

4. MARCO TEORICO

Este capítulo tiene la intención de presentarle al lector las consideraciones teóricas que sustentan a la matemática como disciplina científica imprescindible para la vida diaria y el desarrollo humano, su presencia en todos los niveles escolares es indicador de esa importancia y relevancia en el desarrollo académico y social de los individuos. La forma como se construye ese conocimiento comienza en un nivel particular, el de cada individuo, seguido de los conocimientos grupales y finalizando con los objetivos Institucionales que se pretenden desarrollar en el individuo. La última parte de este capítulo se refiere al modelo de enseñanza que se pretende implementar.

Este capítulo de consideraciones teóricas pretende sustentar la hipótesis de la utilización de los proyectos como una herramienta que mejora la enseñanza de la matemática, haciendo un breve recorrido que inicia en el por qué de la existencia de las matemáticas, pasando por una breve reseña de la construcción del conocimiento matemático y finalizando en la base que sustenta nuestro trabajo: El modelo que integra a la matemática con el entorno del estudiante tanto en la escuela como de la vida diaria.

Este trabajo se centrará en la matemática que sirve para modelar y resolver problemas de distintas disciplinas científicas que tienen su aplicación en campos de trabajo tan variados como: la industria, la salud, las finanzas, la alimentación, la agricultura, etc.

La forma de resolver el tipo de problemas planteados en este trabajo estarán sostenidos por tres pilares igualmente importantes: La construcción del conocimiento, la integración de los conocimientos matemáticos y la integración entre estos conocimientos matemáticos y las otras disciplinas.

Nuestras consideraciones didácticas también involucran tres ejes:

1. *El de tipo cultural.* Nos permitirá elaborar las actividades cuyos ejemplos y ejercicios tomen en cuenta la problemática que se estudia en la carrera donde se está impartiendo el curso de matemáticas, es decir vinculando los temas matemáticos con las materias específicas de su formación, tomando los problemas reales que se plantean dentro de esta ciencia para trabajar con ellos en los Proyectos.
2. *El de tipo formativo.* Tomaremos en cuenta la forma de cómo los estudiantes aprenden, basados en la teoría constructivista del conocimiento y la “Teoría antropológica” de Chevallard. Esto es importante ya que se desea que las actividades no sólo informen a los estudiantes sino los formen en el aprendizaje de las matemáticas.
3. *El de tipo instrumental.* Nos apoyaremos en las tecnologías de la información, la búsqueda en Internet, la calculadora científica y el software “Microsoft Office”.

4.1. FUNDAMENTOS PSICO – COGNITIVOS DEL APRENDIZAJE

El aprendizaje de las matemáticas es un proceso no agradable para la mayoría de las personas debido a su naturaleza abstracta, a la gran cantidad de representaciones

simbólicas y gráficas, y a la variedad de formas en que pueden conectarse estas representaciones.

El estudio de la forma como las personas aprenden ha sido un tema de estudio desde los inicios mismos del conocimiento formal. Sin embargo el estudio en forma sistemática y fundamentada se le atribuye al psicólogo francés Jean Piaget quien estudió durante toda su vida, el proceso por el que atraviesa una persona para adquirir conocimiento. Desarrolló la teoría constructivista del conocimiento, la cual sostiene como principio fundamental que el conocimiento no se adquiere si no se “*construye*” a través del contacto con el objeto, con otros individuos y con la utilización de los sentidos. También sostiene como principio que el conocimiento es único, es decir cada persona construye su propio conocimiento.

Mario Carretero [5] comenta: El constructivismo es básicamente la idea de que el individuo –tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos- no es un simple producto del ambiente ni resultado de sus disposiciones internas, sino una *construcción propia*; que se produce día a día como resultado de la interacción entre esos factores.

Sostenemos entonces que cada individuo construye su propio conocimiento y éste incluye el conocimiento matemático que será impartido durante su estancia escolar. Pero, ¿por qué se enseña matemáticas en todos los niveles escolares? trataremos de dar una respuesta satisfactoria, aunque breve.

4.1.1. ¿Por qué se enseña matemáticas en la escuela?

La presencia de las matemáticas en la escuela se deriva de su presencia en la vida productiva de una sociedad; es decir, los avances tecnológicos, económicos, etc... crean matemáticas más especializadas o nuevas matemáticas que tienen impacto directo en campos de trabajo como la industria, la economía, la política, la sociología, por mencionar algunos. De esta manera, las Instituciones de Educación deben estar a la vanguardia de estas nuevas matemáticas para formar estudiantes exitosos y capaces de enfrentar el campo profesional al cuál van a incorporarse.

Citando a Chevallard [7]: “Las matemáticas en la escuela son una consecuencia de su presencia en la sociedad y, por lo tanto, las necesidades matemáticas que surgen en la escuela deberían estar subordinadas a las necesidades matemáticas de la vida en sociedad. Cuando se invierte esta subordinación, cuando creemos que las únicas necesidades sociales matemáticas son las que se derivan de la escuela, aparece entonces la *enfermedad didáctica*”.

Cuando un alumno no alcanza a percibir la necesidad real inmediata del estudio de las matemáticas, crea un obstáculo en su aprendizaje, ya que considera que es un requisito curricular más y que es suficiente con “pasar” aunque no se haya aprendido “nada” de ella. Cuando el estudiante no ve reflejado en los ejemplos y ejercicios que realiza la verdadera intención de estudiar las matemáticas, reduce su capacidad y gusto por

aprenderlas y sobre todo reduce de manera significativa su intención de profundizar más en su estudio y aprendizaje.

Citando de nuevo a Chevallard [7]: “El considerar que las matemáticas están hechas para ser enseñadas y aprendidas... y que la única razón por la que se aprenden matemáticas es porque se enseñan en la escuela, reduce el *valor social* de las matemáticas a un simple *valor escolar*, convirtiendo la enseñanza escolar de las matemáticas en un fin en sí mismo”.

Aunque gran parte de la actividad matemática puede identificarse como la modelización de problemas de otras ciencias, existen problemas matemáticos nacidos dentro de la matemática misma, donde su intención y finalidad de estudio puede ser ella misma, sin embargo en este trabajo de tesis tomaremos en cuenta sólo los que sirven para la modelización y solución de problemas no matemáticos.

4.1.2 Construcción del conocimiento

Este trabajo de Tesis se basa específicamente en la epistemología de Jean Piaget [28], básicamente en tres resultados sobre el conocimiento: 1) La existencia de múltiples formas de conocimiento, 2) El incremento en el conocimiento, desde un conocimiento menos provechoso o más pobre, hacia un saber más rico (en comprensión y en extensión) y 3) El conocimiento a través de la interacción entre el sujeto y el objeto.

