

CAPITULO 4

ANALISIS DE INESTABILIDAD ELASTICA

4.1.- INTRODUCCION

De la mecánica de materiales se sabe, que para la selección de elementos de máquinas y estructurales se aplican tres criterios fundamentales: resistencia, rigidez y estabilidad. En los procedimientos de análisis y métodos presentados en los capítulos anteriores, se supuso tácitamente que los elementos estaban en equilibrio estable. Sin embargo, no todos los sistemas estructurales son necesariamente estables. Por ejemplo, considérese el caso de una varilla de acero de un metro de largo y que tiene el área transversal de un lápiz ordinario. Si éste elemento se equilibrara sobre un extremo, se puede concluir que el esfuerzo en la base sería igual al peso total de la varilla dividido entre su área transversal. Sin embargo el equilibrio de esta varilla es muy precario. Debido a la perturbación más pequeña o al más ligero estímulo externo, la varilla caería; en consecuencia, no tiene sentido el cálculo anterior del esfuerzo. Esta ilustración físicamente obvia nos plantea la importancia que puede llegar a tener el concepto de estabilidad en algunos tipos de estructuras.

El objeto de estudio de éste capítulo es la "estabilidad de columnas", es decir, elementos de compresión con área transversal constante. La carga que soporta axialmente puede ser concéntrica (aplicada a lo largo del eje longitudinal), como en la Fig. 4.1a), o excéntrica (aplicada paralelamente al eje longitudinal del miembro, pero a cierta distancia del mismo), como en la Fig. 4.1b).

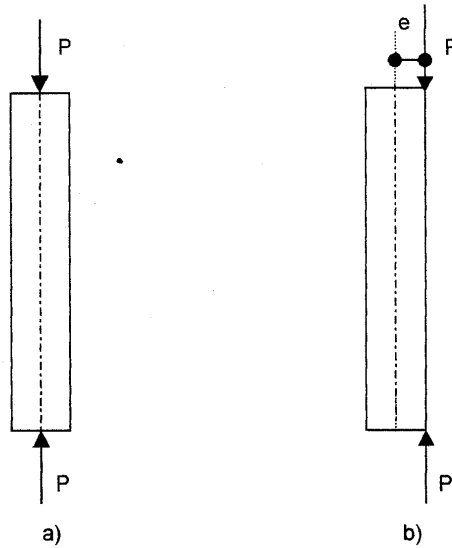


FIGURA 4.1

Según esta definición, los miembros a compresión cargados concéntricamente relativamente cortos y gruesos, trabajarían como "columnas", las cuales fallarían por aplastamiento general del material después de aplicar una fuerza de gran intensidad, sin la posibilidad de que lleguen a ser inestables.

A medida que se aumenta la longitud de la columna se reduce su capacidad de soportar carga. Esta reducción está basada más en el tipo de falla que ocurriría, que en el esfuerzo. Por ejemplo, dos varillas que tienen el mismo diámetro, una de las cuales es de 1 m de longitud y la otra de 5 cm de longitud. Si se aplicara una fuerza de compresión gradualmente creciente a la varilla larga, fallaría porque se presentaría repentinamente una gran deflexión lateral. Esta deflexión lateral, llamada Pandeo, es producida por la inestabilidad de la varilla cuando se alcanza una cierta carga crítica.

Por otro lado, la varilla corta, fallaría por fluencia general (aplastamiento). Por consiguiente, la varilla corta soportaría una carga considerablemente mayor que la varilla larga. Este caso ilustra los dos tipos de extremos de falla que pueden ocurrir cuando miembros rectos se sujetan a cargas de compresión.

En general, cuando una barra se sujeta a compresión, pueden ocurrir tres tipos de falla, según la teoría de columnas. Las columnas cortas fallan por aplastamiento del material, las columnas largas fallan por pandeo y las columnas intermedias fallan por una combinación de pandeo y aplastamiento.

Las columnas cortas pueden analizarse y diseñarse según la fórmula elemental $\sigma = P / A$. Sin embargo, las columnas largas e intermedias deben tratarse de tal manera que se considere el fenómeno de pandeo, ya que por lo general, ésta falla ocurre más bien repentinamente, de forma espectacular y es muy peligrosa.

A continuación se presentan parte de la teoría y sus fundamentos que gobiernan el análisis y diseño de columnas.

4.2.- ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

De la mecánica teórica se sabe, que el equilibrio de un sólido absolutamente rígido puede ser estable, neutro e inestable. Por ejemplo, la esfera que se encuentra sobre una superficie cóncava tiene un estado de equilibrio estable. Si se desvía ligeramente de esta posición y se suelta después, entonces, volverá a ocupar su posición inicial (Fig. 4.2 a). La esfera que se encuentra en una superficie horizontal tiene un estado de equilibrio neutro (o indiferente) (Fig. 4.2 b). Al desviarla de esta posición no volverá a ella aunque su movimiento cese. Por último, la esfera que se encuentra sobre una superficie convexa tiene un estado de equilibrio inestable, pues al ser desviada de su posición inicial, seguirá desplazándose (Fig. 4.2 c).

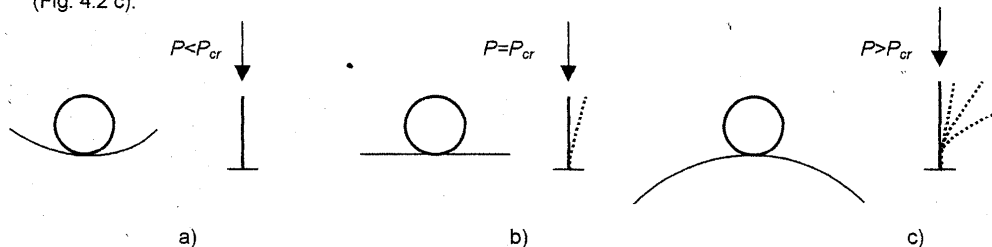


FIGURA 4.2

Se pueden mencionar también otros ejemplos análogos que se refieren al equilibrio de sólidos deformables.

