CAPITULO II

EL MÉTODO DE BÚSQUEDA TABÚ

En este segundo Capítulo se describen brevemente los orígenes del método de búsqueda tabú (*introducción*), luego se introduce el problema de optimización combinatoria como antecedente al modelo de búsqueda tabú (*descripción*), por último se describe el modelo de búsqueda tabú aplicado al problema de optimización combinatoria (*modelo de búsqueda tabú*) y se aplica en un ejemplo conocido como "el problema de las n - reinas".

Esto con la finalidad de entender el modelo de búsqueda tabú aplicado a un problema más sencillo como lo es el problema de la n - reinas, para finalmente aplicarlo en la programación de horarios (CAPITULO III).

2.1 INTRODUCCIÓN

El método de búsqueda tabú tiene su origen en procedimientos combinatorios aplicados a problemas de curvatura no lineal desarrollados al final de la década de los 70's, aunque muchos autores le dan el crédito inicial a Fred Glover y Pierre Hansen [4] ya que son los primeros autores en desarrollar la técnica en todo su potencial hacia el segundo quinquenio de la década de los 80's, ellos utilizaron ésta técnica para resolver problemas de optimización a gran escala. Este método se ha aplicado para resolver problemas de programación de grupos de trabajo [4], donde se requiere de una secuencia de pasos para obtener un producto determinado, y el objetivo principal es obtener el producto en el menor tiempo posible, así que se desea "descubrir" cual es la distribución del trabajo en los grupos de tal manera que el tiempo sea el menor, cumpliendo las normas de calidad del producto.

Otro ejemplo de optimización es la planeación aérea, donde el objetivo principal es minimizar las rutas de los aviones de tal forma que cumplan con el programa de vuelo, pero que el costo de operación de los aviones sea el menor posible. También se utiliza para elaborar el calendario de vuelo para los pilotos y las aeromozas de modo que todos los vuelos cuenten con el personal requerido y que los horarios sean convenientes para el personal, es decir, que no tengan vuelos largos consecutivos o que no se traslapen sus vuelos.

Los últimos desarrollos involucran el problema del vendedor, donde se desea descubrir la ruta más corta, para que el vendedor pueda visitar todas las ciudades que tiene programadas y regrese al punto de partida, eligiendo el camino más corto; el diseño de circuitos integrados y el problema de programación de horarios, que es el que desarrollamos más adelante.

El problema principal de algunos algoritmos heurísticos es la dificultad de escapar de la optimalidad local, es decir que al encontrar una solución óptima (o aparentemente óptima) el método no se detenga, si no que siga buscando otras posibles soluciones óptimas. Esto a propiciado que los métodos más recientes involucren búsquedas heurísticas utilizando el enfoque de la inteligencia artificial para evitar el problema de la optimalidad local, tales como: algoritmos genéticos, redes neuronales, recocido simulado, análisis de objetivos, búsqueda dispersa y búsqueda tabú, entre otros.

Este método heurístico (búsqueda tabú) está diseñado para escapar de la optimalidad local, basado en el manejo y uso de una colección de principios que sirven para resolver el problema de manera "inteligente", esto es, haciendo uso de memoria flexible para involucrar dos procesos, el de la adquisición y el de mejoramiento de la información; así, al tener cierta "historia" de los caminos ya recorridos y de los óptimos encontrados, se puede evitar permanecer en las mismas regiones, y recorrer regiones nuevas para encontrar otras mejores soluciones.

El método de búsqueda tabú se basa en tres puntos principales:

1. El uso de memorias diseñadas para permitir evaluar la información de búsqueda histórica.
2. Un mecanismo de memoria que restringe y libera el proceso de búsqueda.
3. La utilización de memorias de diferentes lapsos de tiempo: la de término corto, la de término intermedio y la de término largo, para guardar (por un tiempo) aquellas características que lograron una buena solución, y olvidando otras (ya

transcurrido el tiempo de memoria) para permitir al método diversificarse dentro de nuevas regiones.