Otro factor muy importante que influye en la construcción del conocimiento se encuentra en el lenguaje, el literato y psicólogo Ruso L. S. Vygotsky en sus estudios sobre los procesos psico-cognitivos fue capaz de ver cómo el lenguaje es una parte fundamental en el proceso cognitivo de las personas, aunque él estudió básicamente como aprenden los niños, sus resultados se pueden trasladar fácilmente a cualquier otra etapa y proceso de aprendizaje, incluyendo el de las matemáticas universitarias.

Citando a Vygotsky-Luria² [35]: “El niño comienza a percibir el mundo no sólo a través de sus ojos sino también a través de su lenguaje... como tal, el lenguaje se convierte en un parte esencial del desarrollo cognitivo del niño”.

En estudios realizados por Vygotsky se demostró que es el lenguaje el que le da un valor a la cognición de los niños, es decir, se cree que los niños no “saben” algo, porque no lo pueden “describir verbalmente”. Un estudio donde se les mostró un dibujo a un grupo de niños y se les pidió que lo describieran, produjo un resultado erróneo al creer que no comprendían el dibujo, sin embargo el mismo experimento realizado por Vygotsky produjo resultados opuestos al pedirles a los niños que describieran todo lo que percibían en el dibujo pero usando “pantomima”, de esta manera los niños demostraron que comprendían el dibujo perfectamente.

² Alexander Romanovich Luria, recopiló los resultados más sobresalientes de Vygotski y estos fueron editados y publicados por un conjunto de psicólogos estadounidenses: Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner y Ellen Souberman.

En la solución de los problemas que se les presentan a los Universitarios, ellos pueden llegar al resultado final sin emitir ningún sonido. Lo que es muy importante considerar en un problema es el lenguaje matemático involucrado en el planteamiento, desarrollo y solución del mismo, por lo que además del lenguaje verbal, las graficas, dibujos, escritura y simbología matemática tendrán un lugar importante en este trabajo de investigación.

Al tratar de organizar los pensamientos para comunicarlos, ya sea en forma escrita, oral, con dibujos o utilizando imágenes, es cuando se puede llegar a percibir de alguna manera el grado de conocimiento del estudiante, además esto le permite una auto evaluación.

Citando a Vygotsky-Luria [35]:“El lenguaje surge en un principio como un medio de comunicación entre los niños y las personas que los rodean, sólo más tarde se convierte en un lenguaje interno que contribuye a organizar el pensamiento del niño”.

De esta manera las actividades estarán desarrolladas tomando en cuenta la construcción del conocimiento desde el punto de vista Piagetano (aprender haciendo) y el lenguaje (matemático) como medio de organización y expresión del conocimiento (verbal, gráfico, escrito, etc.) ayudado de la tecnología para llevarlo a cabo.

Además de considerar cómo se desarrolla el conocimiento dentro del estudiante, es importante que consideremos también que este conocimiento se lleva a cabo dentro de un salón de clases, dentro de ciertos requerimientos Institucionales y guiado por un currículo específico, por lo que describiremos este “ambiente de transmisión de los conocimientos” como el conocimiento institucional.

4.1.3 El Conocimiento Institucional

Yves Chevallard estudia los procesos de transmisión y adquisición de los conceptos matemáticos dentro del medio escolar. A Chevallard le interesó el estudio de las relaciones: 1) entre los individuos, 2) entre los individuos y el objeto de estudio y 3) entre los individuos y el profesor. Chevallard lo llama “sistema didáctico”.

Citando a Chevallard [7]: “Se forma un sistema didáctico cada vez que algunas personas se enfrentan a una cuestión cuya respuesta no es evidente y deciden hacer algo para resolverla... de manera que un sistema didáctico escolar se forma con un grupo de estudiantes que busca en una obra matemática las respuestas a ciertas cuestiones (la obra matemática es la que da respuesta a dichas cuestiones) con ayuda (o la guía) de un profesor”.

Dentro de este sistema, un rasgo característico es que la enseñanza debe organizarse mayormente de manera comunitaria. La perspectiva basada en la línea constructivista de que la individualización de la enseñanza es lo más conveniente para mejorar la calidad de la enseñanza, y también en la hipótesis de que cada persona aprende de manera diferente, consistiría en *adaptar los métodos de enseñanza* a las características individuales de cada estudiante.

Chevallard [7] dice: “Aunque se pueda considerar el aprendizaje como un logro individual, se olvida que es el resultado de un proceso colectivo: el proceso de estudio que se desarrolla en el seno de una comunidad... el proceso de estudio sólo puede llevarse a cabo si el aprendizaje es algo bien compartido dentro del grupo: para que el individuo aprenda, es necesario que el grupo aprenda...desde este punto de vista el aprendizaje es un hecho colectivo”.

Es importante tomar en cuenta las diferencias individuales de los alumnos: su capacidad, motivación, interés, actitud, formación previa, etc., pero la organización de la enseñanza debe basarse más en las características compartidas por los estudiantes que en las diferencias de cada individuo para que el estudio sea realmente colectivo.

Al respecto Chevallard [7] comenta: “La organización de la enseñanza debe basarse más en lo que los estudiantes tienen en común que en lo que es particular a cada uno de ellos. Desde el punto de vista antropológico, el estudio y, con él, el aprendizaje son actividades que unen a los individuos”.

Otra característica importante a considerar es el *carácter abierto* de la relación didáctica, esto quiere decir que las actividades estarán diseñadas para el autoaprendizaje, donde los estudiantes podrán explorar diversas formas de llegar a la solución, se promoverá el trabajo en equipo y la participación del profesor será solamente como guía de las actividades y no como poseedor absoluto del conocimiento.

Citando a Chevallard [7]: “La enseñanza, como medio del proceso didáctico, no debe pretender controlar de una manera absoluta el desarrollo de dicho proceso. La relación didáctica es una relación “abierta”. En la medida en que la enseñanza de las matemáticas se organiza para intentar “cerrar” esta relación, provoca un empobrecimiento del aprendizaje matemático de los alumnos”.

Entre las actividades que hacen que la relación sea cerrada y que debemos evitar, podemos describir: 1) La poca consideración del profesor a las actividades matemáticas desarrolladas por el alumno, 2) la fuerte dependencia de los alumnos hacia el profesor, 3) las actividades específicas e individuales que no permitan el trabajo en equipo, y 4) la falta de motivación para que los estudiantes exploren nuevas rutas de solución de los problemas.

