

## CÁLCULO DE ASENTAMIENTOS ELÁSTICOS

### 2.1. Introducción

En este capítulo se hace referencia al cálculo de asentamientos inmediatos por medio de la teoría elástica, la cual se puede emplear para obtener una estimación de los asentamientos iniciales que se generan en la masa de suelo producidos por la aplicación de cargas. Para utilizar la teoría de la elasticidad es necesario determinar en forma adecuada el módulo de elasticidad ( $E$ ) y el módulo de *Poisson* ( $\nu$ ). El módulo de elasticidad es el parámetro más crítico y su valor se debe seleccionar teniendo en cuenta tanto la magnitud del esfuerzo inicial como su variación (*Lambe, 1996*).

## 2.2. Ley generalizada de Hooke

Considérese una muestra de suelo en forma de cubo sometida a fuerzas que actúan en las direcciones de los tres ejes coordenados, produciendo los esfuerzos normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , todos diferentes de cero (ver figura 2.1). Supóngase también que la muestra de suelo en forma de cubo tiene lados iguales a la unidad; bajo la carga triaxial, la muestra se convierte en un paralelepípedo rectangular de lados  $1 + \varepsilon_x$ ,  $1 + \varepsilon_y$  y  $1 + \varepsilon_z$ , en donde  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  son las deformaciones unitarias normales en las direcciones de los ejes coordenados (Beer & Johnston, 1993).

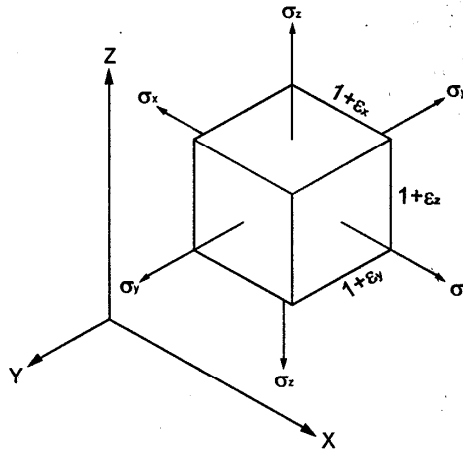


Figura. 2.1. Muestra de suelo sometida a carga triaxial.

Para expresar las componentes de la deformación  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  en términos de los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , se considera separadamente el efecto de cada componente del esfuerzo y se combinan los resultados obtenidos. La aproximación que aquí se propone está basada en el principio de superposición. Este principio dice que el efecto de una combinación de cargas en un suelo se puede obtener determinando separadamente los efectos de las diferentes cargas y combinando los resultados obtenidos siempre que se cumplan las siguientes condiciones (Beer & Johnston, 1993): a) cada efecto está

linealmente relacionado con la carga que lo produce y b) la deformación que resulta de cualquier carga dada es pequeña y no afecta las condiciones de aplicación de las demás cargas (deformaciones infinitesimales).

En el caso de cargas triaxiales, la primera condición se cumple si los esfuerzos no exceden el límite de proporcionalidad del suelo y la segunda condición también se cumple si el esfuerzo en cualquier cara de la muestra de suelo no causa en las otras, deformaciones suficientemente grandes para afectar el cálculo de esfuerzos en esas caras. Considerando que el efecto de  $\sigma_x$  causa una deformación igual a  $\sigma_x / E$  en la dirección "x" y deformaciones de  $-\nu\sigma_x / E$  en las direcciones "y" y "z", análogamente  $\sigma_y$  ocasiona una deformación  $\sigma_y / E$  en la dirección "y" con deformaciones de  $-\nu\sigma_y / E$  en las direcciones "x" y "z" y de la misma forma  $\sigma_z$  causa una deformación de  $\sigma_z / E$  en dirección de "z" y deformaciones  $-\nu\sigma_z / E$  en las direcciones "x" e "y". Si se combinan los resultados se tiene que las deformaciones totales en cada cara son:

Esfuerzo aplicado

Deformación unitaria en el eje

$$\begin{array}{ccc} & \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ \sigma_x & \frac{\sigma_x}{E} & -\frac{\nu\sigma_x}{E} & -\frac{\nu\sigma_x}{E} \end{array} \quad (2.1)$$

$$\begin{array}{ccc} & -\frac{\nu\sigma_y}{E} & \frac{\sigma_y}{E} & -\frac{\nu\sigma_y}{E} \\ \sigma_y & & & \end{array} \quad (2.2)$$

$$\begin{array}{ccc} & -\frac{\nu\sigma_z}{E} & -\frac{\nu\sigma_z}{E} & \frac{\sigma_z}{E} \\ \sigma_z & & & \end{array} \quad (2.3)$$

Las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) son consideradas como la ley generalizada de *Hooke* para carga triaxial (*Beer & Johnston, 1993*), donde:  $\sigma_x$  es el esfuerzo aplicado en la cara "x" ( $FL^{-2}$ ),  $\sigma_y$  es el esfuerzo aplicado en la cara "y" ( $FL^{-2}$ ),  $\sigma_z$  es el esfuerzo aplicado en la cara "z" ( $FL^{-2}$ ),  $E$  es el módulo de elasticidad ( $FL^{-2}$ ) y  $\nu$  es el módulo de *Poisson* (adimensional).