Además de esto, el método de búsqueda tabú tiene la habilidad de obtener resultados de alta calidad con equipo computacional modesto, lo que es una ventaja, ya que en muchas ocasiones no se cuenta con equipo computacional de alta calidad para implementar "nuevos métodos".

2.2 DESCRIPCIÓN

Definamos un problema de optimización combinatoria de la siguiente forma:

$$\text{Minimizar } C(x) : x \in X \qquad \textbf{(1)}.$$

La función objetivo $C(x)$ puede ser lineal o no lineal y la condición $x \in X$ se interpreta como ciertas restricciones en la componente x para valores discretos, y X es el conjunto de vectores que normalmente se califican como viables.

Muchos procedimientos (heurísticos y óptimos) que sirven para resolver el problema de optimización combinatoria y que pueden ser escritos en la forma (1), se pueden definir de manera que involucren una secuencia de movimientos que conduzcan a una solución de prueba y error, es decir que de una solución inicial (o anterior) se pueda llegar a otra seleccionada de $x \in X$, lo que definimos entonces como el movimiento s que consiste en un mapeo definido de un subconjunto de $X(s)$ en X..

$$s : X(s) \to X$$

Asociado con $x \in X$ esta el conjunto $S(x)$ el cual consiste de todos los movimientos $s \in S$ que "pueden" ser aplicados a x, es decir:

$$S(x) = \{ s \in S : x \in X(s) \}$$

y también

$$X(s) = \{ x \in X : s \in S(x) \},$$

El conjunto S (x) puede ser visto como una “función de vecindad”, la cual verifica todos los movimientos alrededor de una solución dada. Es importante hacer notar la importancia de los movimientos, es decir si x’ y x’’ son distintos elementos del conjunto X(s), entonces s(x’) ≠ s(x’’), es decir hay que distinguir a los movimientos que transforman una solución de prueba en otra solución de prueba diferente. Llamaremos actualización cuando se pasa de f(x) a f(x’), es decir:

$$f(x) \to f(x').$$

Una vez definido el problema de optimización combinatoria definamos el método que vamos a utilizar.

2.3 MÉTODO DE BÚSQUEDA TABÚ

La búsqueda tabú se basa en dos elementos claves: primero se restringe la búsqueda al clasificar ciertos movimientos como prohibidos (tabú), posteriormente se permite una búsqueda libre por un período corto, utilizando una función de memoria corta que provee “estrategias de olvido”, lo que permite utilizar movimientos tabú por un período corto, si este movimiento mejora cualquier otra solución, esto se conoce como "el criterio de aspiración". Esto crea el procedimiento básico conocido como “relación dual” entre las restricciones tabú y el criterio de aspiración para construir y guiar el proceso de búsqueda.

Aunado a esto se introducen funciones de memoria corta, intermedia y memoria larga, las dos últimas operan en contraposición a la función de memoria corta, estas funciones de memoria permiten utilizar los movimientos tabú más de una vez, si fuera necesario, proporcionando estrategias de olvido, lo que permite una exploración más extensa en la vecindad, en busca del mejor movimiento posible. El término corto, intermedio y largo se refieren al tiempo (iteraciones) en que un movimiento se mantiene como tabú y no puede ser utilizado.

Es conveniente para entender el método de búsqueda tabú empezar con una programación sencilla conocida como “escalando la colina” [5] la cual utiliza un proceso unidireccional desde su punto de partida hasta su óptimo local (en este ejemplo utilizaremos la aproximación en dirección descendente).

"ESCALANDO LA COLINA"

Desarrollo heurístico para:

$$\text{Minimizar } C(x): x \in X \quad \textbf{(1)}$$

1. Seleccionamos una $x \in X$ inicial.
2. Seleccionamos algunos $s \in S(x)$ tales que

   $c(s(x)) < c(x)$.