Por último, consideraremos los “momentos” por los que debe atravesar el estudiante para lograr un aprendizaje significativo, según la teoría antropológica de Chevallard. Los momentos que presentamos están basados en nuestra interpretación de los momentos que describe Chevallard en su teoría. El orden en el que aparecen no necesariamente es un orden estricto.

1. El momento del primer encuentro: Es cuando el estudiante se enfrenta por primera vez con un problema que no sabe exactamente como abordar para resolverlo.

2. El momento exploratorio: Es cuando el estudiante escoge herramientas matemáticas (llamadas técnicas) y las prueba para tratar de resolver el problema.
3. El momento del trabajo de la técnica: Se lleva a cabo cuando la técnica que encontró es adecuada y se utiliza para resolver el problema, es importante que el estudiante la pruebe con otros problemas parecidos, hasta que la técnica sea dominada por el estudiante.
4. El momento tecnológico-teórico: Es cuando se define formalmente la técnica utilizada y se le otorga su justificación dentro de la matemática. En este punto se espera que los estudiantes, ayudados por el profesor, formalicen toda la herramienta matemática utilizada (teoremas, axiomas, propiedades, etc.) en la solución del problema que se les planteó.
5. El momento de la institucionalización y la evaluación: Se refiere a la evaluación de los objetivos logrados por el estudiante, relacionados o en comparación con los objetivos institucionales que se desea que los estudiantes logren.

El orden habitual al que estamos acostumbrados actualmente en la enseñanza universitaria es: comenzar con el cuarto y quinto momento, es decir definiendo formalmente la técnica y dándole su valor en los objetivos institucionales, seguido del tercer momento, cuando el profesor da un conjunto de ejercicios parecidos a los que él realizó para que los estudiantes los repitan. Si queda tiempo (o si el profesor lo considera importante), se lleva a cabo el primer momento cuando el profesor les enseña o muestra los problemas a los que da respuesta la técnica. Esta secuencia tiene sus claras desventajas: primero, el estudiante no le encuentra su “razón de ser estudiada” a esa herramienta matemática (técnica) al inicio del tema, creando un razonamiento oscuro en su utilización; otra desventaja muy importante es que no se aborda el momento exploratorio (segundo momento), que les permite, basados en sus conocimientos previos analizar hasta donde éstos les ayudan a resolver el problema y provocarles una necesidad de incrementar sus conocimientos matemáticos para resolver completamente el problema, ligando los conocimientos previos que tienen con los nuevos conocimientos que está por adquirir.

La falta de percepción en las Instituciones sobre la necesidad de que los estudiantes pasen por todos los momentos descritos anteriormente provoca una desconcentración y fraccionamiento del proceso de enseñanza que finaliza en la atomización de los conocimientos adquiridos y su desvinculación.

Citando a Chevallard [7]: “Uno de los hechos más llamativos en las instituciones escolares actuales reside en la gran cantidad de alumnos que nunca llegan a *entrar* en el contrato didáctico³...esto se debe a la falta de dispositivos cuyos contratos didácticos específicos articulen de manera adecuada el tránsito entre los diferentes *momentos* del proceso de estudio”.

³ El Contrato Didáctico lo define Chevallard como las reglas establecidas entre el profesor y los estudiantes que guiarán la clase y la evaluación.

Mas adelante Chevallard [7] menciona: ... “al intentar proteger al alumno de toda desconcentración y evitarle el encuentro con los *momentos*, se fracciona el proceso de enseñanza hasta hacerlo desaparecer como proceso... la enseñanza se convierte en un conjunto atomizado de actividades matemáticas aisladas, encadenadas arbitrariamente e independientes entre sí que no permiten al alumno llegar a dominar ninguna técnica y lo convierten, de hecho, en un incompetente”.

La interdisciplinariedad es actualmente una forma de evitar la atomización del conocimiento, la cuál es utilizada en varias instituciones de educación mediante el uso de proyectos, problemas, casos, etc. A pesar de que ha demostrado ser muy útil tiene la desventaja de que es muy difícil elaborar los temarios curriculares y las actividades que los estudiantes tienen que llevar a cabo, ya que como no está estructurada de forma tradicional, se requiere de muchas horas de trabajo, además se necesita un equipo de trabajo interdisciplinario muy competente o profesores con conocimientos múltiples, para elaborar buenos currículos que realmente cumplan con los objetivos interdisciplinarios planteados.

Tratando de solventar estas desventajas creemos que el aprendizaje basado en proyectos (ApP) le permite al profesor que imparte la materia elaborar actividades que cumplan los requerimientos de la interdisciplinariedad, permitiendo a los estudiantes pasar por los *momentos* de estudio y que cumplan con el carácter de abiertas.

Piaget (citado por Flores Fahira [15]) dice: “Se trata de lo que los docentes penetrados por un espíritu epistemológico lo bastante amplio, para que sin olvidar por ello el campo de su especialidad, logren que el estudiante vea de manera permanente las relaciones con el conjunto del sistema de las ciencias”.

Se pretende entonces que las actividades que realicen en la clase de matemáticas utilizando proyectos estén en forma permanente relacionadas con las ciencias de manera interdisciplinaria, por lo que creemos que el modelo integrador permitirá y dará sustento teórico a los proyectos seleccionados para cada área.

4.2 MODELO INTEGRADOR

El modelo integrador no se le atribuye a ninguna persona hasta el momento, parece que se ha venido desarrollando a partir de la interdisciplinariedad, y se ha ido transformando con cada aportación de diferentes autores. En casi todos los artículos⁴ relacionados con la matemática integrada la palabra “*integración*” no está claramente definida, sin embargo, se habla de la integración entre la matemática y la ciencia como una relación complementaria entre herramienta – objeto; es decir, la matemática se ve como herramienta en una clase de ciencia, o la ciencia como situación problema o ejemplos en una clase de matemáticas, sin embargo algunos autores van más allá tratando de fusionar ambas.

⁴ Ver referencias bibliográficas: 2, 3, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 29, 30, 33 y 34.