Así, cuando sobre una barra larga actúa una carga axial de compresión relativamente pequeña (menor que cierto valor crítico), aquella se encontrará en un estado de equilibrio estable (Fig. 4.2 a). Si, aplicando una carga transversal, se da una pequeña flexión a la barra, esta recuperará su forma inicial de equilibrio y se rectificará una vez retirada la carga transversal. Para un valor de la fuerza de compresión P igual al crítico P_{cr} , la barra se encontrará en un estado de equilibrio indiferente, es decir, al ser desviada ligeramente de su posición rectilínea inicial y después de liberarla, permanecerá también en equilibrio en la posición desviada (Fig. 4.2 b). Por último, si la fuerza P es mayor que la crítica, entonces la forma

rectilínea de equilibrio resultará inestable. La barra trabajará a compresión y flexión combinadas y no exclusivamente a compresión (Fig. 4.2 c). Incluso un pequeño exceso de la fuerza sobre el valor crítico, conduce a que la barra reciba grandes deflexiones y a la aparición en ellas de grandes esfuerzos. La barra se destruye o recibe deformaciones inadmisiblemente grandes. En ambos casos, la barra, prácticamente, se inutiliza, es decir, desde el punto de vista del cálculo de ingeniería la fuerza crítica deberá considerarse como carga peligrosa (límite).

Así, pues, la fuerza crítica se puede definir como aquella fuerza, para la cual el equilibrio de la barra comprimida es indiferente; en otras palabras, como la fuerza para la cual tanto la forma rectilínea, como la curvilínea contigua a ella, son formas posibles de equilibrio.

4.3.- CARGA DE PANDEO DE EULER PARA COLUMNAS CON EXTREMOS ARTICULADOS

La fórmula de Euler es válida solamente para columnas largas y calcula lo que se conoce como la "carga crítica de pandeo", esta es la carga última que puede ser soportada por columnas largas; es decir, la carga presente en el instante del colapso.

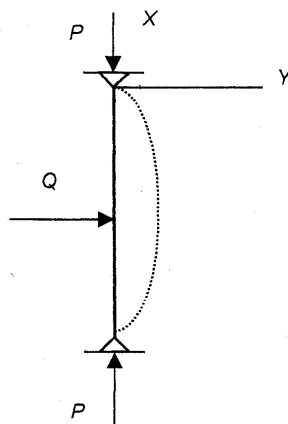


FIGURA 4.3

La columna articulada en sus extremos, inicialmente recta, homogénea, de sección transversal constante en toda su longitud, se comporta elásticamente y cargada como se indica en la Fig. 4.3 puede tener dos posiciones de equilibrio; recta y ligeramente deformada (línea punteada).

Se aplica una pequeña fuerza lateral Q , la barra se deforma lateralmente una pequeña cantidad. Si se quita Q , la barra regresará a su configuración recta; si no, el valor de P en ese momento sería la "Carga Crítica de Pandeo" y se presenta lo que se llama "Equilibrio Neutro". Si en esta condición la carga axial se reduce ligeramente, la barra regresará a su posición recta. Si la carga axial se incrementa ligeramente, la barra sufrirá el colapso. Se llama carga crítica de pandeo, a aquella en la cual corresponde el equilibrio neutro.

Se obtiene la carga crítica de pandeo para una columna considerando a la barra en la configuración flexionada de equilibrio neutro como se muestra en la Fig. 4.4:

$$\sum M_{\text{corte}} = 0 \quad : \quad M = -Py$$

De la ecuación de la elástica $d^2y/dx^2 = M/EI$ se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{-Py}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right)y = 0$$

Haciendo $k^2 = P/EI$, se escribe

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

Es una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución es

$$y = A \cos kx + B \sin kx \quad (4.1)$$



FIGURA 4.4

Donde A y B son constantes de integración que deben calcularse en base a dos condiciones frontera.

1.- Para $X = 0$, $y = 0$ que sustituyendo en la Ec. 4.1 se tiene

$$0 = A \cos k(0) + B \operatorname{sen} k(0)$$

$$0 = A (1) + B (0)$$

$$\underline{A = 0}$$

2.- Para $X = L$, $y = 0$ por lo tanto la Ec. 4.1 queda

$$0 = A \cos kL + B \operatorname{sen} kL$$

pero como $A = 0$, la ecuación anterior queda

$$0 = B \operatorname{sen} kL$$

B no puede tomar el valor de cero (ya que $A=0$), de otra manera no se tendría solución, entonces B debe tener un valor finito, entonces

$$\operatorname{Sen} kL = 0$$

Las soluciones son:

$$kL = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$$

Tomando la solución general

$$kL = n\pi, \quad \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{n\pi}{L}$$

Despejando P, se tiene

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (4.2)$$

Donde n describe los modos de pandeo que se indican en la Fig. 4.5. En la mayoría de los casos prácticos el primer modo de pandeo ($n = 1$) producirá la falla por lo que

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (4.3)$$

Que representa la *carga crítica de pandeo de Euler* para una columna con articulaciones en sus extremos donde I debe ser el momento de inercia mínimo del área transversal de la columna y L la longitud de la misma.

Según la Ec. 4.1, para la carga crítica la ecuación de la curva elástica es

$$y = A \operatorname{sen} kx$$

Esta es la función característica de este problema, y puesto que n puede tomar cualquier valor entero, existe un número infinito de dichas funciones. En esta solución linealizada de amplitud A del modo de pandeo permanece indeterminada. Para $n = 1$ la elástica tiene la forma de media senoide. Esta configuración, junto con las correspondientes a $n = 2$ y $n = 3$, se encuentra en la Fig. 4.5. Los modos de más alto orden no tienen significación física en problemas de pandeo, pues la carga crítica mínima ocurre cuando $n = 1$.

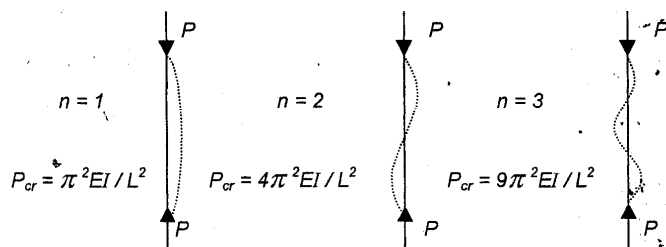


FIGURA 4.5

4.4.- PANDEO ELASTICO DE COLUMNAS CON DIFERENTES RESTRICCIONES EN SUS EXTREMOS

Procedimientos iguales a los que se estudian en el capítulo anterior se pueden utilizar para determinar las cargas de pandeo elástico de columnas con diferentes condiciones en sus extremos. Las soluciones de tales problemas son muy sensibles a las restricciones de extremo. Por ejemplo, usando la columna con extremos articulados como el caso básico podemos modificar la ecuación de Euler para proporcionar la carga crítica de pandeo para columnas que tengan diferentes condiciones en sus extremos.