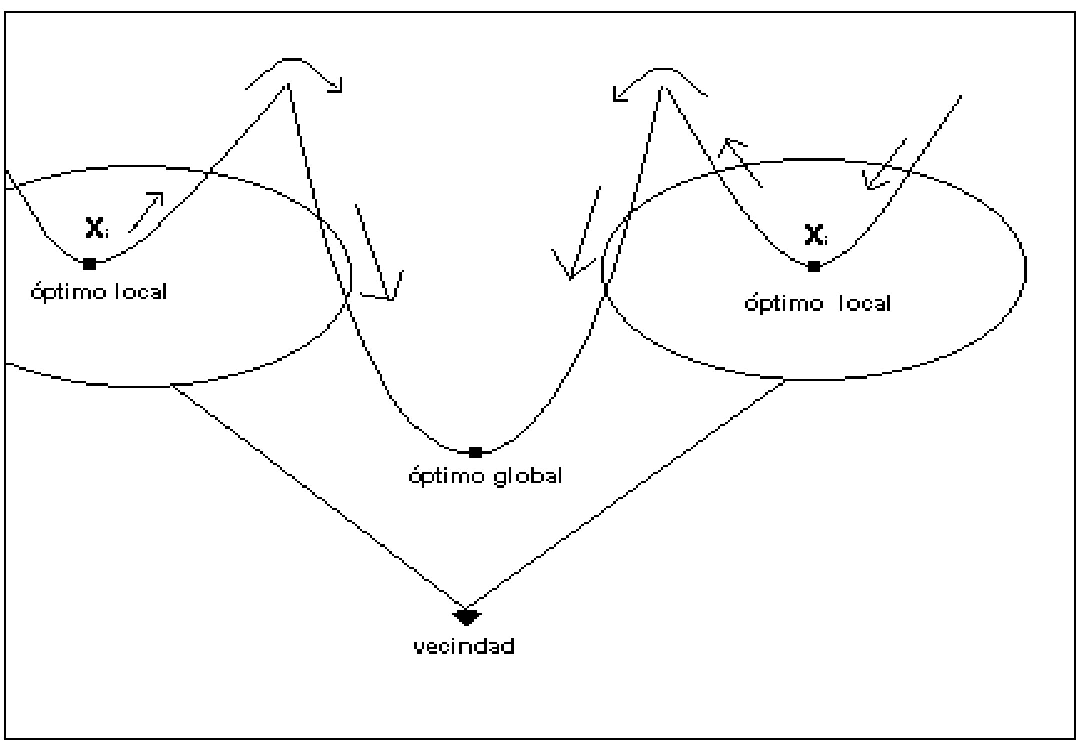
   Si s no existe, entonces x es el óptimo local y el método se detiene.

De otra forma,

3. Sea $x := s(x)$

   y regresa al paso 2.

GRAFICA 2.3.1



La principal limitación del procedimiento de "escalar la colina" es el problema combinatorio, el cuál pone al optimo local encontrado como un punto detenido (el proceso se detiene), cuando no es posible encontrar mejores movimientos, lo que no significa que, el óptimo local encontrado sea el óptimo global (ver GRAFICA 2.3.1).

La búsqueda tabú guía al procedimiento a continuar explorando sin que se confunda la ausencia de mejores movimientos, y no permite caer otra vez en el óptimo local del cual previamente emergió. De esta habilidad de incorporar y guiar el método en otros movimientos, la búsqueda tabú puede ser vista como una solución al problema combinatorio (1).

Para resolver el problema combinatorio (1), se crea un subconjunto T de S, cuyos elementos son llamados *movimientos tabúes*. Los elementos de T son determinados utilizando información histórica del proceso de búsqueda o pueden ser elegidos como movimientos prohibidos cuando se desea que una característica específica dentro del problema se cumpla, es decir los elementos de T son elegidos de una lista específica o por referencia al conjunto de condiciones tabú, entonces definimos:

$$T(\mathrm{x})=\{s \in S(\mathrm{x}): \mathrm{s}(\mathrm{x}) \text{ viola una condición tabú}\}.$$

El procedimiento ("escalando la colina") se reescribe nuevamente como sigue:

"BUSQUEDA TABÚ SIMPLE"

1. Seleccionamos una $x \in X$ inicial y sea $x^*= x$. El conjunto de iteraciones contadas a partir de $k=0$. Comienza con T vacío.
2. Si $S(x) - T$ es vacío irse al paso 4.