Berlin, Donna F. y White, Arthur [3] escriben: “Una gran cantidad de términos referentes a “integración” pueden encontrarse en la literatura, los que incluyen: conexiones, cooperación, coordinación, correlación, atravesando las disciplinas, fusión, interacciones, interdependencia, interdisciplinario, interrelacionado, ligado, multidisciplinario, transdisciplinario y unificado. A través de toda la literatura existe un sentido general de que la integración es una “cosa buena”, sin embargo muy pocas investigaciones han reportado explícitamente o descrito claramente que significa la integración entre la ciencia y la matemática, y menos aun han explorado sus beneficios o fracasos. Aunque muchos estarán de acuerdo con la proposición “*integra como enseñas* antes de preocuparte por integrar *lo que enseñas* (Steen 1994), otros invocan la fusión de “los métodos matemáticos dentro de la ciencia y los métodos científicos dentro de las matemáticas” tal que se vuelva algo indistinguible y no se sepa si es matemática o es ciencia lo que se enseña”.

Lederman y Niess [22] ilustraron la integración de la matemática y la ciencia en un artículo llamado “5 manzanas + 4 naranjas =?”, donde enfatizan fuertemente que “las tentativas de elaborar y/o clarificar el significado de un “*currículo integrado*” deberán abandonar tentativas de disolver las disciplinas para crear un híbrido incongruente”, ellos argumentan esto resaltando las diferencias fundamentales entre las dos disciplinas: mientras *la ciencia* busca consistencia con el mundo externo/natural a través de evidencia empírica, *la matemática* busca consistencia dentro de su sistema interno a través de su deducción lógica. Esta diferencia metodológica clama por un entendimiento claro y una discusión explícita de la naturaleza de la ciencia y la matemática.

Morris, Robert [24] cita a Jacqueline Anglin’s (1993): “Dentro del currículo integrado se requiere más que combinar dos temas, o turnar a los profesores... La noción de integración es más que conectar piezas para que los estudiantes vean un diseño más grande, de hecho, en los modelos de currículum integrado el conocimiento se refiere a relacionar y conectar *temas* de manera que sea significativo y relevante a otras áreas de aprendizaje tal como es en la vida real”.

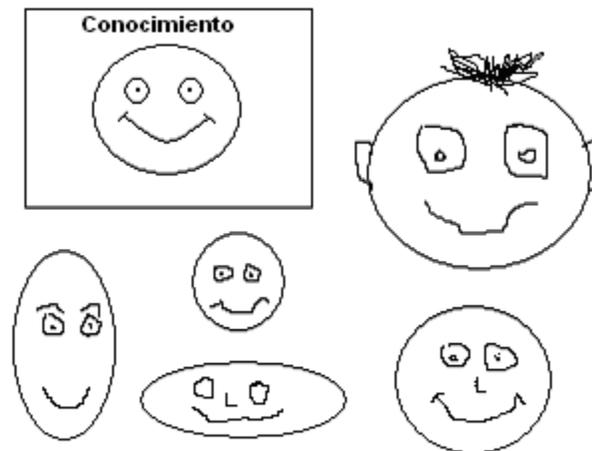
Con estas premisas, daremos nuestra visión de lo que es *un modelo integrador* como sustento teórico para este trabajo de investigación, además del uso de proyectos y los aspectos involucrados para su instrucción.

4.2.1 El modelo

Partimos del modelo “Integrando ciencia y matemática de Berlin–White [3] (BWISM)” el cuál involucra seis aspectos: (1) el conocimiento, (2) las formas de conocimiento, (3) las habilidades de proceso y pensamiento, (4) el conocimiento conceptual, (5) las actitudes y percepciones y (6) la enseñanza.

1. Conocimiento. Se parte del punto de vista constructivista del aprendizaje (Piaget) y de la necesidad de construir un conocimiento significativo (Vygotsky). Por lo que del conocimiento se considera que:
 - ♦ El conocimiento se construye sobre el conocimiento previo.

- ◆ El conocimiento se organiza alrededor de ideas, conceptos o temas.
 - ◆ El conocimiento involucra la relación entre los conceptos y los procesos.
 - ◆ El conocimiento está en una situación o contexto específico.
 - ◆ El conocimiento avanza entrelazando múltiples conceptos.
2. Formas de conocimiento. Ya que el conocimiento es construido por el individuo (Piaget [28]), cada persona construye una imagen propia del objeto.



Las distintas formas de construir el conocimiento se basan en los conocimientos que cada individuo posee de su mundo real y con la imagen a la que se relaciona el conocimiento. En matemáticas, el conocimiento involucra frecuentemente la modelación de ciertos patrones y sus relaciones, que no pueden ser vinculadas con el mundo observable. En la modelación matemática se involucra la lógica y la simbología (lenguaje) para describir los patrones y las relaciones de una situación real; una vez que estos símbolos describen correctamente el fenómeno, pueden ser manipulados sin el referente real y sin la necesidad de una representación concreta.

En las formas de conocimiento hay que tomar en cuenta que las personas aprenden de manera diferente, que los aprendizajes previos son la base para el aprendizaje nuevo, y que hay un proceso de inducción - deducción presente en el pensamiento matemático.

3. Habilidades de proceso y pensamiento. Dentro de la integración se tiene una perspectiva de cómo evaluar las habilidades de proceso y pensamiento en matemáticas. Si bien, los términos pueden diferir, la mayoría de los currículos reconocen: la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación y las conexiones como el proceso central que emerge en el aprendizaje. Sin embargo una revisión detallada revela el gran “peso” que se le otorga al desarrollo de las habilidades procedimentales en las evaluaciones; no se evalúan las habilidades básicas dentro del proceso, como son: la observación, la inferencia, la medición, la comunicación, la clasificación y la predicción.

En las habilidades del proceso integrador se incluyen: el control de las variables, la definición de la operatividad, la formulación de hipótesis, la interpretación de datos, la experimentación y la formulación de modelos. Estas mismas habilidades se desarrollan para la resolución de problemas. Las actividades integradoras tienen el potencial para enganchar a los estudiantes en los retos que se les plantean, ya que ven como auténticos y relevantes los problemas que se abordan. Además promueve habilidades de pensamiento del alto grado, ya que ellos mismos buscan la solución, planteando, evaluando, reformulando, examinando, etcétera, hasta llegar a la solución (momentos de Chevallard).

4. Conocimiento conceptual. Los tópicos que se plantean para desarrollar habilidades integradoras, incluyen el estudio de la medición, los patrones y sus relaciones, el uso de la probabilidad y estadística, el uso de relaciones espaciales (geometría), de variables y funciones (cálculo), etcétera. Esto requiere que se integren los conocimientos actuales con los anteriores y posteriores para favorecer la integración de las diferentes áreas de la matemática.
5. Actitudes y percepciones. La integración de la matemática basada en experiencias reales y problemas sociales motiva grandemente a los estudiantes, los ayuda a desarrollar sus habilidades y les permite cambiar las percepciones en cuanto a la dificultad de la matemática.