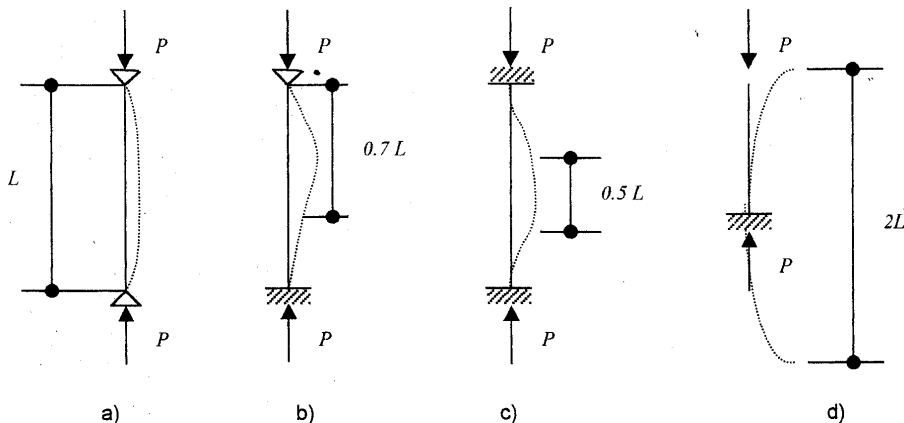


FIGURA 4.6

Se necesita solamente sustituir la longitud L de la Ec. 4.3 por las *Longitudes Efectivas* (L_e) mostradas en la Fig. 4.6.

La *Longitud efectiva* es la distancia entre los puntos de inflexión de la curva deformada que adopta el eje de la columna.

La Ec. 4.3 para la carga crítica de pandeo de Euler para estas restricciones en los extremos sería:

Para b)

$$P_{cr} = \pi^2 EI / (0.7 L)^2$$

$$P_{cr} = 2.04 \pi^2 EI / L^2$$

Para c)

$$P_{cr} = \pi^2 EI / (0.5 L)^2$$

$$P_{cr} = 4 \pi^2 EI / L^2$$

Para d)

$$P_{cr} = \pi^2 EI / (0.5 L)^2$$

$$P_{cr} = \pi^2 EI / 4 L^2$$

En forma general, incluimos en la Ec. 4.3 un factor de longitud efectiva k y toma la forma

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2} \quad (4.4)$$

4.5.- ECUACIONES DIFERENCIALES PARA VIGAS-COLUMNA

Las fórmulas de Euler para las cargas críticas de columna se pueden obtener también resolviendo una ecuación diferencial de cuarto orden para la elástica en carga crítica, y empleando condiciones frontera apropiadas, las que dependen de las restricciones en los extremos. Dicha ecuación se puede obtener a partir del equilibrio de un elemento infinitesimal y tomaría la forma

$$d^4 y / dx^4 + k^2 (d^2 y / dx^2) = 0 \quad (4.5)$$

donde $k^2 = P/(EI)$ como en la sección 4.3. La solución de esta ecuación diferencial homogénea de cuarto orden y varias de sus derivadas son de la siguiente manera:

$$y = C_1 \text{ sen } kx + C_2 \text{ cos } kx + C_3 x + C_4 \quad (4.6a)$$

$$y' = C_1 k \text{ cos } kx - C_2 k \text{ sen } kx + C_3 \quad (4.6b)$$

$$y'' = -C_1 k^2 \text{ sen } kx - C_2 k^2 \text{ cos } kx \quad (4.6c)$$

$$y''' = -C_1 k^3 \text{ cos } kx + C_2 k^3 \text{ sen } kx \quad (4.6d)$$

Para una columna articulada, las condiciones frontera son

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad M(0) = EI y''(0) = 0$$

y

$$M(L) = EI y''(L) = 0$$

Utilizando estas condiciones con las Ecs. 4.6a y 4.6b se obtiene

$$\begin{array}{rcl} C_1 \text{ sen } kL + C_2 \text{ cos } kL + C_3 L + C_4 & = & 0 \\ C_1 k \text{ cos } kL - C_2 k \text{ sen } kL + C_3 & = & 0 \\ -C_1 k^2 \text{ sen } kL - C_2 k^2 \text{ cos } kL & = & 0 \end{array}$$

Para satisfacer este sistema de ecuaciones, C_1 , C_2 , C_3 y C_4 se podrían igualar a cero, lo cual, sin embargo, es una solución trivial. Una solución no trivial requiere que el determinante de los coeficientes de un sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas sea igual a cero. Por consiguiente, con $k^2 EI = P$,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{sen } kL & \cos kL & L & 1 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ -P \text{ sen } kL & -P \cos kL & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La evaluación de este determinante conduce a $\text{sen } kL = 0$, que es precisamente la misma condición dada para la Ec. 4.1.

Este enfoque es ventajoso en problemas con diferentes restricciones en los extremos, donde la fuerza axial y EI permanecen constantes a lo largo de la columna.

4.6.- NATURALEZA DEL PROBLEMA DE LA VIGA-COLUMNA

Una viga en la que actúa una fuerza axial de compresión además, de cargas aplicadas transversalmente, se denomina *viga-columna*. Se examinará un caso sencillo para ilustrar el efecto significativo de la fuerza axial en tales problemas. Considérese, por ejemplo, una viga columna elástica sometida a una fuerza axial P y una carga transversal hacia arriba F en su punto medio, como indica la Fig. 4.7 a). En la Fig. 4.7 b) se ve el diagrama de cuerpo libre para la viga-columna deformada. Este diagrama permite la formulación del momento flexionante total M , que incluye el efecto de la fuerza axial P multiplicada por la deflexión y .