De otra forma hacemos $k := k+1$ y seleccionamos $s_k \in S(x) - T$ de tal manera que $s_k(x)=$ ÓPTIMO$(s(x) : s \in S(x) - T)$.

3. Sea $x := s_k(x)$. Si $c(x) < c(x^*)$, donde x^* denota la mejor solución encontrada hasta el momento, sea $x^* := x$.

4. Si un número determinado de iteraciones ha transcurrido en su totalidad o desde que x* fue la ultima mejoría obtenida; o si $S(x) - T = \varnothing$ se obtuvo directamente del paso 2, el proceso se detiene.
   De otra forma, se actualiza *T* y se regresa al paso 2.

Tres aspectos de este método merecen énfasis:

I. El uso de *T* provee de una "búsqueda restringida" y por consiguiente la solución generada depende específicamente de la composición de T y del paso 4.
II. El método no hace referencia a la condición del local óptimo, excepto implícitamente donde el local óptimo mejora a la mejor solución previamente encontrada.
III. El mejor movimiento es elegido en cada paso empleando el criterio de quedarse con la función ÓPTIMA.

La manera indicada para formar el conjunto tabú es basarse en la probabilidad de que la búsqueda se haga cíclica, es decir de seguir una secuencia de movimientos que regresen a la solución anteriormente visitada, la cual está inversamente relacionada con la distancia de la solución de prueba disponible x, de la solución previa. Si la distancia es medida en términos del número de movimientos que toma desde que la solución previa fue visitada, se conviene que no intervengan movimientos permitidos que regresen a su predecesor, entonces *T* es designado como contador cíclico de acuerdo a lo que se asumió.

La meta máxima es evitar regresar a la solución previa, para prevenir la elección de movimientos que representen la reversa de cualquier movimiento tomado durante una secuencia de t-iteraciones, el procedimiento se mueve progresivamente hacia afuera de la previa t-iteración (ver GRAFICA 2.3.1). Un descubrimiento empírico de la aplicación del método de búsqueda tabú es que *T* tiene un rango altamente estable de valores que previenen el reciclaje y permiten notablemente buenas soluciones [6].

Un elemento importante del método de búsqueda tabú es la incorporación de la función de aspiración de equilibrio $A(s, x)$, cuyos valores dependen de los movimientos específicos de s y/o del vector x. Se dice que la función de aspiración es alcanzada sí:

$$c(s(x)) < A(s, x).$$

El papel de $A(s, x)$ es el de agregar flexibilidad, al poder utilizar movimientos que son tabú si el criterio de aspiración es alcanzado. La meta es hacer esto de manera que se conserve la habilidad para evitar el reciclaje.

Para explicar como lograr esta meta, nos referiremos a un movimiento en un segundo sentido: como un ejemplo particular del mapeo (es decir, de x en $s(x)$) cuya identidad depende tanto de x como de s, que llamaremos "movimiento de solución específica".

Existen 3 estrategias de equilibrio para evitar el reciclaje, las cuales implican prevenir el movimiento de la solución específica de x a $s(x)$ si:

1) $s(x)$ ha sido visitada anteriormente,
2) Si el movimiento s ha sido aplicado a x anteriormente y
3) Si el movimiento s^{-1} ha sido aplicado a $s(x)$ anteriormente.

Aunque 1) es el único criterio para evitar que un movimiento se cicle, cuando el proceso revisa si el estado tabú de un movimiento puede ser anulado basándose en 1), generalmente requiere más memoria y un gran esfuerzo.