---

Si se aplican simultáneamente los tres esfuerzos, se tiene:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.6)$$

### 2.2.1. Hipótesis de la teoría elástica aplicada en suelos

Para aplicar la teoría de la elasticidad en los suelos, es necesario hacer las siguientes hipótesis: a) el suelo es un medio continuo; b) el suelo es un material homogéneo; c) el suelo es un material isótropo; d) la compresibilidad medida en el suelo es la misma en cualquier dirección y e) la relación esfuerzo deformación del suelo es lineal.

### 2.3. Parámetros elásticos

**Módulo de elasticidad.** El hecho de que los suelos no sean homogéneos ni isótropos, ocasiona que éstos se aparten de las hipótesis que por lo general son atribuidas al medio elástico. Sin embargo, el hecho más importante radica en que los suelos no son elásticos y menos aún linealmente elásticos como tendría que ser para poder aplicar las soluciones obtenidas con la teoría de la elasticidad. En suelos, el módulo de elasticidad aumenta con la profundidad y varía con la presión de confinamiento. (Juárez & Rico, 1995).

El módulo de elasticidad no es un parámetro constante de los suelos, sino mas bien, una magnitud que describe con aproximación el comportamiento de un suelo para una combinación particular de esfuerzos (*Lambe, 1996*). Si se aplica un esfuerzo uniaxial  $\sigma_z$  a un cilindro elástico, se producirá una compresión vertical y una expansión lateral, de tal manera que a la relación entre el esfuerzo uniaxial y la deformación en el sentido de la aplicación del esfuerzo uniaxial se le conoce como módulo de elasticidad (ver figura 2.2.). En la figura 2.3, está representado el comportamiento esfuerzo-deformación de un suelo.

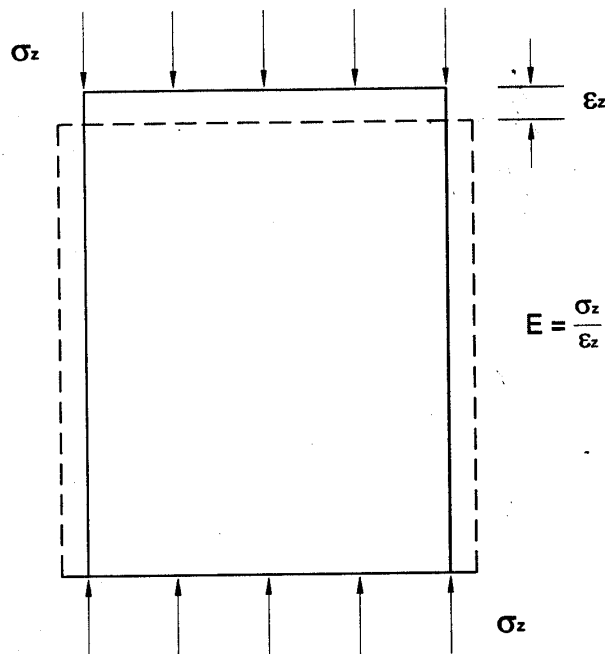


Figura. 2.2. Cilindro de suelo sometido a esfuerzo uniaxial, (*Lambe, 1996*).

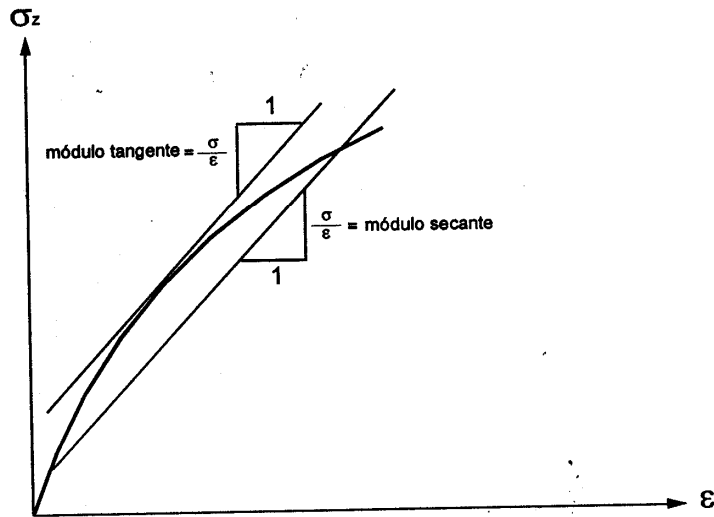


Figura 2.3. Curva esfuerzo-deformación para un suelo bajo la acción de una carga, (Lambe, 1996).