La forma integradora de enseñanza modifica las actitudes dentro del salón de clases:

- ◆ Deseo de conocimiento: percibir a la matemática como el camino para conocer y entender.
 - ◆ Aceptar ambigüedades: reconocer que los datos rara vez son claros y que se pueden tener planteamientos distintos del mismo problema.
 - ◆ Tener voluntad para modificar explicaciones: ver nuevas posibilidades en los datos y en las soluciones de los alumnos.
 - ◆ Cooperatividad en la resolución y respuesta de los problemas: trabar juntos en la creación de ideas, explicaciones y soluciones.
 - ◆ Respetar el razonamiento: Evaluar los patrones de pensamiento y guiar a los estudiantes hacia la resolución del problema.
6. Enseñanza. Los métodos y estrategias de enseñanza incluyen cuatro dimensiones: la estructura y organización del medio ambiente de aprendizaje, las estrategias instruccionales, el asesoramiento, y el intercambio en los roles de enseñanza. El medio ambiente debe incluir un buen problema (Proyecto), tiempo para establecer las preguntas que guíen el aprendizaje, se debe estimular y guiar las discusiones, promover el uso de laboratorio u otras herramientas o instrumentos, también hay que estimular el uso apropiado de la tecnología, alentar procedimientos alternativos y maximizar las oportunidades para una experiencia exitosa.

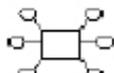
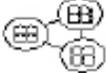
Las estrategias de enseñanza deben basarse en la investigación cognitiva de cómo los estudiantes aprenden en general y como se aprenden las matemáticas en particular.

Además de lo anterior, creemos que, para que un conocimiento sea relevante en una persona éste debe:

- Ser situado: Un conocimiento situado en nuestro trabajo coincide con las definiciones de la *teoría sociológica*, el cuál debe considerar el medio en el que está presente, como lo es: la institución, la carrera y el semestre.
- Ser significativo: El conocimiento según la teoría de Brousseau, se va transformando hasta llegar al individuo, de manera que sólo será significativo para el individuo si lo puede relacionar con algo para él familiar.
- Que esté integrado: Esto se refiere a que el conocimiento matemático debe estar integrado al currículo de la carrera de manera pertinente a las demás materias que se imparten, al perfil del egresado, al semestre en que se imparte, etc.

Las tres partes son esenciales y necesarias, y estarán presentes en nuestro modelo y en la selección de los Proyectos a desarrollar, para permitir en el estudiante una comprensión real e integrada del conocimiento matemático.

Los intentos por crear currículos integrados no es una idea nueva, de hecho ya se han llevado a cabo diversas formas de integración, Fogarty [16] agrupa en un cuadro los modelos integradores, describiéndolos y mostrando sus ventajas y desventajas. Además incluye en el primer renglón el modelo “fragmentado”, como muestra de lo que tratan de evitar los modelos integradores.

NOMBRE	DESCRIPCION	VENTAJAS	DESVENTAJAS
Fragmentado 	Separado y distinto disciplinarmente	Claridad y un punto de vista discreto de la disciplina	Las conexiones no se hacen claras para los estudiantes
Conectado 	Temas dentro de una disciplina están conectados	Los conceptos clave están conectados, asimilando las ideas en la disciplina	Las disciplinas no están relacionadas, las ideas permanecen aisladas
Anidado 	De pensamiento social y habilidades anidadas en un tema	Da la atención a algunas áreas, enriqueciendo el aprendizaje	Los estudiantes pueden perder de vista el objeto principal de estudio
Secuenciado 	Pensamientos e ideas similares, materias separadas	Facilita la transferencia de contenidos entre las disciplinas	Requiere que se conozca la secuencia curricular
Compartido 	Equipos planean y/o enseñan temas compartidos	Se comparten experiencias de dos disciplinas	Se requiere tiempo y trabajo en equipo
Tejido 	Enseñanza temática, usando un tema como base para múltiples disciplinas	Motiva a los estudiantes y les ayuda a ver las conexiones entre las ideas	Se requiere de mucha preparación para la selección del tema
Hilado 	Pensamiento y habilidades están hiladas a través de las disciplinas	Facilita en los estudiantes la transferencia de conocimientos	Las disciplinas permanecen separadas
Integrado 	Los temas de múltiples disciplinas enseñados para un objetivo común	Un aprendizaje integrado desarrollando habilidades y capacidades múltiples	Requiere el dominio de los temas que se enseñan y sus relaciones
Inmerso 	Aprendizaje integrado, con énfasis en un área específica	La integración se lleva a cabo dentro del aprendizaje	Permanece borroso el objetivo de la enseñanza
En red 	El aprendizaje guía el proceso de integración	Proactivo, el estudiante es estimulado con nuevos conceptos	El estudiante está forzado a pensar y puede ser infructuoso

El modelo integrador que utilizaremos para desarrollar en este trabajo es el **Tejido**, ya que dentro de los modelos integradores es el que mejor se adecua a nuestras posibilidades tanto curriculares como de personal docente involucrado en la enseñanza.

4.3 APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

Una herramienta muy utilizada por el “Modelo Integrador” en la enseñanza y que permite la integración de distintos conocimientos son “Los Proyectos”, en los cuales, los estudiantes resuelven uno o varios problemas surgidos del proyecto. El Proyecto surge para analizar una situación real en una disciplina (distinta de la matemática); el análisis requiere, entre otras cosas que el estudiante se familiarice con todos los aspectos y variables que están involucradas en el proyecto, que utilice herramienta matemática para

describir, analizar y solucionar el problema que surgió, además de involucrarse en la utilización de la tecnología para resolver y presentar el proyecto de manera formal.

David Moursund [25] comenta: “El Aprendizaje por Proyectos (ApP, siglas en español) es una metodología, una herramienta de instrucción que ayuda al maestro a lograr sus objetivos como educador. Aunque existen muchas otras metodologías que pueden ayudarlo en su trabajo, el ApP es una herramienta de enseñanza efectiva que para llevarse a la práctica requiere ciertos cambios en el manejo de la clase. Algunas de las características que se evidencian cuando se está trabajando con ApP es que como esta metodología se centra en el aprendizaje, los estudiantes tienen un peso significativo en la selección de los temas de los proyectos que van a realizar (casi siempre concuerda con sus intereses y habilidades). En términos más simples, el ApP ayuda a los estudiantes a: (1) adquirir conocimientos y habilidades básicas, (2) aprender a resolver problemas complicados y (3) llevar a cabo tareas difíciles utilizando estos conocimientos y habilidades. El ApP se orienta hacia la realización de un proyecto o tarea, el trabajo se enfoca en la solución de un problema complejo o en la realización de una actividad que también lo es; el trabajo se lleva a cabo en grupos; los estudiantes tienen mayor autonomía que en una clase tradicional para moverse y hacer uso de diversos recursos (preferiblemente dentro del aula); y los grupos que se conforman trabajan en proyectos diferentes.