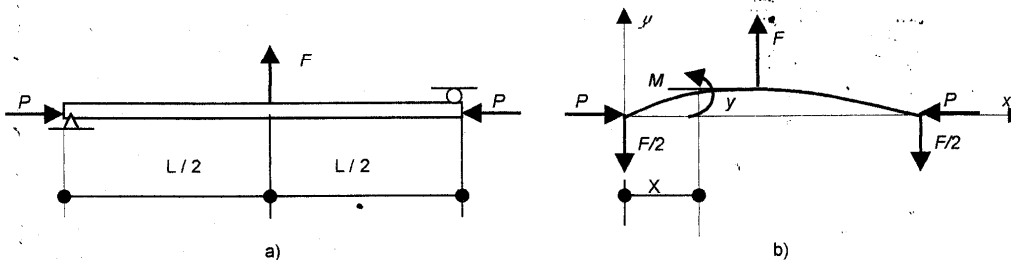


FIGURA 4.7

El momento total dividido entre EI se podría hacer igual a la expresión para la curvatura exacta. Sin embargo, esta curvatura se considera habitualmente como d^2y/dx^2 ; es decir, se acepta la expresión $M = EIy''$. Esto produce resultados exactos sólo para deflexiones y rotaciones pequeñas, y el aceptar esta aproximación conducirá a deflexiones infinitas en caso de cargas críticas.

En consecuencia, utilizando la relación $M = EIy''$ y observando que para el tramo izquierdo del claro $M = -(F/2)x - Py$, se tiene

$$EIy'' = M = -Py - \left(\frac{F}{2}\right)x \quad (0 \leq x \leq L/2)$$

O bien,

$$EIy'' + Py = -\left(\frac{F}{2}\right)x$$

Dividiendo entre EI y haciendo $k^2 = P/EI$, después de algunas simplificaciones, la ecuación diferencial principal será

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = - \left(\frac{k^2F}{2P} \right) x \quad (0 \leq x \leq L/2) \quad (4.7)$$

La solución homogénea de esta ecuación diferencial tiene la forma bien conocida del movimiento armónico simple; la solución particular es igual al término de la derecha dividido entre k^2 . Por consiguiente, la solución completa es

$$y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx - \left(\frac{F}{2P} \right) x \quad (4.8)$$

Las constantes C_1 y C_2 se deducen de la condición frontera $y(0) = 0$ y de una condición de simetría $y'(L/2) = 0$. La primera condición da

$$y(0) = C_2 = 0$$

Puesto que $y' = C_1K \cos Kx - C_2K \operatorname{sen} Kx - F/(2P)$

Siendo C_2 igual a cero, la segunda condición da

$$y' = (L/2) = C_1K \cos KL/2 - F/(2P) = 0$$

o bien, $C_1 = F / [2PK \cos (KL/2)]$

Sustituyendo esta constante en la ecuación 4.8

$$y = \left(\frac{F}{2PK} \right) \left(\frac{1}{\cos KL/2} \right) (\operatorname{sen} Kx) - \left(\frac{F}{2P} \right) x \quad (4.9)$$

La deflexión máxima ocurre en $x = L/2$. Por tanto, después de algunas simplificaciones,

$$y_{\max} = \left(\frac{F}{2PK} \right) \left(\tan \frac{KL}{2} \right) - \left(\frac{KL}{2} \right) \quad (4.10)$$

De esto se puede concluir que el momento máximo absoluto, que ocurre en el punto medio, es

$$M_{\max} = - \left(\frac{FL}{4} \right) - (Py_{\max}) = \left(\frac{F}{2K} \right) \tan \frac{KL}{2} \quad (4.11)$$

Obsérvese que las expresiones dadas por las ecuaciones 4.9, 4.10 y 4.11 se hacen infinitas si $kL/2$ es un múltiplo de $\pi/2$, ya que esto hace a $\cos kL/2$ igual a cero, y a $\tan kL/2$, infinita. Enunciado algebraicamente, lo anterior sucede cuando

$$\frac{KL}{2} = \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{n\pi}{2} \quad (4.12)$$

donde n es un entero. Resolviendo esta ecuación para determinar P , se obtiene el valor de esta carga, que causa deflexiones o momentos flexionantes de magnitud infinita. Esto corresponde a la condición de la fuerza axial crítica P_{cr} para esta barra:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (4.13)$$

Para la mínima fuerza crítica, el entero n es igual a 1. Este resultado es la carga de pandeo que se describió en las secciones 4.3 y 4.4.

Es significativo observar que los momentos flexionantes en elementos con esbeltez se pueden incrementar sustancialmente por la presencia de fuerzas axiales de compresión, ecuación 4.11. Cuando dichas fuerzas existen, las deflexiones causadas por la carga transversal se incrementan, como lo indican las ecuaciones 4.9 y 4.10 (por ejemplo, verifíquese que, para $kL/2=\pi/4$, entonces $y_{m\acute{a}x} = FL^3/(36EI) > FL^3/(48EI)$, que es la deflexión máxima en ausencia de P , es decir, $k = 0$). Para fuerzas de tensión, por otra parte, las deflexiones se reducen.

EJEMPLO 4.1.- Calcular la carga crítica de pandeo para una columna redonda de acero estándar de 2 pulg. de diámetro y 10 pies de longitud, cuyos extremos están articulados. Considere $E = 30 \times 10^6$ lb/pulg².

SOLUCION: Para este caso en el que los extremos están articulados, el factor de longitud efectiva k es igual a 1 por lo que la Ec. 4.4 toma la forma de la Ec. 4.3. La inercia para una sección circular es $I = \pi D^4/64$ y en este problema toma el valor de 0.785 pulg⁴.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (30 \times 10^6)(0.785)}{(10 \times 12)^2}$$

$$P_{cr} = 16,149.1 \text{ lb}$$

Nótese que ésta es la carga *límite* para esta columna. Para obtener la carga *permisible* se debe aplicar un factor de seguridad.

