil H(x))=III(x)\,H(x)-\frac{1}{2}\delta(x)\,.\end{gathered}$$

Definición 6.13 (Función *floor*) Se llama *función floor* a la función del mayor entero menor o igual a x. Se denota $\lfloor x\rfloor$. Su gráfica aparece en la figura 6.6.

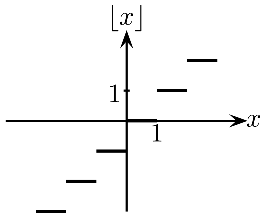


Figura 6.6: La función $\lfloor x \rfloor$

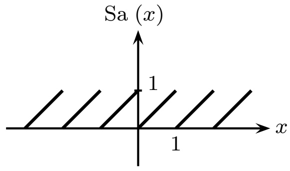


Figura 6.7: La función Sa(x)

Definición 6.14 (Función sierra)

$$\mathrm{Sa}\,(x) = \lceil x \rceil - x + \frac{1}{2},$$

donde $\lceil x \rceil$ es la función *ceiling.* La gráfica de la función Sa (x) se muestra en la figura 6.7.

Teorema 6.27 *Para la funcion sierra se cumple que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Sa}\,(x) = III\,(x) - 1;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Sa}\,(x)\,H\,(x)\right) = \left(III\,(x) - 1\right)H\,(x)\,.$$