El uso de proyectos para la enseñanza de las ciencias no es algo innovador, realmente se ha venido utilizando a lo largo de los años pero nuevamente se le está acogiendo como un buen recurso didáctico debido a sus excelentes resultados.

Bernard Spodek y Olivia N. Saracho [4] mencionan: “El uso de proyectos para facilitar la educación de los niños pequeños ha constituido una tradición en progreso a lo largo de más de 80 años. En 1952, de hecho, los maestros de escuelas judías progresistas como “Beth Hayeled” utilizaban proyectos para enseñar todo tipo de contenidos. Más tarde, a finales de los años 60’ y comienzos de los 70’, cuando en los Estados Unidos comenzó a despertar el interés en los usos del llamado “Integrated Day” o de la “Open Education” de la mano de las British Infant Schools, uno de los elementos clave de tales abordajes era el uso de proyectos para integrar el aprendizaje de los niños a través de las distintas áreas de conocimiento. En relación a lo anterior, entonces, no es de extrañar que cuando los abordajes por proyectos se hicieron presentes nuevamente, pudiera reconocerse en esa “innovación” una larga presencia anterior”.

El uso de proyectos en el aprendizaje de las ciencias y la integración de conocimientos se ha venido dando también a nivel profesional, encontrando los llamados PBL (Projects by learning, siglas en inglés) en el aprendizaje de la medicina, la arquitectura, las artes y algunas ingenierías, principalmente.

El uso de proyectos para la enseñanza de las matemáticas permite al estudiante aprender en la acción; es decir, el estudiante ve la necesidad de saber como se manipulan de manera adecuada las diferentes herramientas matemáticas, como son: la graficación, la tabulación y la expresión algebraica para poder resolver el problema que se le presenta. El estudiante por sí sólo encuentra en la matemática la herramienta capaz de ayudarlo a

entender el problema, plantearlo adecuadamente, entender sus relaciones, probar posibles soluciones y a expresar sus resultados. De esta manera adquiere la habilidad para identificar dentro de la matemática las herramientas, las técnicas y la estrategia pertinente para resolver de manera satisfactoria la situación problema que se les presenta dentro del proyecto.

Con el uso de proyectos no es necesario estar convenciendo al estudiante de la utilidad que le dará en el futuro el aprendizaje de la matemática que hoy se les está enseñando, tampoco es necesario hacer hincapié como cada tema se encadena con el anterior para dar forma a una matemática completa, esto lo aprende el estudiante de manera natural al enfrentarse a problemas más complejos. El propio estudiante ve la necesidad de que al enfrentarse a problemas más difíciles, sus conocimientos matemáticos deben ser mayores y por ende la complejidad de la herramienta matemática utilizada deberá ser mayor, sin que por ello represente una tortura su aprendizaje, por el contrario, el propio estudiante crea la necesidad de aprender bien matemáticas más complejas.

Vélez [34] plantea: “Cuando se habla de aprendizaje por proyectos, se habla de que estos deben buscar *actividades con propósito* que lleven a que la institución educativa no sólo prepare para la vida, si no también ser vida en sí misma. Por lo cual el proyecto debe fundamentarse tanto en los intereses de los alumnos como en los temas del currículo del curso en cuestión, desarrollándose en forma individual o colaborativa, siendo la última la ideal”.

Además menciona: “Al responder al reto que impone la necesidad de formar hombres íntegros con habilidades y valores que respondan al mundo de hoy, se encontró que el trabajo por proyectos y la metodología de proyectos colaborativos, permiten un sin número de experiencias que hacen del proceso de aprendizaje un proceso cuyo propósito es el de facilitar y potenciar el procesamiento de información que permite el crecimiento y desarrollo del alumno, en la construcción teórica, concepciones, interpretaciones y prácticas contextualizadas”.

Citando a Balmore Pacheco [2]: “El método de proyectos emerge de una visión de la educación en la cual los estudiantes toman una mayor responsabilidad de su propio aprendizaje (aprendizaje autónomo y procesos meta cognitivos), en donde construyen y aplican, en situaciones reales, las habilidades, destrezas, valores y conocimientos establecidos en el currículo”. Balmore [2] comenta que entre los beneficios que se logran están:

- 1) Poner al alumno frente a una situación problemática real.
- 2) Permite la construcción de aprendizajes integrados, no aislados y fragmentados, ya que parte de un problema real donde en su solución hace que concurren distintas disciplinas.
- 3) Da oportunidad para que los alumnos realicen investigaciones que les permiten aprender nuevos conceptos.

- 4) Favorece el desarrollo de competencias y valores para el trabajo colaborativo entre compañeros, maestros y otras personas, desarrollándose habilidades relacionales, comunicacionales y de gestión.
- 5) El mismo estudiante, con el apoyo del docente, planifica, ejecuta, controla, evalúa y toma decisiones sobre el aprendizaje.
- 6) Estimula diversos tipos de aprendizajes: saber conocer, saber hacer, saber convivir, y saber ser.
- 7) Es compatible con estilos de aprendizaje diversos, tales como: aprender por si mismos leyendo y revisando o aprender en grupo y discutiendo.

A este respecto Vélez [34] dice: “En los proyectos se ven integrados los diferentes temas del programa académico... el desarrollo de estos permite a cada estudiante trabajar a su ritmo y les capacita en la utilización de procesos, habilidades e ideas en la medida en que lo requiera... El aprendizaje colaborativo implica que los estudiantes se ayuden mutuamente a aprender, compartan ideas y recursos, y planifiquen cooperativamente qué y cómo estudiar. Los docentes no dan instrucciones específicas, de este modo hacen a los estudiantes participar de su propio proceso de aprender”.

La clave para lograr esto es la interdependencia, los miembros del equipo deben necesitarse los unos a los otros y confiar en el entendimiento y éxito de cada persona. Se debe asegurar que todos los integrantes sean responsables del conocimiento grupal, de manera que cualquier miembro sea capaz de responder a cualquier pregunta. Esto implica que algunos miembros asuman papeles de “docente” o de “investigador”, promoviendo en estos alumnos el desarrollo de habilidades descriptivas alternas para asegurarse de que los demás miembros del equipo están entendiendo su explicación.