En el caso de que una de las condiciones de extremo cambiara a, por ejemplo, empotramiento, se tendría una columna empotrada y articulada cuyo factor de longitud efectiva k tomaría el valor de 0.70 y la carga crítica sería

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (30 \times 10^6)(0.785)}{(0.70 \times 120)^2}$$

$$P_{cr} = 32,940.64 \text{ lb}$$

EJEMPLO 4.2.- Una columna de aluminio de longitud L y sección transversal rectangular tiene un extremo empotrado B y soporta una carga centrada en A . Dos placas fijas de bordes redondeados y suaves restringen el desplazamiento del extremo A en uno de los planos de simetría de la columna, pero le permiten el desplazamiento en el otro plano. a) Determinar la relación a/b de los dos lados de la sección transversal correspondiente al diseño más eficiente para pandeo, b) diseñar la sección transversal más eficiente de la columna, sabiendo que $L = 500$ mm, $E = 70$ Gpa, $P = 20$ KN, y que el factor de seguridad debe ser 2.5.

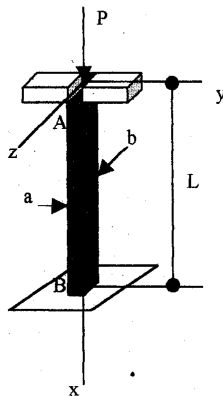


FIGURA 4.8

SOLUCIÓN: De la Fig. 4.8 se observa que se tienen dos posibles planos de pandeo, el xy y el xz , cada uno de los cuales presenta diferente restricción en el extremo superior y por consiguiente un valor distinto para el coeficiente de longitud efectiva k .

Plano xy: Al pandearse en este plano las secciones transversales girarían alrededor del eje z, por lo tanto la inercia a considerar sería en relación a éste, y el coeficiente de longitud efectiva es 0.7. Entonces se escribe

$$I_z = 1/12ba^3 \quad \text{y} \quad A = ab$$

y puesto que $I_z = Ar_z^2$, $r_z^2 = I_z/A = (1/12ba^3)/ab = a^2/12$,

$$r_z = a/12$$

La relación de esbeltez efectiva de la columna con respecto al pandeo en este plano es

$$\frac{L_e}{r_z} = \frac{0.7L}{a/12} \quad (1)$$

Plano xz: La longitud efectiva de la columna con respecto al pandeo en este plano es $L_e = 2L$, y el correspondiente radio de giro $r_y = b/12$. Entonces,

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{2L}{b/12} \quad (2)$$

a).- **Diseño más eficiente.** El diseño más eficiente es aquel para el cual los esfuerzos críticos correspondientes a las dos formas de pandeo son iguales.

De la Ec. 4.14, se observa que este será el caso si los dos valores obtenidos para la relación de esbeltez efectiva son iguales. Entonces

$$\frac{0.7L}{a/12} = \frac{2L}{b/12}$$

y, despejando la relación a/b,

$$\frac{a}{b} = \frac{0.7}{2}$$

$\frac{a}{b} = 0.35$

b).- **Diseño para los datos dados.** Dado que el F.S. es 2.5,

$$P_{Cr} = (F.S.)P = (2.5)(20 \text{ KN}) = 50 \text{ KN}$$

Usando $a = 0.35 b$, tenemos $A = ab = 0.35 b^2$, y

$$\sigma_{Cr} = \frac{P_{Cr}}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{0.35 b^2}$$

Haciendo $L = 0.500$ m en la Ec. (2), tenemos $L_e / r_y = 3.464 / b$. Sustituyendo en la Ec. 4.14 escribimos

$$\frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{0.35 b^2} = \frac{\pi^2 (70 \times 10^9 \text{ Pa})}{(3.464 / b)^2}$$

$$b = 39.7 \text{ mm} \quad \text{y} \quad a = 0.35b = 13.9 \text{ mm}$$

4.7.- LIMITACION DE LAS FÓRMULAS DE PANDEO ELASTICO

En las deducciones anteriores de las fórmulas de pandeo para columnas se supuso que el material se comportaba de manera linealmente elástica. Para demostrar esta importante limitación, la Ec. 4.3 se puede escribir en forma diferente. Por definición, $I = Ar^2$, donde A es el área de una sección transversal y r su radio de giro. La sustitución de esta relación en la Ec. 4.3 da

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EA r^2}{L^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (4.14)$$

donde el esfuerzo crítico, σ_{cr} , para una columna se define como un *esfuerzo promedio* en el área transversal A de la misma, debido a la carga crítica P_{cr} . Para la Ec. 4.14, se debe usar la longitud efectiva de la columna como se mostró en la sección 4.4 y r es el radio de giro mínimo del área de la sección, puesto que la fórmula original de Euler se da en términos del valor mínimo de I . La relación L/r de la longitud de una columna al radio de giro mínimo de un área transversal se llama *relación de esbeltez* de la columna.

De la Ec. 4.14 se puede concluir que el límite de proporcionalidad del material es el límite superior del esfuerzo con el cual la columna se pandeará elásticamente.

Si una columna llega a ser inestable mientras está en un estado de esfuerzo crítico, es conocida como *columna esbelta* (o columna larga) y la condición de falla es descrita como *inestabilidad elástica*. También, si una columna llega a ser inestable después de haber sido cargada más allá de su límite de proporcionalidad, es conocida como *columna intermedia* y la condición de falla se describe como *inestabilidad inelástica*. Los miembros a compresión que fallan por cedimiento general o aplastamiento sin llegar a ser inestables son conocidos como *columnas cortas*, o simplemente, miembros a compresión.

EJEMPLO 4.3. - Hallar la longitud mínima L , de una columna con extremos articulados, que tenga un área transversal de 5 cm por 7.5 cm y para la cual se aplique la fórmula de Euler para columnas elásticas. Supóngase que $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/Cm}^2$ y que el límite de proporcionalidad es de $2,800 \text{ Kg/Cm}^2$.