Como la deformación uniaxial  $\epsilon_z$  es adimensional; entonces el módulo de elasticidad  $E$  se expresa en las mismas unidades que el esfuerzo uniaxial  $\sigma_z$ , esto es en  $FL^{-2}$ .

**Módulo de Poisson.** Al aplicar un esfuerzo uniaxial  $\sigma_z$  al cilindro-elástico, se produce una deformación lateral y una deformación axial. Al valor absoluto de la relación entre la deformación lateral y la deformación axial se le conoce como módulo de Poisson ( $\nu$ ) (Beer & Johnston, 1993).

$$\nu = \left| \frac{\text{deformación lateral}}{\text{deformación axial}} \right| \quad (2.7)$$

El módulo de Poisson, para materiales elásticos ideales, varía entre 0 y 0.5. El valor de 0.5 corresponde a un material cuyo volumen no cambia por efecto de la carga como por ejemplo, el agua y el valor de 0 corresponde a un material que no se deforma lateralmente por la acción de la carga, por ejemplo el corcho (Sowers, 1990).

---

## 2.4. Uso de la teoría elástica para el cálculo de asentamientos

La teoría de la elasticidad puede utilizarse para obtener expresiones de las deformaciones que resultan en una masa de suelo cuando se les aplica una carga. En la práctica, resultan de gran interés las deformaciones verticales, es decir, los asentamientos que se producen en la superficie de la masa de suelo cuando la carga se aplica sobre el área de una cimentación. Las soluciones para los asentamientos basadas en la teoría elástica utilizan el módulo de elasticidad ( $E$ ) y el módulo de *Poisson* ( $\nu$ ) como se vio en el inciso anterior; sin embargo, una masa de suelo no tiene valores únicos de  $E$  y de  $\nu$ , y la dificultad para determinar los valores apropiados de estos parámetros limita la aplicación práctica de estas soluciones (*Berry & Reid, 1997*). No obstante, en depósitos de arcilla saturada, los asentamientos que se presentan inmediatamente durante la construcción se producen sin ningún drenaje del agua intersticial del suelo; lo cual hace que sea razonable la hipótesis de un módulo de elasticidad no drenado constante, ya que no hay cambio de volumen en la masa de suelo con una relación de *Poisson* de  $\nu = 0.5$  (para fines prácticos se considera  $\nu = 0.45$ ) (*Berry & Reid, 1997*).

### 2.4.1. Asentamiento elástico bajo una carga concentrada

Los esfuerzos inducidos dependen del tipo de carga (concentrada, lineal, uniformemente distribuida) y del estado de deformación que induzcan al suelo. Por lo que los asentamientos que ocurren dependen también de la geometría de las cargas.

Para una carga vertical concentrada que actúa en la frontera de un medio elástico semi-infinito, se estima el asentamiento bajo la carga usando la fórmula de *Boussinesq* para el esfuerzo normal vertical (ver capítulo 4). Si se aplica la ley de *Hooke* en su forma más simple correspondiente a un estado uniaxial de esfuerzos, se obtiene (*Juárez & Rico, 1995*):

$$d\delta = \frac{\sigma_z}{E} dz \quad (2.8)$$

donde:  $d\delta$  es la deformación vertical del elemento  $dz$  situado a una profundidad  $z$  bajo la carga puntual aplicada.

Para este caso, se tiene que:

$$d\delta = \frac{3P}{2\pi E z^2} dz \quad (2.9)$$

Integrando la expresión (2.9) entre  $z$  e  $\infty$  y suponiendo el estrato de suelo de profundidad infinita, resulta:

$$\delta = \frac{3P}{2\pi E} \int_{\infty}^z \frac{dz}{z^2} = -\frac{3P}{2\pi E} \left[ \frac{1}{z} \right]_z^{\infty} \quad (2.10)$$

$$\delta = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi E z} \quad (2.11)$$

donde:  $\delta$  es el asentamiento elástico bajo la carga puntual aplicada ( $L$ ),  $P$  es la carga puntual aplicada ( $F$ ),  $E$  es el módulo de elasticidad ( $FL^{-2}$ ) y  $z$  es la profundidad a la que se calcula el asentamiento ( $L$ ).

De la misma forma se puede calcular el asentamiento en cualquier punto de la masa de suelo a una profundidad  $z$  (Juárez & Rico, 1995):

$$\delta = \frac{P}{2\pi E} (1+\nu) \left[ 2(1-\nu) + \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right] \frac{1}{R} \quad (2.12)$$

donde:  $\nu$  es el módulo de Poisson (adimensional) y  $R$  es el radio vector ( $L$ ).