Si un movimiento tabú es permitido de manera que solo la condición 2) falte, entonces es posible que un movimiento regrese tan pronto como fue realizado, regresando a la solución anteriormente visitada (algunos experimentos han demostrado que la lista tabú designada de ésta manera, para prevenir un rango de repeticiones y movimientos en reversa no trabaja bien [4]).

La condición 3) sin embargo, es compatible con la estructura de lista tabú, usando la parte 3) para evitar el reciclaje y permitiendo movimientos tabú que vayan de x a *s*(x), aunque la solución específica que proviene del movimiento *s*(x) a x, ya haya ocurrido anteriormente.

El intento para prevenir el regreso a una solución generada anteriormente será más efectivo si agregamos la condición 3), que confiando solamente en la condición 2). Así, agregando las condiciones 2) y 3) fortalecemos la condición 1).

Las restricciones tabú y el criterio de aspiración (función de aspiración) juegan un papel doble, restringiendo y guiando el proceso de búsqueda, las restricciones tabú no permiten a un movimiento ser considerado admisible si éste no se aplica, mientras que el criterio de aspiración permite a un movimiento ser considerado admisible si éste se aplica (es decir sí satisface la condición de ÓPTIMO). Esta complementariedad de las restricciones tabú y del criterio de aspiración facilita la integración de una estructura común.

En suma, el criterio de aspiración y las restricciones tabú pueden sujetarse a una estructura organizacional común de trabajo y pueden ser vistas como aspectos diferentes del mismo principio conceptual. En un extremo como aspiración *A*(x) que es un conjunto pequeño que corresponde a un posible valor *c*(x) de un estatus tabú previo, y por otro lado *T*(x) como el conjunto de restricciones tabú.

El motivo por el que remarcamos esta forma de integración del criterio de aspiración y las restricciones tabú es la hipótesis [6] de que diferentes atributos de movimientos pueden ocasionar diferencias significativas en la calidad de las soluciones generadas y esto puede estar sujeto a diferentes movilidades del estado tabú, es decir, pueden ser recordados en la lista tabú y estar gobernados por diferentes niveles de aspiración, los cuales pueden ser archivados por el mismo mecanismo general utilizado.

Por último tenemos las memorias de término intermedio y largo que permiten al método de búsqueda tabú integrar las estrategias de intensificación y diversificación de manera efectiva. La memoria de termino intermedio opera para registrar y comparar las características de las mejores soluciones generadas durante un periodo particular de la búsqueda, éstas características se toman como un distintivo regional, de tal forma que el método busque nuevas soluciones que cumplan con ese distintivo (Ver GRAFICA 2.3.1). La función de memoria de término largo en cambio, emplea principios que son inversos a los de la función de término intermedio, esta memoria se utiliza para producir un punto inicial de la búsqueda en una nueva región mediante la penalización de las características que la memoria de término intermedio tiene como distintivo, es decir las convierte en tabú, lo que permite al método ir en busca de otras características distintas de las que prevalecen en la región actual de búsqueda, esto da una mayor diversificación en la búsqueda (Ver GRAFICA 2.3.1).

2.4 EJEMPLO

Se tomó como ejemplo el problema de las N - Reinas [4] del juego de ajedrez para ejemplificar el método de búsqueda tabú.

El problema de las N - Reinas consiste en colocar n- reinas en un tablero de ajedrez de n x n, de tal forma que, dos reinas no puedan "comerse" una a la otra. Para que esto no suceda dos reinas no pueden ocupar la misma línea: horizontal, vertical o diagonal. Sí esto ocurre entonces se dice que existe una *colisión*.

El problema de optimización consiste entonces, en encontrar un arreglo que minimice el número total de colisiones en el tablero de ajedrez de n x n. La solución ÓPTIMA será aquella que produzca cero colisiones.