SOLUCIÓN: El momento de inercia mínimo de la sección transversal es

$$I_{\min} = \frac{(7.5)(5)^3}{12} = 78.13 \text{ cm}^4$$

y

$$A = (7.5)(5) = 37.50 \text{ cm}^2$$

por lo que

$$r = r_{\min} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{78.13}{37.5} = 1.44 \text{ cm}$$

El esfuerzo crítico no debe exceder de 2,800 Kg/Cm² para que la columna se pandee elásticamente, de la Ec. 4.14 se tiene

$$2,800 \leq \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

de donde

$$(L/r)^2 \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_{cr}} = \frac{(3.14)^2 (2 \times 10^6)}{2,800} = 7,049.72$$

$$L/r \geq 83.96 \quad \text{entonces } L \geq (83.96)(1.44) = \boxed{120.91 \text{ cm}}$$

4.8.- FÓRMULAS GENERALIZADAS DE LA CARGA DE PANDEO DE EULER

Un diagrama típico esfuerzo-deformación a la compresión para una probeta en la que se impide el pandeo se puede representar como en la Fig. 4.9a. En el intervalo de esfuerzos desde 0 hasta A el material se comporta elásticamente. Si el esfuerzo en una columna en pandeo no excede de este intervalo la columna se pandeará elásticamente. La hipérbola correspondiente a la Ec. 4.14, es aplicable en este caso. Esta porción de la curva se indica como ST en la Fig. 4.9b. Es importante reconocer que esta curva no representa el comportamiento de una columna sino más bien el de un número infinito de columnas ideales de diferente longitud. La hipérbola que corresponde a la región situada más allá del intervalo útil se indica en la figura por medio de una línea punteada.

Una columna con una relación L/r correspondiente al punto S de la Fig. 4.9b será la columna de más corta longitud hecha de material y tamaño dados, que se pandeará elásticamente, una columna más corta, con una relación L/r aún menor, no se pandeará en el límite de proporcionalidad del material. En el diagrama esfuerzo-deformación, Fig. 4.9a, esto significa que el nivel de esfuerzos en la columna ha pasado del punto A y ha alcanzado un cierto punto B. A este nivel de esfuerzo más alto se puede decir que, en efecto, se ha creado una columna de material diferente, puesto que la rigidez del mismo ya no está representada por el módulo de elasticidad. En este punto, la rigidez del material está dada instantáneamente por la tangente a la gráfica esfuerzo-deformación, es decir, por el *módulo elástico tangencial* (o referido a la tangente), E_t . La columna permanecerá estable si una nueva rigidez a la flexión E_t en B es suficientemente grande y podrá soportar una carga mayor. A medida que la carga aumenta, el nivel de esfuerzo se eleva también, en tanto que el módulo referido a la tangente disminuye. Una columna de "material aún menos rígido" actúa bajo una carga creciente. La sustitución del módulo elástico tangencial, E_t , en vez del módulo elástico normal, E , es entonces la única modificación necesaria para obtener las fórmulas de pandeo elástico aplicables en el intervalo inelástico. En consecuencia, la fórmula generalizada de Euler, o bien la fórmula del módulo referido a la tangente, será

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} \quad (4.15)$$

Como los esfuerzos correspondientes a los módulos referidos a la tangente se pueden obtener a partir del diagrama esfuerzo-deformación a la compresión, la relación L/r a la cual se pandeará una columna con estos valores se puede obtener la Ec.4.15. Una gráfica que represente este comportamiento para valores intermedios y bajos de L/r está dada en la Fig. 4.9b por la curva desde R hasta S. Los ensayos en columnas individuales verifican esta gráfica con notable exactitud.

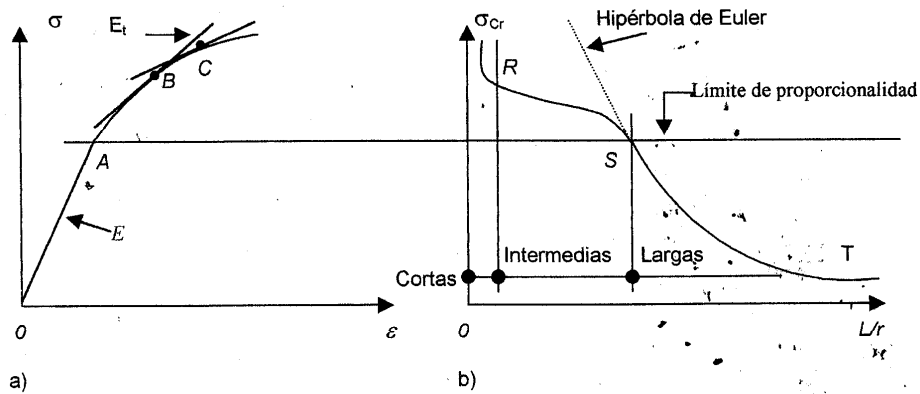


FIGURA 4.9

4.9.- COLUMNAS CARGADAS EXCÉNTRICAMENTE

En esta sección plantearemos el problema del pandeo de la columna de una manera diferente, observando que la carga P aplicada nunca está perfectamente centrada. Designaremos a e la excentricidad de la carga, es decir, la distancia entre la línea de acción de P y el eje de la columna, reemplazaremos la carga excéntrica dada por una fuerza centrada P y un par M_A de momento $M_A = P e$. (Ver figura 4.10).