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.13)$$



Para puntos bajo la carga puntual aplicada, la ecuación (2.12) se reduce a:

$$\delta = \frac{P}{2\pi Ez} (1 + \nu) (3 - 2\nu) \quad (2.14)$$

Cabe resaltar que la ecuación (2.12) coincide con la ecuación (2.14) para  $\nu = 0.5$ .

#### 2.4.2. Asentamientos elásticos bajo cargas distribuidas en un área circular

Para el caso de una superficie circular flexible bajo cargas distribuidas en la frontera superior de un medio semi-infinito, elástico, homogéneo e isótropo, se tiene que el asentamiento bajo el centro del área cargada está dada por (Juárez & Rico, 1995):

$$\delta_c = (1 - \nu^2) \frac{q}{E} D \quad (2.15)$$

el asentamiento en los puntos de la periferia del área circular cargada es:

$$\delta_p = \frac{2}{\pi} (1 - \nu^2) \frac{q}{E} D \quad (2.16)$$

y el asentamiento promedio de dicha área es:

$$\delta_m = \frac{8}{3\pi} (1 - \nu^2) \frac{q}{E} D \quad (2.17)$$

donde:  $q$  es la carga distribuida aplicada en el área circular ( $FL^{-2}$ ) y  $D$  es el diámetro del área circular ( $L$ ).

Para una área circular rígida con carga puntual aplicada  $P$  y diámetro  $D$ , la carga media distribuida o por unidad de área en un medio semi-infinito, elástico, homogéneo e isótropo es (Juárez & Rico, 1995):

$$q_m = \frac{4P}{\pi D^2} \quad (2.18)$$

Por lo tanto, el asentamiento bajo cargas distribuidas en cualquier punto del área circular rígida es:

$$\delta_R = \frac{\pi}{4} (1 - \nu^2) \frac{q_m D}{E} \quad (2.19)$$

donde:  $q_m$  es la carga media distribuida en el área circular ( $FL^{-2}$ ).

### 2.4.3. Asentamientos elásticos bajo cargas distribuidas en una superficie rectangular

Para el cálculo de asentamientos elásticos inducidos por una carga rectangular con carga uniforme, *Steinbrenner* resolvió el problema de cálculo de asentamientos en un medio elástico, homogéneo e isótropo de espesor " $H$ " bajo una esquina del rectángulo cargado con la siguiente expresión (Juárez & Rico, 1995):

$$\delta = \frac{q}{E} (1 - \nu^2) \left[ x \ln \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + H^2}}{x (y + \sqrt{x^2 + y^2 + H^2})} + y \ln \frac{(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{y^2 + H^2}}{y (x + \sqrt{x^2 + y^2 + H^2})} \right] + \frac{q}{2\pi E} (1 - \nu - 2\nu^2) H \tan^{-1} \frac{xy}{H \sqrt{x^2 + y^2 + H^2}} \quad (2.20)$$

---

donde:  $q$  es la carga distribuida aplicada en el área rectangular ( $FL^{-2}$ ), " $x$ " es el largo del área rectangular ( $L$ ), " $y$ " es el ancho del área rectangular ( $L$ ) y  $H$  es el espesor del estrato en el que se calcula el asentamiento ( $L$ ).

Para calcular asentamientos bajo una esquina de una superficie rectangular uniformemente cargada en un medio semi-infinito, elástico, homogéneo e isótropo, *Schleicher* obtuvo la siguiente ecuación (*Deméneghi, 1995*):

$$\delta = \left[ \frac{q(1-\nu^2)}{\pi E} \right] \left[ x \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + x^2}}{x} + y \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \right] \quad (2.21)$$

donde:  $q$  es la carga distribuida aplicada en el área rectangular ( $FL^{-2}$ ), " $x$ " es el largo del área rectangular ( $L$ ) e " $y$ " es el ancho del área rectangular ( $L$ ).

## 2.5. Conclusión

Con lo desarrollado en este capítulo, se puede decir que los conceptos de la teoría de la elasticidad son aplicables solamente con carácter aproximado a los suelos, debido a que éstos no cumplen con las hipótesis establecidas por la teoría elástica. Además, es muy importante determinar de manera confiable y apegado lo más posible a la realidad los valores del módulo de elasticidad y del coeficiente de *Poisson* para obtener de manera más precisa el cálculo de las deformaciones del suelo. Por lo tanto, mientras la Mecánica de Suelos desarrolla sus propias teorías para determinar las deformaciones que sufre una masa de suelo bajo la aplicación de cargas, en la actualidad se recurre aún a la teoría elástica.