Sí solo se utilizan dos reinas en el tablero de ajedrez, entonces se pueden encontrar varios arreglos que generen la solución ÓPTIMA., por lo que el problema será entonces: "maximizar el número de reinas que pueden ser colocadas en el tablero de ajedrez de n x n", sujetas a la restricción anterior (que no ocupen la misma línea horizontal, vertical o diagonal en el tablero de ajedrez).

Este problema puede ser modelado como un problema de programación entera de tipo 0-1, sin embargo se planteó como un problema de permutación.

2.4.1 Definición

Sean las n - reinas indexadas por las letras (i = 1,2,..., n), de tal forma que la reina i tomará el *i -esimo* renglón. Y se define a π (i) como la columna donde la reina i está colocada, entonces se tiene la siguiente permutación:

$$\Pi = \{\pi\,(1),\ \pi\,(2), \ldots,\ \pi\,(n)\}$$

La cual especifica la posición de las n- reinas en el tablero de ajedrez (Ver FIGURA 2.4.1 Y 2.4.2), esta presentación garantiza que dos reinas no se puedan "atacar" por estar en el mismo renglón o columna, de ésta manera, el problema se reduce a minimizar el número de colisiones en las diagonales.

En la FIGURA 2.4.1, se presenta un tablero de ajedrez de 4 x 4 que corresponde a la permutación Π = {3,4,2,1}, donde se presentan dos colisiones: las reinas 1 y 2 y las reinas 3 y 4, ya que éstas se pueden atacar.

FIGURA 2.4.1.

	1	2	3	4
1			Q	
2				Q
3		Q		
4	Q			

Una información importante en la solución de este problema, es el número de reinas que se encuentran en la misma diagonal en un arreglo. Ya que el tablero de ajedrez de tamaño n x n, tiene 2n -1 diagonales negativos y 2n -1 diagonales positivos, dos arreglos (denotados por d_1 y d_2) de tamaño 2n -1 serán suficientes para almacenar la información.

Para identificar cada diagonal se verá que: la suma de un renglón indexado y una columna indexada es constante en cualquier diagonal negativa, y la diferencia en esos índices es constante en cualquier diagonal positiva. Por ejemplo, las reinas 1 y 2 están colocadas en la diagonal positiva indexado como -2 ya que $1- \pi (1) =2 - \pi (2) = -2$. Es decir, si a la reina indexada como 1 se le resta la columna donde esta colocada (indexada como $\pi (1)=3$) produce el mismo resultado que si, a la reina indexada como 2 se le resta la columna donde esta colocada.

De igual forma, se puede ver que las reinas 3 y 4 están colocadas en la diagonal negativa indexado como 5 (i.e. $3+ \pi (3)= 4 + \pi (4) =5$). Otra información importante es que los índices de las diagonales positivas tienen un rango que va de [1-n, n-1], a diferencia del rango para las diagonales negativas que es el intervalo cerrado [2, 2n].

2.4.2 LA BÚSQUEDA TABÚ.

Para este ejemplo se utilizó un tablero 7 x 7, con 7 reinas. Se da una solución inicial aleatoria, como lo muestra la FIGURA 2.4.1, para comenzar.

FIGURA 2.4.2.1: Permutación inicial.

INDICES DE LAS COLUMNAS

4	5	3	6	7	1	2

Este orden especifica que existe una reina en el renglón 1 columna 4, otra en el renglón 2 columna 5, renglón 3 columna 3, renglón 4 columna 6, etc. El resultado de esta configuración muestra cuatro colisiones, las reinas (1,2), (4,5), (6,7) y (2,6), ya que se encuentran en la misma diagonal (ver FIGURA 2.4.2).

FIGURA 2.4.2.2: Posición de las reinas en el tablero.

		Q				
			Q			
	Q					
					Q	
						Q
Q						
	Q					

El método de búsqueda tabú, funciona bajo el precepto de una vecindad, la cuál se construye para identificar soluciones alternas que pudieran ser rechazadas por estar en alguna solución obtenida.