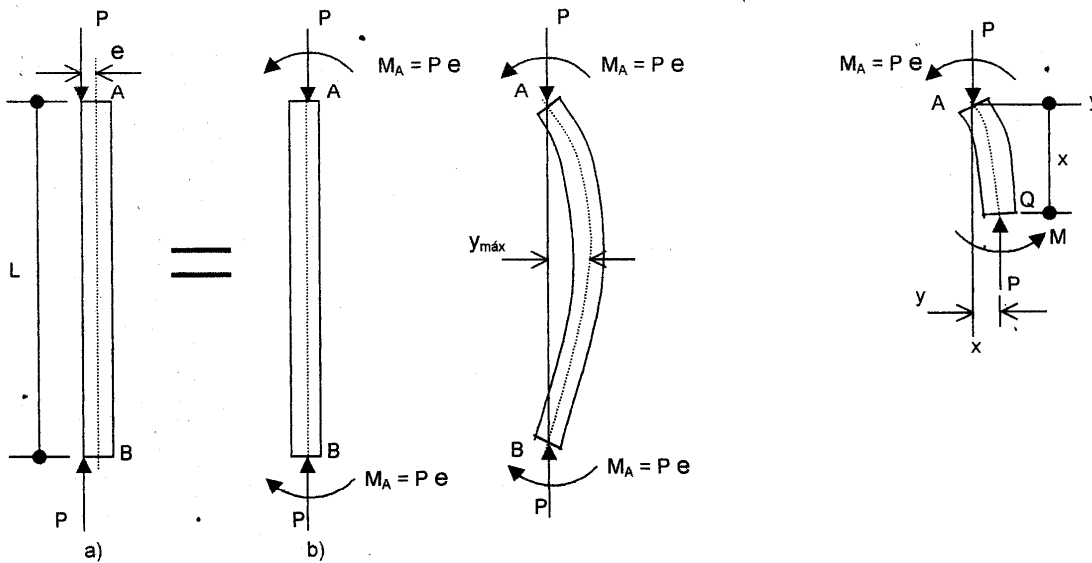


FIGURA 4.10

Es claro que, sin importar lo pequeño que sea la carga P y la excentricidad e , el par M_A causará alguna flexión en la columna. Cuando se incrementa la carga excéntrica, tanto la fuerza axial P como el par M_A aumentan y ambos causan flexión adicional sobre la columna. Así considerado, el problema del pandeo no es determinar por cuanto tiempo una columna puede permanecer recta y estable bajo la acción de una carga que se incrementa, sino cuanta flexión puede permitirse bajo la acción de la carga variable, si no se debe exceder el esfuerzo admisible y la deflexión $y_{m\acute{a}x}$ no debe ser excesiva.

Primero escribiremos y resolveremos la ecuación de la curva elástica, procediendo con los mismos criterios con los que obtuvimos las ecuaciones anteriores. Observando el diagrama de cuerpo libre de la porción AQ de la columna de la figura 4.10, escogemos los ejes coordenados mostrados en ella, encontrando que el momento flector en Q es:

$$M = -Py - M_A = -Py - Pe \quad (4.16)$$

Sustituyendo el valor de M en la ecuación diferencial de la elástica, escribimos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\left(\frac{P}{EI}\right)y - \frac{Pe}{EI} \quad (4.17)$$

Trasponiendo el término que tiene y y haciendo $K^2 = P/EI$ como antes se hizo, escribimos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + K^2 y = -K^2 e \quad (4.18)$$

Donde la solución general para esta ecuación de segundo grado es:

$$y = A \operatorname{sen} Kx + B \operatorname{cos} Kx - e \quad (4.19)$$

Donde el último término es una solución particular de la ecuación 4.18.

Las constantes A y B se obtienen de las condiciones frontera mostradas en la figura 4.11.

Haciendo primero $x=0, y=0$ en la ecuación 4.19 tenemos

$$B = e$$

Haciendo luego $x=L, y=0$, escribimos

$$A \operatorname{sen} KL = e(1 - \operatorname{cos} KL) \quad (4.20)$$

Recordando que

$$\operatorname{sen} KL = 2 \operatorname{sen} KL/2 \operatorname{cos} KL/2 \quad \text{y que}$$

$$1 - \operatorname{cos} KL = 2 \operatorname{sen}^2 KL/2$$

y sustituyendo en la Ec. 4.20, obtenemos, después de reducciones,

$$A = e \tan \frac{KL}{2}$$

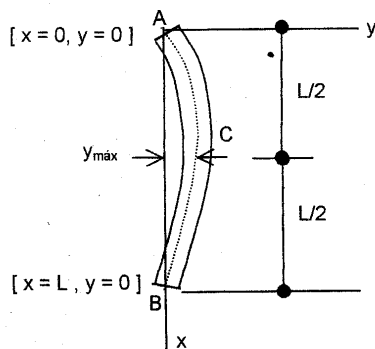


Figura 4.11

Sustituyendo A y B en la Ec. 4.19, escribimos la ecuación de la curva elástica :

$$y = e \left(\frac{\tan \frac{KL}{2} \operatorname{sen} Kx + \cos Kx}{2} - 1 \right) \quad (4.21)$$

El valor de la máxima deflexión se obtiene para $x = L/2$ en la Ec. 4.21. Tenemos

$$\begin{aligned} y_{\max} &= e \left(\frac{\tan \frac{KL}{2} \operatorname{sen} \frac{KL}{2} + \cos \frac{KL}{2}}{2} - 1 \right) \\ &= e \left[\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{KL}{2} + \cos^2 \frac{KL}{2}}{\cos \frac{KL}{2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$y_{\max} = e \left(\sec \frac{KL}{2} - 1 \right)$$

Pero como $k^2 = P/EI$, escribimos

$$y_{\max} = e \left[\sec \left[\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right] - 1 \right] \quad (4.22)$$

Nótese que la expresión obtenida para y_{\max} se vuelve infinita cuando

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (4.23)$$

Aunque la deflexión realmente no llega a ser infinita, sin embargo llega a ser inaceptablemente grande y no debería permitirse que P alcance el valor crítico que satisfaga la Ec. 4.23. Despejando P de esta ecuación tenemos

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (4.24)$$

Que es el valor obtenido en la Ec. 4.3 para una columna con carga céntrica. Despejando EI de la Ec. 4.24 y sustituyendo en 4.23, podemos expresar la deflexión máxima en la fórmula alterna

$$y_{\max} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right) \quad (4.25)$$

El esfuerzo máximo σ_{\max} ocurre en la sección de la columna donde el momento flector es máximo, o sea, en la sección transversal que pasa por el punto medio C, y puede obtenerse sumando los esfuerzos normales debidos, respectivamente, a la fuerza axial y al par de flexión ejercidos en dicha sección. Tenemos

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + M_{\max} \frac{C}{I} \quad (4.26)$$

Del diagrama de cuerpo libre la porción AC de la columna (ver Fig. 4.13), encontramos que

$$M_{\max} = P y_{\max} + M_A = P (y_{\max} + e)$$

Sustituyendo este valor en 4.26 y recordando que $I = A r^2$, escribimos

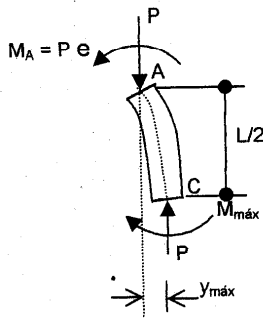


FIGURA 4.12

$$\sigma_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{(y_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} + e) C}{r^2} \right] \quad (4.27)$$

Sustituyendo el valor de $y_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}$ obtenido en 4.22, escribimos

$$\sigma_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{eC}{r^2} \sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \right] \quad (4.28)$$

Una fórmula alterna para $\sigma_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}$ puede obtenerse sustituyendo el valor de $\sigma_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}$ de 4.25 en 4.27.