Los proyectos deben relacionar la actividad que se está desarrollando con el conocimiento inherente al currículum y con su aplicabilidad, pero sin que deje de ser muy interesante para el alumno de manera que lo invite a investigar más del tema.

Gran parte del éxito en los proyectos recae en el docente, quien debe dejar el papel tradicional para convertirse en un motor impulsor de este aprendizaje, estimulando la investigación a través preguntas, replanteamientos, observaciones y una guía adecuada.

Al respecto Vélez [34] comenta: “El educador debe romper con su estructura rígida y proporcionar la flexibilidad, la innovación y la creatividad... debe ser un motor del proceso... un guía, un facilitador y un recurso”.

Si bien el aprendizaje basado en proyectos permite libertad a los alumnos, el docente es quien establece los límites, mantiene las expectativas y orienta en lo que es fundamental conocer, discutir y modelar, dice Vélez [34].

El aprendizaje por proyectos desarrolla en el estudiante la habilidad para discriminar entre las diferentes técnicas y herramientas matemáticas la mas adecuada para resolver el problema. Además lo involucra en el uso de la tecnología computacional para plantear, probar diferentes soluciones, resolver y presentar los resultados obtenidos.

Vélez [34] comenta: “El mundo moderno nos invita a replantear muchas de las acciones que hemos llevado a cabo durante años, una de ellas es el actuar docente ante la necesidad de formar hombres con capacidades de solución de problemas, habilidades comunicativas y habilidades de sistematización de información en esta *jungla informativa* a la que día a día se tiene acceso gracias a las tecnologías de la información y comunicaciones”.

4.3.1. Nuestra visión del modelo

El uso de proyectos es una herramienta adecuada para trabajar casi cualquiera de los modelos descritos anteriormente (pág.26), sobre todo aquellos que permiten la comunión de varios temas o disciplinas como lo son: el compartido, el tejido, el integrado y en red.

En este trabajo de tesis, el método que nos pareció más adecuado para desarrollar dentro del salón de clases, es el **Tejido**, donde se usa en tema como base para múltiples disciplinas. El tema a desarrollar dentro de un proyecto, será seleccionado de aquellos temas que los estudiantes analizan y estudian en otras asignaturas propias de su área, ya sea durante el mismo semestre o en semestres posteriores. Por lo que se deberá hacer un análisis previo de los temas que son más relevantes para los alumnos en el área donde se llevara a cabo la investigación.

La manera en que se llevará a cabo el trabajo dentro del grupo puede ser, el desarrollo de un proyecto para todo el grupo o varios proyectos distribuidos en equipos. Nosotros seguiremos la siguiente estrategia:

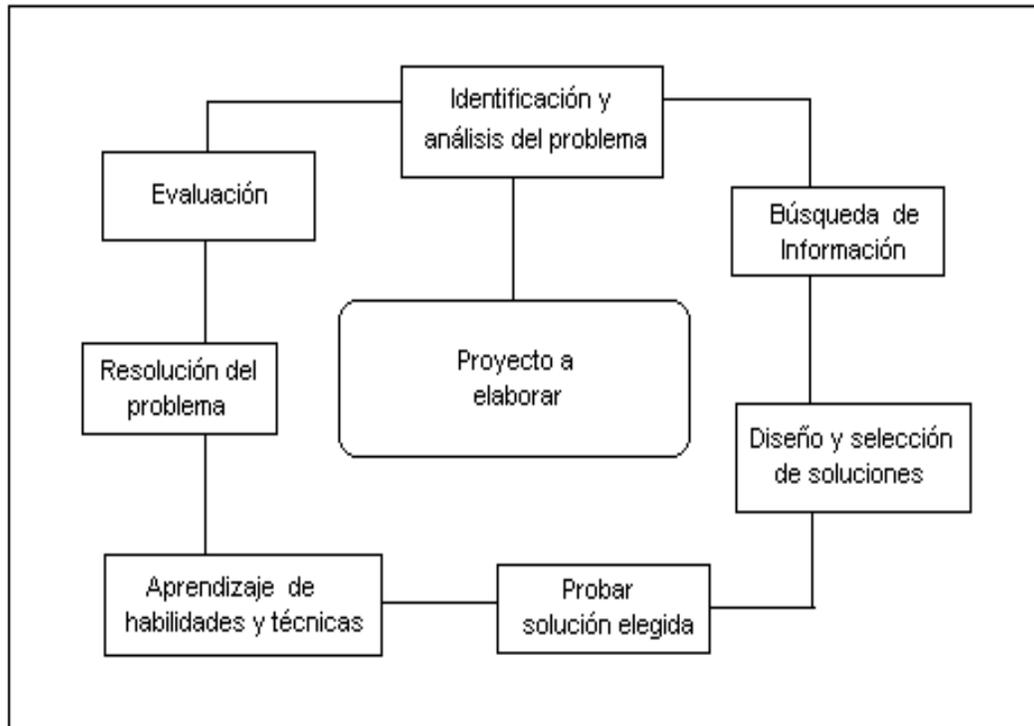
1. Los estudiantes se agrupan en equipos (de 5 integrantes máximo).
2. Cada equipo elegirá un tema de un proyecto (de interés consensuado entre los integrantes) o se elegirá una parte tema de un sólo proyecto grupal.
3. Dentro del tema seleccionado se determinará él o los problemas específicos que se van a analizar y resolver.
4. Cada equipo es responsable de su investigación, desarrollo, solución, teoría matemática utilizada y presentación de resultados.
5. Los equipos presentarán sus resultados al resto del grupo, utilizando alguna tecnología de comunicación, y deberán dominar, debatir y defender la herramienta matemática (graficas, tablas y expresiones algébricas) que utilizaron para resolver su tema.

El trabajo debe realizarse en equipo por lo que el número mínimo de integrantes es de dos; creemos pertinente que no sean más de cinco, para no saturar las actividades y permitir una comunicación más fluida entre sus miembros.

Es importante tomar en cuenta que el tema que desarrollarán dentro del proyecto debe ser de interés para los estudiantes, debe desarrollar habilidades matemáticas como la lógica, debe permitir que se utilicen conceptos y herramientas de otras disciplinas y debe

motivar a los estudiantes en el estudio y uso de matemáticas más especializadas y complejas, así como el uso de la tecnología y la información.