Cada intercambio en el orden de las reinas se identificara como un *movimiento*, los cuales son usados frecuentemente en los problemas de permutación, para definir a la vecindad.

De ésta manera un movimiento llevará de una solución a otra. En este problema (con 7 reinas) la vecindad está compuesta de 21 soluciones alternas (combinaciones de 7 en 2) que representan a todos los movimientos posibles.

Asociado a cada movimiento se tiene un valor que representa el cambio en la función objetivo (i.e. el total de colisiones) como resultado del movimiento ejecutado. El valor del movimiento provee bases fundamentales para evaluar la calidad del movimiento (i.e., sí mejoró, empeoró o dejó sin cambio a la función objetivo), sin embargo existen otros criterios que también son importantes.

Un punto importante en el Método de Búsqueda Tabú es la obtención del subconjunto de movimientos de una vecindad que se consideran como prohibidos (tabú), esta clasificación dependerá de la historia de los movimientos, es decir aquella permuta (cambio) entre dos reinas que generó soluciones pasadas.

FIGURA 2.4.2.3: Movimiento de las reinas 2 y 6.

Permutación inicial	4	5	3	6	7	1	2
Movimiento	4	1	3	6	7	5	2

Para evitar que este movimiento se ejecute en forma inversa, es decir, que se regrese a la posición anterior y por consiguiente no se avance en la búsqueda; o que al estar ejecutando estos dos movimientos indefinidamente se caiga en un ciclo, se debe clasificar este movimiento como **tabú**, lo que significa que este par de reinas (2,6) = (6,2) permanecerá sin movimiento un tiempo determinado. Se eligió 3 iteraciones, para este ejemplo.

FIGURA 2.4.2.4: Estructura tabú, para el movimiento de las reinas (2,6)

	2	3	4	5	6	7
1						
3					3 iteraciones	
3						
4						
5						
6						
7						

Cada celda en la FIGURA 2.4.2.4 contiene el número de iteraciones que permanecerán sin movimiento las reinas que están involucradas, lo que se describió como *función de memoria*, al principio de este Capítulo (sección 2.3).

Como se mencionó anteriormente, las restricciones tabú pueden ser utilizadas bajo ciertas circunstancias, como por ejemplo: cuando un movimiento tabú resulta ser la mejor solución, comparada con los demás movimientos efectuados. En este caso, la clasificación tabú deberá ser eliminada. La condición que permite que un movimiento tabú deje de serlo se conoce como el *criterio de aspiración.*

A continuación se presentan 5 iteraciones en las cuales se utilizó, tanto la *función de memoria* como el *criterio de aspiración*.

La solución inicial tiene un total de cuatro colisiones, la estructura tabú se inicializa en cero. Después de evaluar algunos movimientos, se consideraron los 5 mejores en términos de las colisiones que se presentaron.

Iteración 0 (Punto de partida).

Solución inicial

4	5	3	6	7	1	2

Estructura tabú

	2	3	4	5	6	7
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Movimiento		Valor
1	7	-2
2	4	-2
2	6	-2
5	6	-2
1	5	-1

De los 5 movimientos, cuatro reducen en dos las colisiones, por lo que se puede elegir cualquiera de ellos, se selecciona el primer movimiento (1,7).

Iteración 1

Solución inicial

2	5	3	6	7	1	4

Estructura tabú

	2	3	4	5	6	7
1						3
2						
3						
4						
5						
6						

Movimiento		Valor
2	4	-1
1	6	0
2	5	0
1	2	+1
1	3	+1

Esta nueva solución contiene dos colisiones (se redujo en dos el número de colisiones con el movimiento efectuado). La estructura tabú muestra que el movimiento en el par de reinas (1,7) esta prohibido por las próximas 3 iteraciones.

De los siguientes 5 movimientos uno disminuye en una unidad el número de colisiones, dos movimientos no generan cambio en el número de colisiones y los otros dos aumentan en una unidad el número de colisiones. Así que, se selecciona el movimiento que mejora el paso anterior, las reinas (2,4).