Tenemos

$$\sigma_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{eC}{r^2} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} \right] \quad (4.29)$$

La ecuación obtenida puede usarse para cualquier condición de los extremos, siempre y cuando se use el valor apropiado de la carga crítica.

Notamos que, puesto que $\sigma_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}$ no varía linealmente con la carga P , el principio de superposición no puede aplicarse para la determinación del esfuerzo debido a la aplicación simultánea de varias cargas; debe determinarse primero la resultante de las cargas y luego usar las Ecs. 4.28 o 4.29 para determinar el esfuerzo correspondiente. Por la misma razón, cualquier factor de seguridad debe aplicarse a la carga y no al esfuerzo.

Haciendo $I = A r^2$ en la Ec. 4.28 y despejando la relación P/A , escribimos

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}}{1 + \frac{eC}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right)} \quad (4.30)$$

Donde la longitud efectiva se usa para hacer que la fórmula sea aplicable a varias condiciones en los extremos. Esta se denomina "Fórmula de la Secante"; define la fuerza por unidad de área, P/A , que causa un esfuerzo máximo especificado $\sigma_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}$ en una columna de una relación de esbeltez efectiva L_e/r , para un valor dado de la relación eC/r , donde e es la excentricidad de la carga aplicada. Notamos que, puesto que P/A aparece en ambos miembros, es necesario resolver una ecuación trascendental por ensayo y error, para obtener el valor de P/A correspondiente a la columna dada y a las condiciones de carga dadas.

Un problema de aplicación aclarará el uso de las ecuaciones deducidas.

EJEMPLO 4.4.-

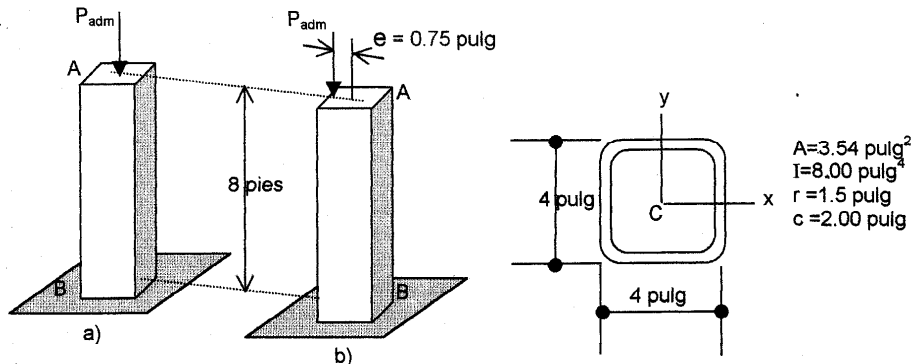


FIGURA 4.13

La columna uniforme Ab de la Fig. 4.13, consiste en una sección de tubo estructural de 8 pies de longitud, que tiene la sección transversal mostrada:

a).- Usando la fórmula de Euler y un factor de seguridad de 2.0, determinar la carga de trabajo centrada para la columna y el correspondiente esfuerzo normal.

b).- Suponiendo que la carga de trabajo calculada en el inciso a), se aplica en un punto situado a 0.75 pulg. del eje geométrico de la columna, como se muestra en la figura, determinar la deflexión horizontal de la parte superior de la columna y el máximo esfuerzo normal. Use $E = 29 \times 10^6 \text{ Lb / pulg}^2$.

SOLUCION :

Según las condiciones en sus extremos, la longitud efectiva sería

$$L_e = 2 (8 \text{ pies}) = 16 \text{ pies} = 192 \text{ pulg}$$

Usando la Ec. 4.4 de Euler para la carga crítica

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L_e)^2} = \frac{\pi^2 (29 \times 10^6) (8.0)}{(192)^2} = 62.11 \text{ KLb}$$

Con el factor de seguridad propuesto, el valor de la carga de trabajo sería

$$P_T = \frac{P_{cr}}{F.S.} = \frac{62.11 \text{ KLb}}{2} = 31.1 \text{ KLb}$$

El esfuerzo normal correspondiente es

$$\sigma = \frac{P_T}{A} = \frac{31.1 \text{ KLb}}{3.54 \text{ pulg}^2} = 8.79 \text{ KLb / pulg}^2$$

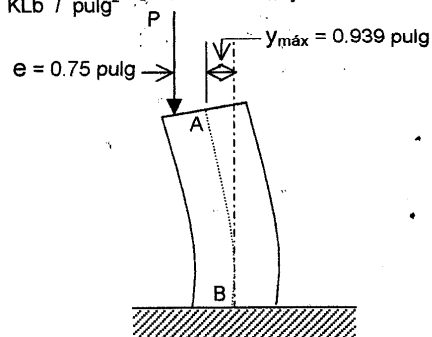
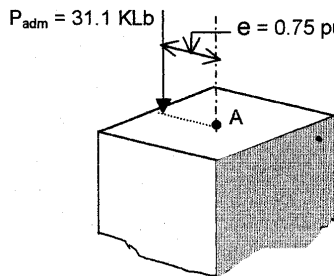


Figura 4.14

b).- Usando la Ec. 4.25 y obtenida la relación P / P_{cr} previamente que es igual a $1/2$, determinamos la deflexión horizontal del punto A.

$$\begin{aligned} y_{\max} &= e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right] \\ &= (0.75) \left[\sec \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) - 1 \right] \\ &= 0.939 \text{ pulg} \end{aligned}$$

El esfuerzo normal máximo se obtiene de la Ec. 4.29

$$\begin{aligned}\sigma_{m\acute{a}x} &= \frac{P}{A} \left(1 + \frac{e \cdot C}{r^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right) \\ &= \frac{31.1}{3.54} \left(1 + \frac{(0.75)(2.0)}{(1.5)^2} \sec \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) \right)\end{aligned}$$

$$\boxed{= 22.0 \text{ Klb / pulg}^2}$$