Se orientará a los estudiantes para que resuelvan el proyecto siguiendo el siguiente esquema:



- **Primero** deberán identificar dentro del tema que van a desarrollar, el o los problema(s) a los cuales desean darle respuesta. En esta primera etapa se espera que el docente guíe con preguntas adecuadas a los estudiantes, de manera que el proyecto a elaborar cumpla con las expectativas descritas anteriormente.
- **Segundo**, deberán hacer una búsqueda de la información que se requiera para entender perfectamente el problema que van a desarrollar, implicando el uso de Internet, la consulta de expertos, etc. Es importante que en esta etapa el docente supervise adecuadamente la información que se está obteniendo para que los estudiantes no pierdan de vista el objetivo y la meta que se persigue en el proyecto.
- **Tercero, cuarto y quinto (ciclo)**, se espera que los estudiantes prueben distintas herramientas y técnicas matemáticas, tanto gráficas, como tabulares, analíticas y verbales para analizar el problema, y tratar de solucionarlo. También se espera que los estudiantes se den cuenta de sus potencialidades o limitaciones matemáticas al probar una solución (herramienta y/o técnica) elegida para el problema, y que las limitaciones los motiven a buscar mayores conocimientos (habilidades y técnicas) tanto de la matemática como de otras disciplinas. Esta etapa es un ciclo que se repite varias veces y es donde se

llevan a cabo las discusiones dentro del equipo más enriquecedoras para el conocimiento, se espera que durante este ciclo se logre la “la reificación⁵” del conocimiento matemático que define Anna Sfard [31], es decir que el estudiante logre conectar todos los conocimientos matemáticos y les encuentre significado en la solución de los problemas. En esta parte es muy importante que el docente analice el avance de cada proyecto y guíe con preguntas adecuadas soluciones alternativas a las que se ven muy obvias para motivar a los estudiantes en la construcción de conocimiento nuevo, en la solidificación y versatilidad del conocimiento ya adquirido y en el descubrimiento de conocimiento que ya se tiene y no se sabía para que servía.

- **Cuarto**, aquí es donde los estudiantes logran solucionar a su completa satisfacción el problema planteado y son capaces de transmitirlo tanto al interior del equipo como al resto del grupo con total seguridad, recordemos que es muy importante que cualquier miembro del equipo debe ser capaz de responder de manera satisfactoria a las preguntas que los demás miembros del grupo o el docente les planteen. Es igualmente importante que los estudiantes dominen las herramientas matemáticas y tecnológicas que están utilizando en la solución de los problemas planteados en el proyecto. El docente debe preparar preguntas adecuadas que motiven al resto del grupo a participar en una discusión grupal, pues es con esta discusión cómo el resto del grupo se enterará de lo que cada equipo resolvió, qué utilizó, los problemas a los que se enfrentó, etcétera; no importa si cada equipo resolvió un problema diferente o el mismo. Si éste es el caso, cada equipo tendrá una visión diferente de cómo abordar el problema, y de las diferentes herramientas y/o técnicas matemáticas que se pueden utilizar, enriqueciendo el aprendizaje.
- **Quinto**, Consideramos que la evaluación es un punto muy importante, por lo que lo discutiremos en detalle a continuación.

La Evaluación

Como los proyectos son una didáctica diferente de enseñanza y aprendizaje se espera que la evaluación sea igualmente diferente al examen tradicional de memorización y realización mecánica de procedimientos sin un razonamiento más allá del procedimiento.

Citando a Vélez [34]: “La evaluación bajo esta modalidad de enseñanza, es un proceso permanente y tiene como componentes esenciales una evaluación diaria y guías que permitan la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación... En cuanto a las pruebas formales... si se desean aplicar individualmente deben apuntalar a la aplicación de conceptos y no a la memorización de los mismos”.

De la teoría antropológica de Chevallard [7] podemos mencionar lo siguiente: “Un poco de reflexión muestra que, aún en la fabricación de “su solución”, cada alumno habrá puesto en marcha el mismo esquema de cuatro tiempos: 1) Observando, en clase o en los libros, algunas “maneras de hacer”, 2) Analizándolas y Evaluándolas, con el fin de

⁵ Anna Sfard define la reificación como el punto culminante del proceso cognitivo que se lleva a cabo dentro del estudiante, al cual se llega sólo cuando todas las partes han encajado adecuadamente para formar el todo.

“desarrollar” su propia solución... En este esquema de acción, *la etapa de la evaluación constituye un gesto fundamental*, que requiere algunas observaciones muy generales. Señalemos en primer lugar que la evaluación de la que estamos hablando aquí *no debe ser considerada como la evaluación escolar*, tal como la asume el profesor al analizar la producción de los alumnos. Lo verdadero es de hecho lo contrario”.

Chevallard [7] menciona algunos criterios que el docente debe tener en cuenta a la hora de evaluar y que consideramos muy importantes: ***criterio de identificación, criterio de las razones de ser, criterio de pertinencia***. El primero se refiere a si el alumno es capaz de identificar **cuáles** son las herramientas matemáticas adecuadas en la solución de su problema, si identifica que estas herramientas son útiles sólo para este problema o si son útiles para “otro tipo” de problemas. El segundo se refiere a si el alumno es capaz de explicar claramente **cómo y porqué** la herramienta matemática utilizada es la adecuada para describir y solucionar este fenómeno y el último se refiere a si el alumno es capaz de percibir **porqué** la herramienta matemática le es útil (pertinente) en la solución de los problemas, si le seguirá siendo útil para problemas en el futuro, **para qué** tipo de problemas le servirá, etc.

Reflexionando en lo anterior, la evaluación de los proyectos que llevaremos acabo será de la siguiente manera:

1. Se hará un seguimiento diario del avance de cada alumno mediante un reporte (elaborado por el docente) que llenará cada miembro del equipo.
2. Se hará una evaluación de cada equipo, donde cada miembro del equipo evaluará el desempeño de sus otros compañeros.
3. Se hará una evaluación grupal, en donde los integrantes del equipo harán una presentación al resto del grupo de su proyecto, se dará tiempo para una sesión de preguntas y respuestas, donde deben participar todos los integrantes del equipo respondiendo al menos a una pregunta.
4. Se les hará una pequeña evaluación individual para tener una visión más apropiada de su autoevaluación y de las habilidades desarrolladas; se pretende que esta evaluación no cubra más del 20% de la calificación final del estudiante.

Es muy importante que se tenga presente que además de evaluar los objetivos académicos, se deben evaluar otras habilidades desarrolladas en los estudiantes por lo que hay que tener siempre en cuenta los criterios descritos anteriormente.