Iteración 2

Solución inicial

2	6	3	5	7	1	4

Estructura tabú

	2	3	4	5	6	7
1						2
2			3			
3						
4						
5						
6						

Movimiento Valor

	Movimiento		Valor
	1	3	0
T	1	7	1
T	2	4	1
	4	5	1
	6	7	1

Ahora se tiene una colisión con las reinas 1 y 4.

Se puede ver que la condición tabú de las reinas (1,7) bajó en una unidad, puesto que ya efectuamos una iteración. Ahora las reinas (2,4) son las que tienen prohibido modificarse por las próximas tres iteraciones, entonces estos dos pares de reinas tienen condiciones tabú, por lo que no podemos modificarlas.

De los movimientos que quedan, uno no genera cambio y los otros dos aumentan en una unidad el número de colisiones, por lo que se selecciona el movimiento que tiene menor valor (1,3).

Iteración 3

Solución inicial

3	6	2	5	7	1	4

Estructura tabú

	2	3	4	5	6	7
1		3				1
2			2			
3						
4						
5						
6						

Movimiento Valor

	Movimiento		Valor
T	1	3	0
T	1	7	0
	5	7	1
	6	7	1
	1	2	2

En este paso se continúa con una colisión ya que el movimiento anterior (cuyo valor era cero) no mejoró el número de colisiones (la función objetivo). Esta iteración tiene 3 movimientos tabú con diferente valor en la *función de memoria* (estructura tabú) la pareja (1,3) con valor 3, la pareja (2,4) con valor 2 y la pareja (1,7) con valor 1.

De los 5 movimientos posibles dos no modifican el número de colisiones, dos aumentan en uno el número de colisiones y un último movimiento aumenta en dos el número de colisiones. Los dos primeros movimientos tienen clasificación tabú, y como no mejoran el número de colisiones (aplicando el *criterio de aspiración*), no se pueden seleccionar, por lo que se selecciona el primer movimiento entre los dos que tienen valor uno, que es (5, 7).

Iteración 4

Solución inicial

3	6	2	5	4	1	7

Estructura tabú

	2	3	4	5	6	7
1		2				
2			1			
3						
4						
5						3
6						

	Movimiento		Valor
	4	7	-1
T	5	7	-1
	1	5	0
	2	5	0
T	2	4	2

En esta iteración se tienen dos colisiones, tres movimientos tabú y dos movimientos para ser seleccionados que mejoran el número de colisiones, pero como uno de ellos es denotado como tabú se selecciona el otro (4,7).

Iteración 5

Solución inicial

3	6	2	7	4	1	5

Estructura tabú

	2	3	4	5	6	7
1		1				
2						
3						
4						3
5						2
6						

	Movimiento		Valor
T	1	3	-1
	5	6	-1
T	5	7	0
	1	6	0
	1	7	2

En esta iteración se tiene una colisión, tres movimientos tabú y cinco posibles movimientos, dos de los cuales reducen el número de colisiones. Si se selecciona el primer movimiento de los dos posibles que mejoran el número de colisiones, se estaría seleccionando un movimiento tabú, lo que significa regresar a un movimiento anterior, sin embargo, como este movimiento mejora la función objetivo (i.e. el número de colisiones), y más aún proporciona la mejor solución posible (función objetivo) con cero colisiones, entonces hacemos uso del criterio de aspiración y se selecciona este movimiento (1,3).

Este movimiento produce la mejor solución posible (ÓPTIMO GLOBAL) por lo que, el procedimiento de búsqueda tabú termina.

2.4.3 Solución final

Posición de las reinas						
2	6	3	7	4	1	5

	Q					
					Q	
		Q				
						Q
			Q			
Q						
				Q		

Aquí se tienen una solución al problema de las 7 reinas en el tablero de ajedrez de 7x7, en forma tal que se tienen cero colisiones; es decir se alcanzó la función objetivo al obtenerse la solución ÓPTIMA.